01

Авторезонансное охлаждение частиц в пространственно-периодических потенциалах

© *М.Ю. Улейский, Е.В. Соседко, Д.В. Макаров*

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток
E-mail: makarov@poi.dvo.ru

Поступило в Редакцию 3 августа 2010 г.

Рассматривается движение ансамбля невзаимодействующих классических частиц в поле пространственно-периодического потенциала. Предполагается, что изначально весь ансамбль находится в баллистическом режиме. Показано, что наложение внешнего возмущения в виде плоской волны с адиабатической модуляцией частоты может приводить к локализации значительной доли ансамбля с уменьшением средней энергии частиц. Эффект достигается за счет захвата частиц в хаотический слой в фазовом пространстве, индуцированный рассеянием на резонансе с волной возмущения.

Хаос является непреодолимым препятстствием для точного детерминированного описания движения на временах, превышающих ляпуновское время, и в большинстве физических задач представляет собой „вредное“ явление, заставляющее искать пути своего устранения или хотя бы ослабления. Физические проблемы, в которых хаос играет конструктивную роль, встречаются достаточно редко. Например, хаос может быть использован при кодировании информации (см., например, [1]). Также хаос способствует усилению транспортных явлений, что является важным с точки зрения создания ускорителей частиц [2,3], а также расчетов — пространственно-периодических систем, демонстрирующих направленное движение в отсутствие выделенного направления внешней силы [4–7]. В обоих этих случаях хаос играет ключевую роль для разогрева частиц и активации баллистического потока. В данной работе мы демонстрируем пример того, как разрушение динамических барьеров и генерация контролируемой хаотической диффузии могут быть использованы для достижения противоположной цели — охлаждения и локализации частиц. Контроль над хаотической диффузией осуществляется с помощью авторезонанса, когда происходит захват фазы колебаний частицы за счет изменения параметров системы [8,9].

Рассмотрим ансамбль невзаимодействующих частиц, движущихся в поле косинусоидального потенциала, на которое наложено малое возмущение в форме плоской волны с адиабатической модуляцией частоты. Гамильтониан отдельной частицы выглядит следующим образом:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \omega_0^2 \cos x + \varepsilon \cos \Psi, \quad \Psi = kx + s\nu t - \frac{a}{\mu} \sin \mu t, \tag{1}$$

где x — координата, p — импульс, m — масса, ω_0 — частота малых колебаний, k и ν — волновое число и частота возмущения соответственно, a — амплитуда модуляции, s равно 1 или -1, ε и μ — константы, удовлетворяющие неравенству $\mu \ll \sqrt{\varepsilon} \ll \omega_0$. Траектория отдельной частицы удовлетворяет уравнениям движения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -\omega_0^2 \sin x + \varepsilon k \sin \Psi. \tag{2}$$

В настоящей работе мы рассмотрим случай $k \gg 1$. Тогда возмущение быстро осциллирует вдоль траектории частицы всюду, за исключением резонансных областей, определяемых условием

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{kp}{m} + s\nu - a \cos \tau \cong 0, \tag{3}$$

где мы обозначили „медленное“ время μt как τ. Это условие удовлетворяется, когда импульс частицы близок к резонансному значению

$$p_{res} = -\frac{sm(\nu - a \cos \tau)}{k}. \tag{4}$$

Резонанс (3) является аналогом резонанса „волна–частица“, когда заряженная частица захватывается плоской электромагнитной волной [10]. Вдали от резонанса динамика частицы близка к интегрируемой и может быть успешно описана с помощью метода усреднения. Движение вблизи резонанса описывается уравнением

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} - \Omega^2 \sin \Psi + F(x) = 0, \tag{5}$$

