

09

Восстановление архитектуры связей в ансамбле связанных систем с запаздыванием

© *И.В. Сысоев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 12 марта 2012 г.

Предложен метод восстановления архитектуры и величины связей в ансамбле взаимодействующих систем с запаздыванием с произвольным числом связей между элементами ансамбля. Метод основан на реконструкции модельных уравнений элементов ансамбля и диагностике значимости связей с помощью последовательного пробного исключения или добавления коэффициентов связи в модель.

Проведение сложных систем различной природы, состоящих из нескольких взаимодействующих между собой элементов, зависит не только от свойств самих элементов, но и от характера связей между ними. Например, структура и интенсивность связей в ансамбле колебательных систем определяет возможность их синхронизации и образования различных пространственно-временных структур [1–4]. В последние годы большое внимание привлекает задача выявления наличия, структуры и характеристики связей в ансамблях многоэлементных систем по временным рядам [5–7], для решения которой используются методы, основанные на моделировании фазовой динамики. В данной работе предложен метод восстановления архитектуры и величины связей в больших ансамблях взаимодействующих систем на основе метода реконструкции

модельных уравнений элементов ансамбля. С его помощью впервые проведено восстановление априорно неизвестной архитектуры связей в большом ансамбле хаотических систем с запаздыванием со сложной структурой связей.

Рассмотрим ансамбль, состоящий из диффузионно связанных систем с запаздыванием, каждая из которых описывается уравнением следующего вида:

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i)) + \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j}(x_j(t) - x_i(t)), \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, M$, M — число элементов в ансамбле, ε_i — параметр инерционности, τ_i — время запаздывания, f_i — нелинейная функция, $k_{i,j}$ — коэффициент связи.

Для определения всех коэффициентов связи в ансамбле мы предлагаем метод, основанный на реконструкции модельного уравнения (1) для каждого элемента по временным рядам. Восстановим сначала времена запаздывания. Ранее нами было установлено, что во временных реализациях изолированных ($k_{j,j} = 0$) систем с задержкой вида (1) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания [8]. Определив для различных значений τ число N_i ситуаций, при которых точки хаотического временного ряда, разделенные интервалом времени τ , одновременно являются экспериментальными, и построив зависимость $N_i(\tau)$, можно найти время задержки τ_i как значение, при котором наблюдается абсолютный минимум этой зависимости [8]. Правомерность использования такого метода для восстановления τ_i в цепочке связанных систем с задержкой обоснована в [9]. Проведенные нами исследования показывают, что этот метод определения времени запаздывания остается эффективным и для ансамблей систем (1) с произвольным числом связей между элементами при условии, что взаимодействие систем не приводит к появлению большого числа дополнительных экстремумов в хаотических временных реализациях их колебаний. Это допущение остается справедливым при слабой связи ($k_{i,j} \ll x_i$) даже для глобально связанных систем (1). Отметим, что условие слабой связи и отсутствие синхронизации между элементами ансамбля является необходимым практически для всех методов выявления связей [7].

Определив τ_i , можно восстановить параметр ε_i , нелинейную функцию f_i и коэффициенты связи $k_{i,j}$ -й системы с задержкой (1), имея

временные ряды колебаний всех элементов ансамбля. Для этого мы предлагаем следующий подход. Запишем уравнение (1) в виде

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j} (x_j(t) - x_i(t)) = f_i(x_i(t - \tau_i)). \quad (2)$$

Если построить зависимость левой части уравнения (2) от $x_i(t - \tau_i)$, то она воспроизведет функцию f_i . Поскольку заранее величины ε_i и $k_{i,j}$ неизвестны, будем искать их, минимизируя величину

$$L_i(\varepsilon_i, k_{i,j}) = \sum_{n=1}^{S-1} ((y_{i,n+1} - y_{i,n})^2 + (z_{i,n+1} - z_{i,n})^2), \quad (3)$$

характеризующую расстояние между точками на плоскости (y_i, z_i) , отсортированными по величине координаты y_i , где

$$y_i = x_i(t - \tau_i), \quad z_i = \varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j} (x_j(t) - x_i(t)),$$

n — номер точки, а S — число точек. При ошибочном выборе значений ε_i и $k_{i,j}$ точки на плоскости (y_i, z_i) не ложатся на одномерную кривую f_i , а значит, величина $L_i(\varepsilon_i, k_{i,j})$ будет больше, чем при истинных ε_i и $k_{i,j}$.

