01

Нелинейная динамика поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальных электрическом и гравитационном полях

© Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@iep.uran.ru

Поступило в Редакцию 10 мая 2011 г.

Исследуется развитие неустойчивости поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальных электрическом и гравитационном полях. Выявлена возможность реализации особого режима движения, для которого потенциалы скорости и электрического поля линейно связаны. Для этого режима выведено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее слабо нелинейную эволюцию границы. Это уравнение допускает построение широких классов точных решений, определяющих динамику периодических и локализованных возмущений поверхности раздела.

Поверхность раздела двух жидкостей неустойчива в поле тяжести в ситуации, когда верхняя жидкость тяжелее нижней (неустойчивость Рэлея–Тейлора). Внешнее электрическое поле, направленное по нормали к невозмущенной поверхности раздела жидкостей, также оказывает на нее дестабилизирующее влияние [1]. Начальные стадии неустойчивости можно рассматривать в рамках линейных моделей, однако их применимость будет нарушаться на развитых стадиях, для которых амплитуда волн сравнима с их длиной. Численно сильно нелинейные стадии неустойчивости границы диэлектрических жидкостей исследовались, например, в работе [2]. Определенный прогресс в аналитическом исследовании волн произвольной амплитуды был достигнут (в отсутствии поля тяжести) на основе рассмотрения особого режима движения жидкостей, для которого потенциалы скорости и электрического поля линейно связаны [3,4]. Данная работа обобщает подобный подход на ситуацию, когда одновременно учитывается дестабилизирующее влияние вертикальных электрического и гравитационного полей.

Введем декартову систему координат таким образом, чтобы ось z была направлена по нормали к невозмущенной поверхности раздела жидкостей (плоскость $z = 0$). Отклонение границы от невозмущенного состояния определяется функцией $\eta(x, y, t)$. Считаем, что меняющееся со временем внешнее электрическое поле направлено по оси z. Напряженности поля $E_{1,2}(t)$ в нижней и верхней жидкостях связаны соотношением $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$, где $\varepsilon_{1,2}$ — диэлектрические проницаемости (здесь и ниже индекс „1" относится к нижней жидкости, а индекс „2" — к верхней). Потенциалы электрического поля $\varphi_{1,2}$ удовлетворяют уравнениям Лапласа, $\Delta\varphi_{1,2} = 0$, которые следует решать со следующими условиями на поверхности раздела:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \partial_n \varphi_1 = \varepsilon_2 \partial_n \varphi_2, \quad z = \eta(x, y, t), \tag{1}$$

где ∂_n — производная в направлении нормали к границе. Будем полагать жидкости несжимаемыми, а их течение — потенциальным. Тогда потенциалы скорости жидкостей, как и потенциалы поля, удовлетворяют уравнениям Лапласа, $\Delta\Phi_{1,2} = 0$. На поверхности $z = \eta(x, y, t)$ выполняется так называемое динамическое граничное условие:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{(\nabla\Phi_1)^2}{2} \right) - \rho_2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{(\nabla\Phi_2)^2}{2} \right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2} \left(E_1 E_2 - \big(\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2\big) \right) + (\rho_2 - \rho_1) g \eta, \tag{2}$$

где g — ускорение сводного падения, ε_0 — электрическая постоянная, а $\rho_{1,2}$ — плотности жидкостей ($\rho_2 > \rho_1$). Выражение (2) представляет собой нестационарное уравнение Бернулли, правая часть которого содержит члены, ответственные за электростатическое и гидростатическое давления. Эволюция поверхности раздела определяется кинематическим граничным условием, т. е. условием того, что скорость границы совпадает с нормальными скоростями обеих жидкостей ($\nabla_\perp$ — двумерный градиент в плоскости $\{x, y\}$):

$$\eta_t [1 + (\nabla_\perp \eta)^2]^{-1/2} = \partial_n \Phi_1 = \partial_n \Phi_2, \quad z = \eta(x, y, t). \tag{3}$$

