01

Использование баллистического маятника на гибком подвесе для измерения малых импульсов

© *А.В. Козырев*

Институт сильноточной электроники СО РАН, Томск
Томский государственный университет
E-mail: kozyrev@to.hcei.tsc.ru

Поступило в Редакцию 6 июля 2011 г.

Проведен анализ ряда факторов, влияющих на точность экспериментального определения малых скоростей (порядка 1 cm/s и меньше) легкой частицы (масса порядка 10 mg и меньше), подвешенной на тонкой упругой нити. Теоретически проанализировано влияние конечной массы и изгибной упругости подвеса на частоту собственных колебаний маятника. Показано, что основным фактором, влияющим на собственную частоту, является изгибная упругость нити подвеса, а влияние массы нити колебаний баллистического маятника можно свести к минимуму. Получено точное аналитическое выражение для собственной частоты реального маятника при произвольной жесткости легкого подвеса.

В ряде ситуаций есть потребность измерения малых скоростей частиц v, которые они приобретают при импульсном воздействии. В качестве примеров такого воздействия укажем на импульс отдачи при лазерной абляции вещества [1], импульсное воздействие на частицу коротким электронным или ионным пучком, электродинамическое ускорение микрочастиц в импульсном магнитном поле [2].

Обычным методом измерения малого импульса частицы mv_0 является метод баллистического маятника с частотой собственных колебаний ω_0, когда объект воздействия массы m подвешивается на нити или стержне и в эксперименте измеряется амплитуда $A_0 = v_0/\omega_0$ его отклонения в результате короткого ударного воздействия. Когда масса объекта лежит в миллиграммовом диапазоне, а скорость составляет всего несколько сантиметров в секунду, имеются определенные трудности в учете конечной массы и жесткости подвеса для расчета собственной частоты колебания маятника ω_0. В идеале массу подвеса надо сделать пренебрежимо малой по сравнению с массой маятника, но при слишком короткой длине нити увеличивается собственная частота маятника, что снижает чувствительность прибора, и возрастает влияние упругости нити подвеса на эту частоту. Поэтому в реальном эксперименте масса маятника m, его длина L и жесткость подвеса всегда подбираются исходя из компромиссных соображений.

В данной работе теоретически оценивается в приближении малого параметра степень влияния этих факторов на собственную частоту колебаний маятника.

Рассмотрим сосредоточенную массу m, прикрепленную к тонкому гибкому стержню (для стержня круглого сечения заданы длина L, радиус r, плотность материала ρ, модуль Юнга E). Стержень закреплен и заделан на одном конце и свободен на конце с прикрепленной массой. Если в задаче пренебрегается изгибной упругостью стержня, то мы будем называть его нитью. Силой трения о воздух пренебрегаем.

Уравнение изгибных колебаний растянутого весом груза упругого стержня при небольших изгибах (когда можно пренебречь вращательным движением элементов стержня) имеет известный вид [3]:

$$\begin{gathered} EI\,\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \rho S\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \\ T = \rho S g(L-x) + mg, \quad S = \pi r^2, \quad I = \int z^2 ds = \pi r^4/4. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь I — момент инерции поперечного сечения стержня. Как показывают простые оценки, технически нетрудно изготовить стержень так, чтобы его суммарная масса ρSL была много меньше массы подвешенного груза m. В этом случае сила натяжения стержня может считаться постоянной $T \approx mg$, а уравнение (1) существенно упрощается. Будем решать задачу именно в этом приближении.

Для удобства анализа уравнения удобно перейти к безразмерным переменным, когда координата y нормирована на длину стержня, а время τ на частоту колебаний математического маятника. В этом случае уравнение (1) может быть переписано в виде:

$$\begin{gathered} \varepsilon^2\,\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \mu\,\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} = 0, \\ y = \frac{x}{L}, \quad \tau = \omega_0 t = t\sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\pi r^4 E}{4mgL^2}, \quad \mu = \frac{\rho SL}{m} \ll 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь безразмерный параметр ε характеризует упругие свойства стержня при изгибе, а μ — безразмерную массу подвеса. Отметим, что если изгибной жесткостью полностью пренебречь ($\varepsilon = 0$), то получим вместо (2) волновое уравнение для колебаний гибкой массивной, однородно растянутой нити. Фазовая скорость бегущей по нити поперечной волны будет равна $c_\perp = \omega_0 L\sqrt{\mu} = \sqrt{\mu g L}$.

Для типичных параметров подвеса в экспериментах по измерению скорости [2] (кварцевая нить радиусом $r = 20\,\mu$m, длиной $L = 10$ cm, модулем Юнга $E = 56$ GPa, плотностью $\rho = 2.3\,\mathrm{g/cm^3}$) и массы груза $m = 5$ mg получаем $\varepsilon = 0.12$ и $\mu = 0.06$. Исходя из этих оценок, будем ниже полагать оба параметра μ и ε малыми по сравнению с 1.