Для ε_i и $k_{j,j}$ мы задаем стартовые догадки и уточняем их симплекс-методом [10], минимизируя (3), минимум которой обозначим $L_{i,M}$. При $M \leq 4$ и отсутствии шума все параметры восстанавливаются с высокой точностью. Однако уже при $M > 4$ типичной является ситуация, когда метод не позволяет выявить отсутствующие связи между элементами ансамбля. Такие связи диагностируются как слабые из-за наличия опосредованных связей через другие элементы. Избавиться от незначимых связей позволяет метод последовательного пробного исключения коэффициентов $k_{j,j}$ из модели (1). Мы выдвигаем гипотезу отсутствия связи между двумя элементами, исключая соответствующий коэффициент связи $k_{i,j}$ и восстанавливаем остальные параметры модели, находя при этом минимум $L_{i,j,M-1}$ функции (3). Затем повторяем процедуру, исключая другой $k_{i,j}$ при фиксированном i , и так далее для всех $j = 1, \dots, M$ ($j \neq i$). Наконец, мы определяем, исключение

какого из $k_{i,j}$ дает $L_{i,M-1} = \min_j L_{i,j,M-1}$, и оцениваем статистическую значимость величины $L = L_{i,M-1}/L_{i,M}$, руководствуясь следующими соображениями. При больших S разности $y_{i,n+1} - y_{i,n}$ и $z_{i,n+1}$ в (3) распределены по закону, близкому к нормальному, причем $S/2$ из них можно считать независимыми, поскольку они не имеют общих координат. Кроме того, $L_{i,M}$ зависит от M параметров модели (2), что уменьшает число независимых величин в (3) до $S/2 - M$. Тогда, учитывая, что сумма квадратов K независимых нормально распределенных величин распределена по закону хи-квадрат с K степенями свободы [11], получим, что распределение величин $L_{i,M}$, полученных при разных значениях параметров и/или наличии шума, подчиняется закону хи-квадрат с $S/2 - M$ степенями свободы, а величин $L_{i,M-1}$ — закону хи-квадрат с $S/2 - M + 1$ степенями вободы.

Известно, что величина X , являющаяся отношением двух независимых случайных величин, распределенных по закону хи-квадрат со степенями свободы v и w , имеет распределение Фишера—Снедекора с функцией распределения

$$F_{v,w}(X) = B_d \left(\frac{v}{2}, \frac{w}{2} \right), \quad (4)$$

где B — неполная бета-функция, а $d = vX/(vX + w)$ [12]. Следовательно, величина L имеет функцию распределения (4) с $X = L$, $v = S/2 - M + 1$, $w = S/2 - M$. Обозначим через L_{1-p} такое значение L , при котором $F_{v,w}(L_{1-p}) = 1 - p$, где p — уровень статистической значимости. Тогда, если $L > L_{1-p}$, то на уровне значимости p можно сделать вывод о наличии связи между элементами, а значит, все $k_{i,j} \neq 0$. В противном случае мы делаем вывод об отсутствии связи между соответствующими элементами и проверяем значимость остальных связей, последовательно исключая из оставшихся связей i -го элемента по одной. Процедура повторяется, пока все связи не окажутся значимыми. Такой подход позволяет восстановить архитектуру связей, параметры всех элементов и их нелинейные функции.