где

$$\Omega = \frac{k}{m}\sqrt{\varepsilon}, \quad F = \omega_0^2 \sin x. \tag{6}$$

При $\omega_0 \ll \Omega$ уравнение (5) эквивалентно уравнению возмущенного маятника с медленной модуляцией колебаний. Это уравнение анализировалось в серии работ А.И. Нейшдадта и его коллег (см., например, [10]), где было показано, что в этом случае происходит рассеяние таректорий на резонансе (3) с образованием области неустойчивости по Ляпунову в фазовом пространстве. Наиболее сильное рассеяние происходит тогда, когда условие (3) выполняется вблизи экстремумов невозмущенного потенциала. Это обстоятельство позволяет найти расположение области неустойчивости в пространстве энергии

$$E_{res} \cong \frac{m(\nu - a\cos\tau)^2}{2k^2} + U_{extr}, \tag{7}$$

где U_{extr} — значение потенциала в точке экстремума, в нашем случае равное $-\omega_0^2$ или ω_0^2. Из формулы (7) следует, что положение области неустойчивости медленно меняется со временем. Мы будем называть эту область промежуточным хаотическим слоем (ПХС). Если время хаотического перемешивания, имеющее порядок Ω^{-1}, много меньше периода адиабатической модуляции, то частицы будут успевать заполнить ПХС до того, как сам он значительно сместится в энергетическом пространстве. Благодаря этому в каждый момент времени значительная доля частиц будет находиться достаточно далеко от границ ПХС и, таким образом, удерживаться внутри него по мере его смещения. Таким образом, возникает специфическая разновидность авторезонанса, хотя частицы не пребывают в резонансе постоянно, они не покидают его окрестность за счет быстрого хаотического перемешивания внутри ПХС. Эта особенность динамики частиц может быть использована как для их разогрева, так и для охлаждения, в зависимости от направления движения ПХС в энергетическом пространстве.

Для демонстрации описанного выше эффекта проведем численное моделирование динамики пятна из 100 000 частиц с гауссовым начальным распределением по координатам и импульсам

$$\rho(x, p, t = 0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_p}\exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2}\frac{(p - p_0)^2}{2\sigma_p}\right] \tag{8}$$

с центром пятна в точке $x_0 = \pi,\ p_0 = -1.75$. Используем следующие значения параметров:

$$m = \omega_0 = s = 1, k = \nu = 8, a = 6, \mu = 2\pi \cdot 10^{-3}, \sigma_x = \sigma_p = 0.01.$$

Таким образом, в начальный момент времени центр пятна находится в точке фазового пространства, удовлетворяющей уравнению (7). Различные стадии эволюции пятна изображены на рис. 1. На малых временах изначально компактное пятно вытягивается в искривленную „струнку", что является вполне типичным для хаотического рассеяния. Вытянутая струнка представляет собой пример лагранжева многообразия. Спустя некоторое время струнка вытягивается настолько, что начинает „переплетаться" (рис. 1, a). На самом деле „переплетение" струнки — это всего лишь визуальный обман, поскольку в гамильтоновых системах различные сегменты лагранжева многообразия не могут пересекаться друг с другом. Возникающая при переплетении структура имеет характерные пустоты, связанные с островами устойчивости на конечном времени. Как только переплетенное лагранжево многообразие начинает касаться сепаратрисы, оно приобретает форму, похожую на эллипс с центром в точке $(x = 0,\ p = 0)$. От этого эллипса в направлении центра отходят филаменты, возникающие вследствие захвата частиц сепаратрисными лобами. В дальнешем, по мере того как ПХС смещается к центру фазового пространства, филаменты также медленно ползут по направлению к центру. При этом площадь области в центре, не заполненной траекториями, постоянно уменьшается. Одна из промежуточных фаз этого процесса изображена на рис. 1, b. При $t = 500$ резонансное значение энергии достигает своего минимального значения и ансамбль частиц полностью поглощает область финитного движения, трансформируясь в хаотическое облако. Распределение частиц внутри возникшего облака в фазовом пространстве является неравномерным — наибольшая концентрация частиц наблюдается в области баллистического движения (см. рис. 1, c). Достигнув минимума, резонансное значение энергии снова начинает расти. При его приближении к максимуму возникает частичная рефокусировка облака частиц вблизи нижнего края, что связано с повышенной концентрацией частиц внутри находящегося там ПХС. Описанная последовательность стадий повторяется со временем до тех пор, пока облако частиц не станет полностью однородным.