Уравнения движения замыкаются условиями того, что жидкости неподвижны, а электрическое поле однородно на значительном удалении от поверхности раздела:

$$\Phi_{1,2} \to 0, \quad \varphi_{1,2} \to -E_{1,2}(t) z, \quad z \to \mp\infty. \tag{4}$$

Перейдем к безразмерным обозначениям при помощи замен

$$\Phi_{1,2} \to \Phi_{1,2}\sqrt{\frac{g}{k^3}}, \quad \varphi_{1,2} \to \varphi_{1,2}\sqrt{\frac{\rho_1 g}{\varepsilon_0\varepsilon_1 k^3}}, \quad E_{1,2}(t) \to E_{1,2}(t)\sqrt{\frac{\rho_1 g}{\varepsilon_0\varepsilon_1 k^3}},$$

$$\eta \to \eta/k, \quad x \to x/k, \quad y \to y/k, \quad z \to z/k, \quad t \to t/\sqrt{gk},$$

где k — характерное волновое число для возмущений поверхности раздела. Рассмотрим возможность реализации особого режима движения жидкостей, для которого гармонические потенциалы скорости и электрического поля связаны линейными соотношениями:

$$\varphi_1(x,y,z,t) = -\Phi_1(x,y,z,t) - E_1(t)z,$$

$$\varepsilon_2\varphi_2(x,y,z,t) = -\varepsilon_1\Phi_2(x,y,z,t) - \varepsilon_2 E_2(t)z. \tag{5}$$

Эти выражения, очевидно, согласуются с уравнениями Лапласа для потенциалов, а также с условиями (1) и (4). Подстановка (5) в граничные условия (2) и (3) в общем случае приводит к переопределенной системе уравнений. Тем не менее уравнения оказываются совместными при условии, что отношение плотностей жидкостей обратно пропорционально отношению их проницаемостей, а напряженность электрического поля линейно нарастает со временем

$$\varepsilon_1\rho_1 = \varepsilon_2\rho_2, \quad E_1(t) = E_0 + g(t - t_0),$$

где $E_0 \equiv E_1(t_0) > 0$. Отметим, что последнее условие совпадает с условием разрешимости уравнений движений заряженной поверхности жидкого гелия в поле тяжести [5].

Соответствующие условию (5) уравнения могут быть приведены к автономному виду посредством введения вспомогательных потенциалов $\phi_{1,2}$ и нового времени τ:

$$\phi_{1,2} = -\Phi_{1,2}/E_1(t), \quad \tau_t = \tau_0 + E_0(t - t_0) + g(t - t_0)^2/2.$$

В итоге получаем следующую систему уравнений движения жидкостей:

$$\Delta\phi_{1,2} = 0, \tag{6}$$

$$-\eta_\tau[1 + (\nabla_{\perp\eta})^2]^{-1/2} = \partial_n\phi_1 = \partial_n\phi_2, \quad \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2 = (\rho_1 - \rho_2)\eta,$$

$$z = \eta(x,y,\tau), \tag{7}$$

$$\phi_{1,2} \to 0, \quad z \to \mp\infty. \tag{8}$$

Эти уравнения значительно проще исходных, так что редукцию к ним можно рассматривать как существенный прогресс в анализе динамики поверхности раздела. Важно, что редукция осуществляется в трехмерной геометрии и не требует каких-либо ограничений на характерные углы наклона поверхности. В формальном пределе $\rho_2 \gg \rho_1$ данная система описывает процесс лапласовского роста (см., например, [6]).

Рассмотрим в рамках редуцированных уравнений (6)–(8) начальные стадии развития неустойчивости поверхности раздела, на которых выполняется условие малости углов наклона, $|\nabla_\perp \eta| \sim \alpha \ll 1$. Раскладывая потенциалы $\phi_{1,2}$ вблизи плоскости $z = 0$ в степенные ряды по α, а затем, используя известные решения уравнений Лапласа в полупространстве, получим из (6)–(8) следующее интегро-дифференциальное уравнение на эволюцию границы с учетом квадратично-нелинейных слагаемых:

$$\eta_\tau = \mathrm{A}\hat{k}\eta + \mathrm{A}^2\big(\hat{k}\eta\hat{k}\eta + \nabla_\perp\big(\eta\nabla_\perp\eta\big)\big) + O(\alpha^3), \tag{9}$$