Если известно, что число связей между элементами ансамбля мало, для восстановления архитектуры и величины связей предпочтительнее использовать метод последовательного пробного добавления коэффициентов $k_{i,j}$ в модель (1). Сначала найдем минимум $L_{i,1}$ функции (3), предположив, что в уравнении (1) отсутствуют все $k_{i,j}$ (связей нет). Затем будем вводить в (1) по одному $k_{i,j}$, находя минимум $L_{i,j,2}$

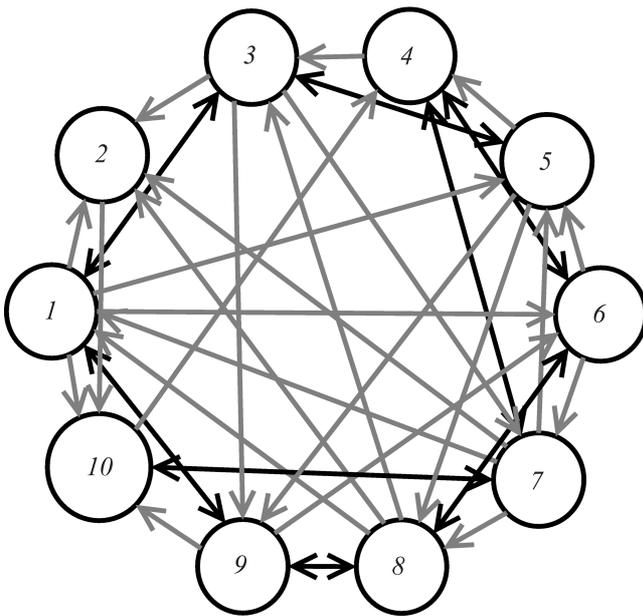


Рис. 1. Архитектура связей в ансамбле из 10 элементов. Из возможных 90 связей присутствует 40. Черным цветом показаны двусторонние связи, а серым — односторонние.

функции (3). Перебрав все $j \neq i$, найдем $L_{i,2} = \min_j L_{i,j,2}$. Если $L > L_{1-p}$, где $L = L_{i,1}/L_{i,2}$, а $F_{v,w}$ построена при $v = S/2 - 1$, $w = S/2 - 2$, то введенная связь отлична от нуля на уровне значимости p . Процедура повторяется, пока очередная добавленная в модель связь не окажется незначимой.

В качестве примера рассмотрим восстановление архитектуры связей в ансамбле связанных систем Маккея–Гласса, описываемых уравнением (1) с функцией

$$f_i(x_i(t - \tau_i)) = \frac{a_i x_i(t - \tau_i)}{b_i(1 + x_i^{10}(t - \tau_i))} \quad (5)$$

и $\varepsilon_i = 1/b_i$, на которые действует $\xi_i(t)$ — независимый нормальный шум с нулевым средним и дисперсией σ_i^2 . Параметры элементов