Хотя параметр упругости ε много меньше 1, он стоит перед производной 4-го порядка, и даже при небольших изгибах стержня этим слагаемым уравнения пренебрегать нельзя. Аналогично при малости параметра μ член с производной по времени также может быть существенным, если частоты изгибных колебаний высоки по сравнению с частотой колебания математического маятника.

Уравнение (2) следует дополнить граничными условиями. На левом конце стержня ($y = 0$) это условие заделанного конца, а на правом конце ($y = 1$), где закреплена масса, равен нулю изгибный момент (инерцией груза по отношению к вращениям из-за малости размеров пренебрегаем):

$$z(0,\tau) = 0,\ \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{y=0,\tau} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{y=1,\tau} = 0. \tag{3}$$

Четвертое условие связывает равнодействующую силу (перерезывающая сила плюс проекция силы натяжения) на правом конце подвеса и ускорение прикрепленного груза:

$$\left(EI\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - mg\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)\bigg|_{x=L,t} = m\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\bigg|_{x=L,t} \to \left(\varepsilon^2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)\bigg|_{y=1,\tau} = \frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2}\bigg|_{y=1,\tau}. \tag{4}$$

Уравнение (2) с граничными условиями (3), (4) позволяет найти собственные частоты колебаний маятника, которые можно характеризовать безразмерной величиной $\Omega(\varepsilon,\mu)$ — отношением частоты реального маятника к частоте математического маятника $\omega_0 = \sqrt{g/L}$.

Будем решать уравнение (2) методом разделения переменных, представив искомую функцию в виде $z(y,\tau) = \xi(y)\vartheta(\tau)$. Обозначая константу разделения как Ω^2, получим два уравнения для временнóго $\vartheta(\tau)$ и координатного фактора $\xi(y)$:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + \Omega^2\vartheta = 0, \quad \varepsilon^2\frac{d^4\xi}{dy^4} - \frac{d^2\xi}{dy^2} + \mu\Omega^2\xi = 0. \tag{5}$$

Решение $\vartheta(\tau)$ первого уравнения (5) имеет вид обычных гармонических функций времени с частотой Ω. Решение второго уравнения (5) будем искать в виде экспоненты $\xi(y) \propto e^{\alpha y}$. Тогда имеем характеристическое уравнение для коэффициентов α, а его приближенное решение запишем, воспользовавшись малостью параметров μ и ε:

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\alpha^4 - \alpha^2 + \mu\Omega^2 = 0, \alpha^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\mu\varepsilon^2\Omega^2}}{2\varepsilon^2}, \\ \alpha_1^2 \approx \frac{1}{\varepsilon^2} \gg 1, \quad \alpha_2^2 \approx \Omega^2\mu \ll 1.\end{gathered} \tag{6}$$

При записи корней характеристического уравнения мы полагали, что дискриминант уравнения положителен и все корни действительны, так как в рассматриваемой задаче ожидаемая основная собственная частота маятника $\Omega \approx 1$. Высокочастотные моды, когда

$$\Omega > \Omega_{hf} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\mu}} \gg 1, \tag{7}$$

приводят к мнимым корням характеристического уравнения. Естественно предположить, что амплитуда столь высокочастотных мод даже при ударном воздействии на маятник сравнительно мала, и они дадут эффекты второго порядка малости по сравнению с регулярными колебаниями маятника на основной частоте $\Omega \approx 1$.

Можно записать фундаментальное решение для координатного уравнения (5) в виде:

$$\xi(y) = C_1\sinh(\alpha_1 y) + C_2\cosh(\alpha_1 y) + C_3\sinh(\alpha_2 y) + C_4\cosh(\alpha_2 y). \tag{8}$$

Подставляя (8) в три граничных условия (3), можно исключить три константы интегрирования, после чего получим решение с точностью до амплитуды:

$$\begin{aligned}\xi(y) = &\left(\sinh\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\sinh\alpha_2\right)\big(\cosh(\alpha_1 y) - \cosh(\alpha_2 y)\big) \\ &- \left(\cosh\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\cosh\alpha_2\right)\left(\sinh(\alpha_1 y) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\sinh(\alpha_2 y)\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Используя четвертое граничное условие (4), получим уравнение для определения собственных частот колебаний маятника Ω:

$$\left(-\varepsilon^2\frac{d^3\xi}{dy^3}+\frac{d\xi}{dy}\right)\Big|_{y=1}=\Omega^2\xi(1). \tag{10}$$

Проанализируем теперь возможность получения приближенного решения для собственной частоты Ω реального маятника в приближении малости массы и жесткости подвеса. Рассмотрим сначала ситуацию абсолютно гибкого подвеса (нить или цепочка), когда параметр изгибной жесткости $\varepsilon = 0$. Тогда при сравнительной малости параметра μ решение второго уравнения (5) будет давать почти линейное решение:

$$\begin{aligned}\xi(y) &= C_1\sinh(\Omega\sqrt{\mu}y)+C_2\cosh(\Omega\sqrt{\mu}y)\\ &= \big(C_1\Omega\sqrt{\mu}y+C_2\big)\big(1+O(\mu\Omega^2)\big)\to\xi(y)\approx y.\end{aligned} \tag{11}$$

Линейная функция $\xi(y)$ — это колебания математического маятника. Поэтому собственная частота колебаний, определенная из уравнения (10), при подстановке в него функции (11) $\Omega = 1$, как и должно быть.

