

09

## Управляемые колебания в цепочке однаправленно связанных бистабильных генераторов с хаотической динамикой

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН  
(Фрязинский филиал), Фрязино, Моск. обл.  
E-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 14 апреля 2011 г.

Приведены уравнения цепочки  $n$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) однаправленно связанных бистабильных генераторов, обладающих хаотической динамикой, и представлены результаты численного анализа на примере трех идентичных автоколебательных систем при кубической аппроксимации их нелинейных элементов. Показано, что по мере увеличения связи между парциальными генераторами происходит усложнение движений в фазовом пространстве и даже хаотизация колебаний при параметрах, при которых в генераторах реализуются регулярные движения в автономном режиме. Особенности воздействия колебаний управляющего генератора на колебания управляемой бистабильной системы обусловлены фильтрацией воздействующего сигнала в контуре управляемого генератора.

Цепочки однаправленно связанных генераторов изучались во многих работах, в основном с целью управления колебаниями [1–3]; также проводились исследования применительно к повышению мощности хаотических колебаний [4]. При управлении колебаниями обычно используется эффект синхронизации — хаотической синхронизации в случае применения автоколебательных систем с хаотической динамикой. Однако можно осуществлять управление колебаниями в смысле изменения их структуры и при использовании асинхронной динамики парциальных генераторов (подсистем). Именно это имеет место в цепочке однаправленно связанных идентичных генераторов Чуа. Данная работа посвящена изучению этого вопроса.

Уравнения цепочки однонаправленно связанных генераторов Чуа легко получить из уравнений, описывающих два асимметрично связанных генератора [5]. Обобщая уравнения работы [5] на цепочку  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) асимметрично связанных генераторов, можем, ограничиваясь случаем резистивной связи идентичных подсистем, записать следующую систему  $3n$  уравнений:

$$\begin{aligned}
 dx_1/dt &= y_1 - x_1 + h_1(x_1), & dy_1/dt &= (x_1 - y_1 + z_1)/\alpha, \\
 dz_1/dt &= -\beta(y_1 + \rho z_1), \\
 dx_2/dt &= y_2 - x_2 + h_2(x_2), & dy_2/dt &= [x_2 - y_2 + z_2 + \gamma(x_1 - y_2)]/\alpha, \\
 dz_2/dt &= -\beta(y_2 + \rho z_2), \\
 dx_3/dt &= y_3 - x_3 + h_3(x_3), & dy_3/dt &= [x_3 - y_3 + z_3 + \gamma(x_2 - y_3)]/\alpha, \\
 dz_3/dt &= -\beta(y_3 + \rho z_3), \\
 & \dots \dots \dots (1) \\
 dx_n/dt &= y_n - x_n + h_n(x_n), & dy_n/dt &= [x_n - y_n + z_n + \gamma(x_{n-1} - y_n)]/\alpha, \\
 dz_n/dt &= -\beta(y_n + \rho z_n).
 \end{aligned}$$