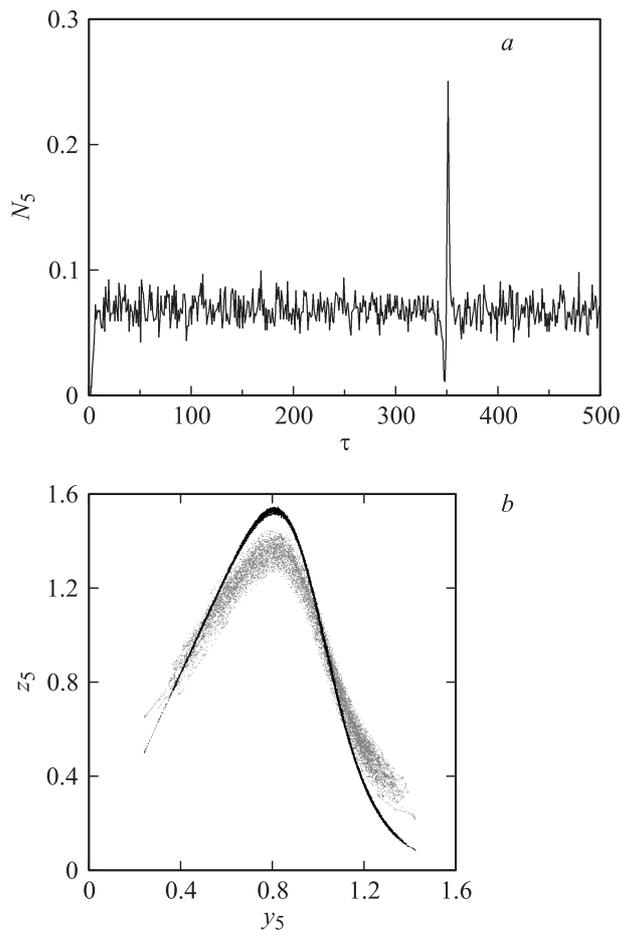


Рис. 2. *a* — число N_5 пар экстремумов временного ряда переменной $x_5(t)$ на удалении τ друг от друга, нормированное на общее число экстремумов в ряде, $N_{5\min}(\tau) = N_5(348)$; *b* — нелинейная функция f_5 , восстановленная на плоскости (y_5, z_5) , где $y_5 = x_5(t - \tau'_5)$, $z_5 = \varepsilon'_5 \dot{x}_5(t) + x_5(t) - \sum_{j=1(j \neq 5)}^{10} k'_{5,j} (x_j(t) - x_5(t))$, при полученных при реконструкции параметрах $\tau'_5 = 348$, $\varepsilon'_5 = 8.4$, $k'_{5,j} = 0$, $j = 1, \dots, 10$, $j \neq 5$ (серый цвет) и $\tau'_5 = 348$, $\varepsilon'_5 = 9.6$, $k'_{5,1} = 0.111$, $k'_{5,3} = 0.085$, $k'_{5,6} = 0.105$, $k'_{5,7} = 0.080$, $k'_{5,j} = 0$, $j = 2, 4, 5, 8, 9, 10$ (черный цвет).

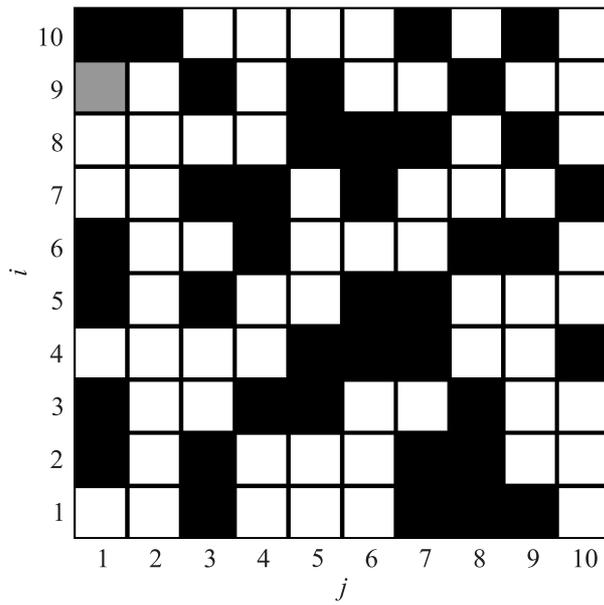


Рис. 3. Диаграмма результатов восстановления архитектуры связей в ансамбле из 10 систем Маккея–Гласса, полученная на уровне значимости $p = 0.05$ с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель. Черным цветом показаны правильно восстановленные связи, белым цветом — правильно диагностированные отсутствующие связи, серым цветом — пропущенные связи.

задавались случайно: целое $\tau_i \in [300, 400]$, $\varepsilon_i \in [8, 12]$, $a_i \in [0.2, 0.25]$, $k_{i,j} \in [0.08, 0.12]$, $\sigma_i^2 = 10^{-4}$. При этом все элементы колеблются хаотически. Их временные ряды имеют по 10 000 точек с шагом выборки 1. На рис. 1 приведена архитектура случайно выбранных связей в ансамбле из $M = 10$ элементов.