Для дальнейшего анализа, оставаясь в рамках этой точности расчета, можно в (9) положить $\alpha_2 = 0$. Тогда вместо (9) получим форму упругого подвеса в виде функции:

$$\xi(y)\approx y+\frac{\sinh(\alpha_1(1-y))-\sinh\alpha_1}{\alpha_1\cosh\alpha_1}. \tag{12}$$

Здесь второе слагаемое в правой части обеспечивает выполнение второго условия (3) для заделанного конца подвеса, а нормировка в (12) выбрана так, чтобы выполнялось равенство $\xi(1) = 1$.

Подставляя теперь (12) в уравнение (10) и учитывая, что $\alpha_1 = \varepsilon^{-1}$, получим следующее выражение для основной частоты колебаний реального маятника ($\mu \to 0$):

$$\Omega^2=\frac{1}{1-\varepsilon\tanh(1/\varepsilon)}. \tag{13}$$

С учетом конечной массы подвеса можно получить более общее приближенное выражение для собственной частоты реального маятника при $\mu, \varepsilon \ll 1$:

$$\Omega = 1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\mu}{6}+O(\varepsilon\mu)+O(\varepsilon^2)+O(\mu\sqrt{\mu}). \tag{14}$$

Как видно, частота колебаний реального маятника будет зависеть не только от вещества и формы подвеса, но и от массы груза и подвеса.

Интересно, что использование формулы (13) в „обратном“ предельном случае, когда $\varepsilon \gg 1$, позволяет совершенно правильно оценить собственную частоту колебаний груза массы m, закрепленного на конце круглого легкого упругого стержня, в отсутствие силы тяжести. Действительно, при $g \to 0$ параметр $\varepsilon \to \infty$, и мы имеем из (13):

$$\Omega^2 = \big(1 - \varepsilon \tanh(1/\varepsilon)\big)^{-1} \xrightarrow{\varepsilon\to\infty} 3\varepsilon^2\big(1 + O(\varepsilon^{-2})\big),$$
$$\omega = \Omega\sqrt{\frac{g}{L}} \xrightarrow{g\to 0} \frac{r^2}{2L}\sqrt{\frac{3\pi E}{mL}}. \tag{15}$$

Этот факт говорит о том, что формула (13) для основной частоты колебаний реального маятника может быть справедлива для произвольного (!) параметра ε, пока можно пренебречь массой подвеса.

Критерий малости массы подвеса для случая, когда $\varepsilon > 1$, легко получить из того требования, чтобы в подвесе не возбуждались изгибные колебания с частотами, близкими к основной частоте маятника. Это требование отражено в неравенстве (7). Поэтому критерий справедливости формулы (13) для массы подвеса имеет вид:

$$\mu \ll \frac{1}{4\varepsilon^2\Omega^2} = \frac{1 - \varepsilon\tanh(1/\varepsilon)}{4\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon\gg 1} \mu \ll \frac{1}{12\varepsilon^4}. \tag{16}$$

Выполнение критерия (16) оставляет справедливыми все выкладки, сделанные после получения корней характеристического уравнения (6), а значит и выражение (13).

Таким образом, для вычисления основной частоты колебаний реального маятника на легком однородном подвесе ($\mu \ll 1$) с произвольной формой поперечного сечения надо сначала оценить величину параметра ε. Если масса подвеса удовлетворяет критерию (16), то основную частоту маятника ω можно найти по формуле

$$\omega^2 \approx \frac{g}{L}\frac{1 + \mu/3}{1 - \varepsilon\tanh(1/\varepsilon)}, \quad \varepsilon = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\pi I_p E}{mg}}, \quad \mu = \frac{m_p}{m} \ll 1, \tag{17}$$

где m_p и I_p — масса подвеса и момент инерции его поперечного сечения. Замечательно, что никаких ограничений на величину параметра ε

в формуле (17) не накладывается! В этом случае высокочастотные колебания груза практически будут отсутствовать, так как корни характеристического уравнения (6) действительны, форма натянутого подвеса имеет вид монотонной зависимости (9) от координаты $z(x)$, а уравнение (10) дает единственное решение для собственной частоты маятника.

Если же критерий (16) не выполняется или μ сравним с 1, то в подвесе могут возбуждаться изгибные колебания и волны с несоизмеримыми частотами, а спектр колебаний груза также будет содержать высокочастотные гармоники. Маятник в этом режиме совершает нерегулярные колебания, что не позволяет использовать его для диагностики малых импульсов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований; проекты 10-08-00668-а и 10-08-00916-а.

Список литературы

[1] *Gonzales D.A., Baker R.P.* // Proc. SPIE. 2002. V. 4760. P. 752–765.
[2] *Дядин В.И., Козырев А.В., Кожевников В.Ю., Сочугов Н.С.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. В. 3. С. 1-6.
[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1987, § 25.