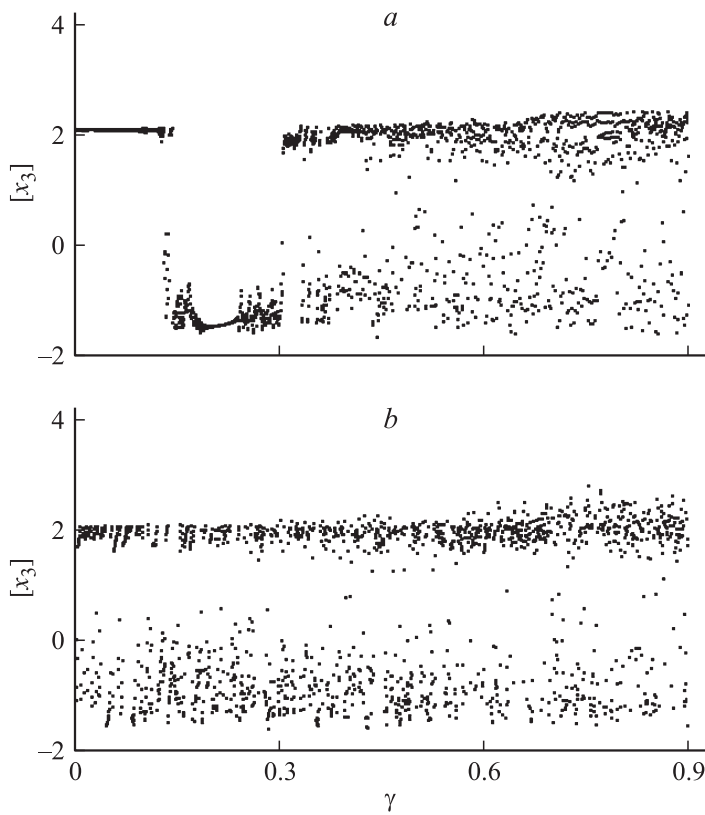
Здесь  $x_i, y_i, z_i$  — переменные (при  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ),  $\alpha, \beta, \rho, \gamma$  — постоянные коэффициенты,  $h_i(x_i)$  — функции, описывающие нелинейные характеристики активных элементов. Параметр  $\rho$  определяет потери в колебательном контуре парциального генератора,  $\gamma$  — коэффициент связи. Нормированное время в системе (1) выбрано так, что в случае, когда  $\alpha = 0$ , из приведенных уравнений получаются уравнения триггера.

Функции  $h_i(x_i)$  могут быть аппроксимированы различными соотношениями. При расчетах будет применена кубическая аппроксимация нелинейности. В этом случае

$$h_i(x_i) = \mu x_i - \nu x_i^3, \quad (2)$$

где  $\mu, \nu$  — постоянные коэффициенты.

Численный анализ проводился методом Рунге–Кутты 4-го порядка при шаге интегрирования по времени  $\Delta = 0.04$ . Рассматривалась цепочка, состоящая из трех парциальных генераторов ( $n = 3$ ). Значения неизменяемых параметров выбраны так, что  $\alpha = 9, \beta = 1.586, \mu = 1.25, \nu = 0.1$ .



**Рис. 1.** Изменение максимальных значений колебаний  $x_3(t)$  в зависимости от параметра связи при  $\rho = 0.01$  (a) и  $\rho = 0.000001$  (b).

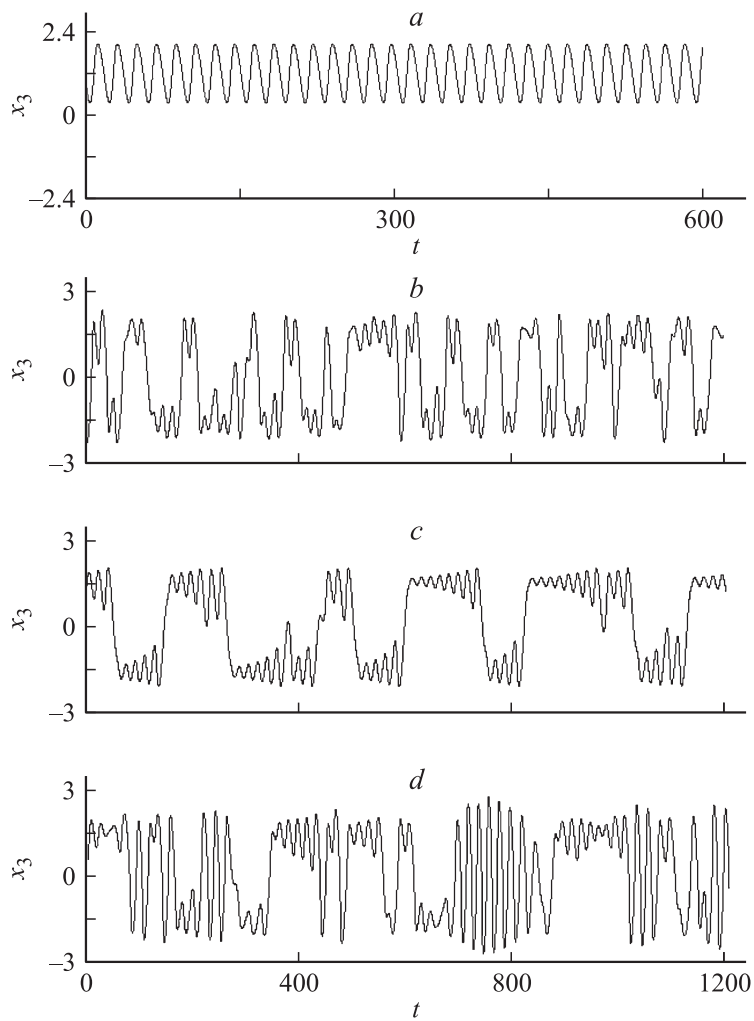
На рис. 1, *a, b* приведены бифуркационные диаграммы, иллюстрирующие изменение максимальных значений колебательного процесса в третьей подсистеме в зависимости от параметра связи. Рис. 1, *a* рассчитан при  $\rho = 0.01$ , когда автономно в каждом генераторе возбуждаются регулярные колебания в одном (в „положительном“) бассейне притяжения, а рис. 1, *b* — при  $\rho = 0.000001$ , когда автономные колебания в парциальных генераторах отображают хаос с переключением движений.