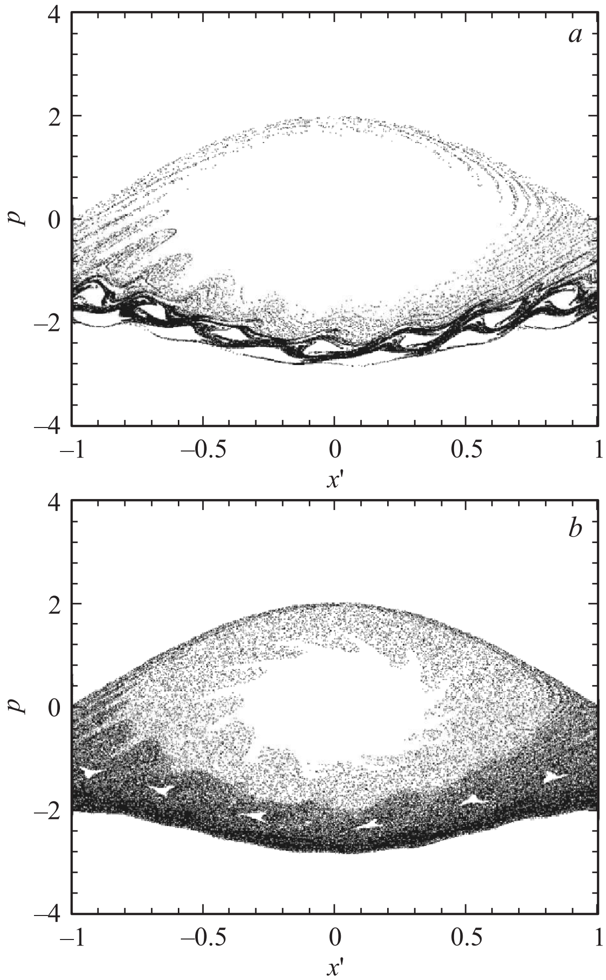

Рис. 1. Распределение частиц в фазовом пространстве в различные моменты времени. Роль горизонтальной координаты на рисунках играет „смещенная“ координата $x' = \frac{x}{\pi} + 2N$, где N — целое число, подбираемое так, чтобы удовлетворялось неравенство $-1 \leqslant x' \leqslant 1$. Значения времени: a — $t = 50$, b — $t = 180$, c — $t = 500$.

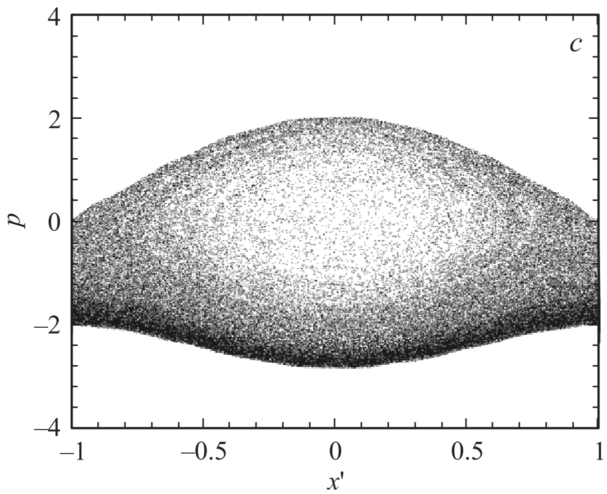

Рис. 1 (*продолжение*).

Процесс гомогенизации облака можно трактовать как релаксацию начального распределения частиц к состоянию статистического равновесия, соответствующему равномерному заполнению области глобальной неустойчивости по Ляпунову (т. е. неустойчивости на бесконечном интервале времени). Таким образом, если средняя энергия частиц в начальный момент времени больше, чем средняя энергия в равновесном состоянии, то хаотическое перемешивание приведет к охлаждению ансамбля частиц в целом. Как следует из рис. 2, где изображена зависимость средней энергии от времени, процесс релаксации является немонотонным. Сначала происходят скачкообразные падения средней энергии. Интервал между соседними скачками равен периоду адиабатической модуляции. При $t \cong 5000$ скачки прекращаются и начинается медленный рост средней энергии. Отсюда следует, что авторезонансное охлаждение позволяет достичь меньшей средней энергии, чем средняя энергия равновесного состояния. Возможно, что рост средней энергии обусловлен так называемым слабым нарушением эргодичности, обусловленным присутствием зон длительной локализации частиц в фазовом пространстве. Также заметим, что средняя энергия частиц в состоянии, близком к равновесному, гораздо меньше энергии невоз-