Результаты восстановления одного из элементов с параметрами $\tau_5 = 348$, $\varepsilon_5 = 9.5$, $k_{5,1} = 0.112$, $k_{5,3} = 0.085$, $k_{5,6} = 0.116$, $k_{5,7} = 0.090$, $k_{5,j} = 0$, $j = 2, 4, 5, 8, 9, 10$ иллюстрирует рис. 2. Подсчитав число N_5 одновременных обращений в нуль $\dot{x}_5(t)$ и $\dot{x}_5(t - \tau)$ для различных значений τ , перебираемых с шагом 1, построим зависимость $N_5(\tau)$ (рис. 2, а). Для оценки производной по временному ряду мы исполь-

зовали локальную параболическую аппроксимацию. Минимум $N_5(\tau)$ наблюдается при истинном времени запаздывания $\tau = \tau_5 = 348$.

На рис. 2, *b* серым цветом показана функция f_5 , полученная при восстановлении уравнения (1) в предположении, что все элементы ансамбля не связаны между собой, а черным цветом показана функция f_5 , восстановленная с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель при $p = 0.05$. Учет архитектуры связей существенно улучшает качество восстановления нелинейной функции и точность оценки параметров модели. Погрешности их восстановления вызваны преимущественно наличием шума.

Результаты восстановления архитектуры связей во всем ансамбле, полученные с помощью метода добавления связей, приведены на рис. 3. Клетка с координатами (j, i) показывает влияние j -го элемента на i -й, кроме клеток на диагонали, не несущих никакой информации. На уровне значимости $p = 0.05$ из 40 существующих связей (рис. 1) мы нашли 39. Пропущенной оказалась лишь 1 связь, ложных связей нет. Отметим, что при восстановлении архитектуры связей по тем же временным рядам с помощью метода исключения связей мы получили большое количество ложных связей при том же p . Метод исключения связей оказывается более эффективным при реконструкции ансамблей, в которых число имеющихся связей во много раз больше числа отсутствующих связей. Метод добавления связей, напротив, наиболее эффективен, когда число связей в ансамбле мало. Причем он хорошо работает даже в больших ансамблях ($M = 50$). Рассмотренный нами случай, когда число имеющихся и отсутствующих связей сопоставимо, является наиболее сложным для реконструкции. В таких ситуациях более эффективным оказывается метод добавления связей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и гранта президента РФ, МК-4435.2012.8.

Список литературы

- [1] *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shaleev V.D.* Stability, Structures, and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Singapore: World Scientific, 1995. 260 p.
- [2] *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с. (*Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 432 p.).

- [3] *Bick C., Timme M., Paulikat D. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. N 24. P. 244 101.
- [4] *Temirbayev A.A., Zhanabaev Z.Z., Tarasov S.B., Ponomarenko V.I., Rosenblum M.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. N 1. P. 015204.
- [5] *Timme M.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98. N 22. P. 224 101.
- [6] *Tokuda I.T., Jain S., Kiss I.Z., Hudson J.L.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. N 6. P. 064 101.
- [7] *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. N 4. P. 046 204.
- [8] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваев А.С., Безручко Б.П.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. В. 3. С. 515–527. (*Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Karavaev A.S., Bezruchko B.P.* // ЖЭТФ. 2005. V. 100. N 3. P. 457–467).
- [9] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. В. 19. С. 59–67. (*Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Tech. Phys. Lett. 2010. V. 36. N 10. P. 902–905).
- [10] *Nedler J.A., Mead R.* // Computer J. 1965. V. 7. N 4. P. 308–313.
- [11] *Kendall M., Stuart A.* The Advanced Theory of Statistics. New York: MacMillan, 1979. 748 p.
- [12] *Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N.* Continuous Univariate Distributions. V. 2. New York: Wiley, 1995. 752 p.