где $\mathrm{A} = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_1 + \rho_2) > 0$ — число Атвуда, а $\hat{k}$ — двумерный интегральный оператор с ядром, фурье-образ которого равен модулю волнового вектора. Для плоских волн, когда $\eta = \eta(x\tau)$, оператор $\hat{k}$ выражается через оператор Гильберта: $\hat{k} = -\hat{H}\partial_x$. Уравнение (9) примет вид:

$$\eta^+_\tau = -i\mathrm{A}\eta^+_x + 2\mathrm{A}^2\hat{P}^+(\eta^+\eta^-_x)_x, \tag{10}$$

где $\eta^\pm \equiv (\eta \mp \hat{H}\eta)/2 \equiv \hat{P}^\pm\eta$ — аналитические в верхней и соответственно нижней полуплоскостях комплексной переменной x функции, $\hat{P}^\pm$ — проекторы.

Замечательной особенностью уравнения (10) является то, что в ряде ситуаций оно допускает редукцию к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Так, рассмотрим эволюцию плоской периодической волны на поверхности раздела в предположении о том, что она содержит лишь конечное число гармоник:

$$\eta^+(x, \tau) = \sum_{n=1}^{N} q_n(\tau)e^{inx}.$$

Подстановка в (10) приводит к системе ОДУ на комплексные амплитуда q_n:

$$\frac{dq_n}{d\tau} = n\mathrm{A}q_n + 2\mathrm{A}^2 n\sum_{m=1}^{N-n} m\overline{q}_m q_{n+m}, \quad n = 1, 2, \dots N.$$

Возможность редукции к ОДУ связана с тем, что нелинейное взаимодействие волн не приводит к перекачке энергии в высшие гармоники, и число гармоник сохраняется.

Другой пример редукции к системе ОДУ для уравнения (10) дается подстановкой

$$\eta^{+}(x,\tau)=\sum_{n=1}^{N}\frac{iS_n/2}{x+p_n(\tau)}, \tag{11}$$

где S_n — постоянные, а $p_n(\tau)$ — комплексные функции времени, задающие координаты особенностей (полюсов) в нижней полуплоскости комплексной переменной x (т.е. Im $p_n > 0$). Каждое слагаемое в этом ряду соответствует пространственно локализованному возмущению поверхности раздела. Их эволюция сводится к движению полюсов, описываемому ОДУ:

$$\frac{dp_n}{d\tau}=-i\mathrm{A}+i\mathrm{A}^2\sum_{n=1}^{N}\frac{\overline{S}_j}{(p_n-\overline{p}_j)^2}, \quad n=1,2,\ldots N. \tag{12}$$

Итак, в данной работе был исследован особый режим движения поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальных электрическом и гравитационном полях, при котором потенциалы скорости и электрического поля линейно связаны между собой. Данный подход позволил вдвое уменьшить количество уравнений, требующих решения. В его рамках выведено интегро-дифференциальное уравнение (9), описывающее начальные стадии развития неустойчивости. В ряде случаев это уравнение допускает редукцию к ОДУ, что дает возможность эффективно исследовать нелинейную динамику границы.

Работа выполнена в рамках программы президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики“ (проект 09-П-2-1003) при поддержке Совета по грантам при президенте РФ (МД-4049.2010.2), Фонда „Династия“ и РФФИ-Урал (10-08-96016).

Список литературы

[1] *Melcher J.R.* Field-Coupled Surface Waves. Cambridge, MA: MIT Press, 1963.
[2] *Thaokar R.M., Kumaran V.* // Phys. Fluids. 2005. V. 17. Art. N 084104.
[3] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 2002. Т. 121. В. 3. С. 624–636.
[4] *Zubarev N.M.* // Phys. Fluids. 2006. V. 18. Art. N 028103.
[5] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В., Руев Г.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. В. 7. С. 153–155.
[6] *Bensimon D., Kadanoff L.P., Liang Sh* et al. // Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. P. 977–999.