Как видно (рис. 1, *a*), при регулярных автономных колебаниях парциальных подсистем (при  $\rho = 0.01$ ) в третьем генераторе по мере увеличения коэффициента связи происходит переход от регулярных движений к хаосу. Лишь при  $\gamma < 0.1$  максимальные значения колебательного процесса  $x_3(t)$  отображаются линией, свидетельствующей о регулярности колебательного процесса, возбуждающегося в „положительном“ бассейне притяжения. При достижении параметром связи значения  $\gamma \approx 0.12$  совершается бифуркация перехода хаотизированных колебаний в „отрицательный“ бассейн притяжения, в котором осуществляется дехаотизация движений (в интервале  $\gamma \in [0.2, 0.24]$ ), а затем (при  $\gamma \approx 0.3$ ) снова, после хаотизации, — переход в „положительный“ бассейн притяжения. При  $\gamma > 0.32$  устанавливается хаотический режим работы с переключением движений между двумя бассейнами притяжения.

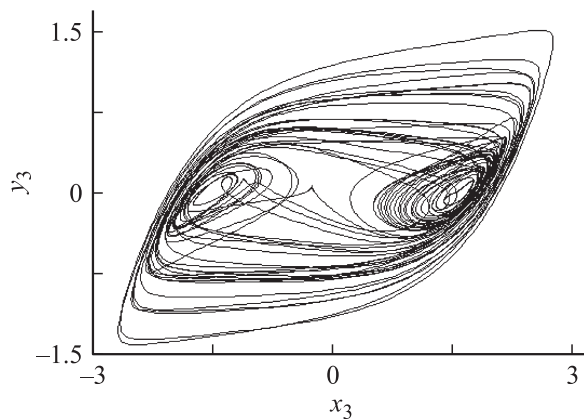
При хаотическом режиме автономных колебаний (при  $\rho = 0.000001$ ) в системе идентичных, однонаправленно связанных генераторов бифуркационная диаграмма (рис. 1, *b*) показывает, что нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса, имеет место во всем интервале изменения параметра связи. Нерегулярность этого разброса точек, характеризующих колебательный процесс с переключением движений, при  $\gamma > 0.6$  заметно больше, чем при  $\gamma < 0.3$ . Это свидетельствует о том, что с увеличением параметра связи хаос в третьей подсистеме становится более развитым.

Бифуркационные диаграммы, показанные на рис. 1, *a*, *b*, свидетельствуют о том, что синхронность движений в цепочке однонаправленно связанных бистабильных генераторов, описываемых уравнениями (1), (2), не реализуется. Более того, при регулярных автономных колебаниях (рис. 1, *a*) увеличение связи приводит к преобразованию квазигармонических движений в хаос. Особенность воздействия управляющих колебаний на управляемый генератор обусловлена фильтрующими свойствами колебательного контура управляемого генератора. В результате этого на нелинейный элемент, формирующий два бассейна притяжения управляемой подсистемы, воздействуют колебания, которые не имеют переключения движений.