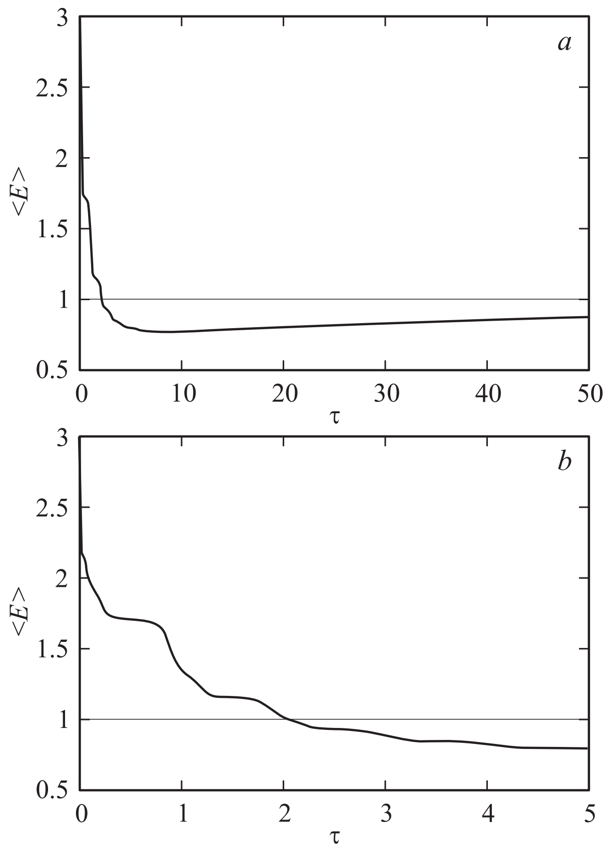

Рис. 2. *a* — средняя энергия частиц как функция „медленного“ времени $\tau = \mu t$. Жирная горизонтальная линия соответствует значению энергии на сепаратрисе, отделяющей локализованные частицы от баллистических. *b* — увеличенный фрагмент, соответствующий малым временам.

мущенной сепаратрисы, что предполагает большое количество частиц, перешедших из баллистического режима в финитный.

Таким образом, мы продемонстрировали подход, позволяющий эффективно охлаждать ансамбль частиц, находящийся в поле периодического потенциала, действуя на него слабым возмущением с адиабатической модуляцией частоты, порождающей авторезонанс. Данный подход представляет интерес для широкого круга физических задач, описываемых периодическими в пространстве гамильтонианами, например для управления носителями заряда в полупроводниковых структурах.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проект 09-02-01258-а) и Фонда „Династия“.

Список литературы

[1] *Дмитриев А.С., Кяргинский Б.Е., Панас А.И., Пузиков Д.Ю., Старков С.О.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. С. 70–76.
[2] *Gong J., Brumer P.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 240602.
[3] *Makarov D.V., Uleysky M.Yu.* // Phys. Rev. E. 2007. P. 065201(R).
[4] *Flach S., Yevtushenko O., Zolotaryuk Y.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 2358–2361.
[5] *Макаров Д.В., Улейский М.Ю.* // Письма в ЖЭТФ. 2006. Т. 83. С. 614–617.
[6] *Chacon R.* // J. Phys. A.: Math. Gen. 2007. V. 40. P. F413–419.
[7] *Макаров Д.В.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. С. 65–70.
[8] *Friedland L.* // Phys. Plasmas. 1994. V. 1. P. 421–248.
[9] *Kiselev O.M., Glebov S.G.* // Nonlinear Dynamics. 2007. V. 48. P. 217–230.
[10] *Itin A.P., Neishtadt A.I., Vasiliev A.A.* // Physica D. 2000. V. 141. P. 281–296.