На рис. 2, *a*, *b* приведены фрагменты реализаций колебательного процесса  $x_3(t)$ , максимальные значения которого отображаются бифуркационной диаграммой рис. 1, *a*, когда  $\gamma = 0$  (рис. 2, *a*) и  $\gamma \approx 0.6$  (рис. 2, *b*).



**Рис. 2.** Фрагменты реализаций колебательных процессов  $x_3(t)$  (*a–d*) при  $\rho = 0.01$  (*a, b*),  $\rho = 0.00001$  (*c, d*), когда  $\gamma = 0$  (*a, c*),  $\gamma = 0.600\,029$  (*b*),  $\gamma = 0.600\,254$  (*d*).



**Рис. 3.** Аттрактор, соответствующий фрагменту колебательного процесса  $x_3(t)$  при  $\rho = 0.00001$ ,  $\gamma = 0.600254$ .

Фрагмент реализации, показанный на рис. 2, *a*, иллюстрирует также регулярные колебания  $x_2(t)$  при  $\gamma = 0$  и регулярные колебания  $x_1(t)$  при всех значениях  $\gamma$ .

Из сравнения фрагментов реализаций, представленных на рис. 2, *a*, *b*, видно, что регулярные колебания, преобразуются в хаотические, причем с переключением движений между двумя бассейнами притяжения. Нетрудно видеть, что колебаниям, показанным на рис. 2, *a*, соответствует простой предельный цикл, а колебаниям, которые иллюстрируются фрагментом реализации рис. 2, *b*, — хаотический аттрактор. Численный анализ аттрактора, реализующегося при хаотических движениях, показывает, что в нем присутствуют фазовые траектории, обусловленные колебаниями, которым соответствует так называемый большой предельный цикл.

На рис. 2, *c*, *d* показаны фрагменты реализаций колебаний  $x_3(t)$ , изменение максимальных значений которых в зависимости от параметра связи иллюстрируется бифуркационной диаграммой рис. 1, *b*, когда  $\gamma = 0$  (*c*) и  $\gamma \approx 0.6$  (*d*). Фрагмент реализации, показанный на рис. 2, *c*, отображает и хаотические колебания  $x_2(t)$  при  $\gamma = 0$ , также хаотические колебания  $x_1(t)$  при всех значениях  $\gamma$ . Из сравнения фрагментов реализаций рис. 2, *c*, *d* видно, что хаотические колебания

при  $\gamma \approx 0.6$  становятся более развитыми, чем при  $\gamma = 0$ . Наряду с переключением колебаний между бассейнами притяжения возникают также интенсивные нерегулярные осцилляции, которым соответствуют траектории в окрестности большого предельного цикла. Это видно также на рис. 3, на котором показан аттрактор, соответствующий колебаниям, представленным на рис. 2, с.

Приведенные результаты численного анализа цепочки трех однонаправленно связанных бистабильных генераторов свидетельствуют о возможности формирования хаотических колебаний даже при идентичных подсистемах, когда при автономном режиме ими генерируются регулярные колебания. При хаотических колебаниях подсистем (в их автономных режимах работы) также возможно управление колебательным процессом: введение однонаправленного воздействия между асимметрично связанными управляемыми и управляющими подсистемами приводит к генерированию более развитого хаоса. В отличие от случая симметрично связанных подсистем [6], когда происходят синхронные движения, при однонаправленной связи бистабильных подсистем, являющейся асимметричной, изменение структуры колебаний управляемой подсистемы достигается в асинхронной динамике.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-02-00179-а).

## Список литературы

- [1] Безручко Б.П., Прохоров М.Д. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 12. С. 51–57.
- [2] Сколженко Л.А., Красичков Л.В. // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. В. 11. С. 71–78.
- [3] Железовский Б.Е., Кальянов Э.В. // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. В. 14. С. 18–24.
- [4] Рыскин Н.М., Титов В.Н. // ЖТФ. 2003. Т. 73. В. 9. С. 90–94.
- [5] Кальянов Э.В. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 7. С. 589–598.
- [6] Кальянов Э.В. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 3. С. 347–357.