11.4

Метод обнаружения связи между осцилляторами с аналитической оценкой статистической значимости

© *Д.А. Смирнов, Е.В. Сидак, Б.П. Безручко*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: smirnovda@yandex.ru

Поступило в Редакцию 5 декабря 2012 г.

Для обнаружения связи между двумя колебательными системами по временны́м рядам предложен метод, основанный на расчете коэффициента корреляции между приращениями фаз колебаний. Найдено распределение оценки этой величины для несвязанных систем и на его основе получен критерий для вывода о наличии связи с заданной доверительной вероятностью. По сравнению с известными подходами предложенный метод проще, а область его применимости шире, так как включает в себя и осцилляторы с достаточно сильной фазовой нелинейностью. Эффективность метода иллюстрируется на эталонных системах в численном эксперименте.

Задача обнаружения связи между двумя колебательными системами по временны́м рядам — дискретной последовательности значений наблюдаемых величин — их колебаний рассматривается в радиофизике [1,2], технике передачи информации [3], биомедицинских приложениях [4–6], климатологии [7] и других областях. Для нелинейных колебательных систем наиболее чувствительными к слабой связи, а значит и эффективными на практике, оказываются подходы, основанные на введении и анализе фаз колебаний $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ [1,4,5,8,9]. Используют различные индексы фазовой синхронизации [9], среди которых наиболее известным является коэффициент фазовой когерентности ρ — амплитуда первой фурье-моды стационарного распределения разности фаз [4]: $\rho = |\langle e^{i(\phi_1(t)-\phi_2(t))}\rangle|$, где угловые скобки здесь и далее означают математическое ожидание. Величина ρ равна единице при строгой фазовой синхронизации $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ и нулю для несвязанных осцилляторов (без фазовой нелинейности) [10]. На этой основе наличие связи часто выявляют по значимо ненулевой оценке ρ, а для проверки статистической значимости используют суррогатные данные [11] или специальные аналитические формулы [12]. Однако в обоих случаях предполагают, что осцилляторы не имеют индивидуальной фазовой нелинейности, а фазовые шумы — белые, что ограничивает применимость метода на практике.

В данной работе предлагается альтернативный подход и другая характеристика связи r, представляющая собой коэффициент корреляции приращений фаз. При этом аналитически выводится закон распределения оценки этой величины для несвязанных систем с практически произвольными свойствами индивидуальной фазовой динамики, а на его основе — формула для доверительной вероятности отличия оценки r от нуля. Эффективность подхода показана на эталонных осцилляторах с различными видами связи и наличием фазовой нелинейности. Продемонстрированы условия его превосходства по чувствительности над оценкой коэффициента фазовой когерентности ρ.

Пусть имеются временны́е ряды фаз колебаний двух систем $\{\phi_1(t_1), \ldots, \phi_1(t_N)\}$ и $\{\phi_2(t_1), \ldots, \phi_2(t_N)\}$, где $t_n = n\Delta t$, Δt — интервал выборки. Способы расчета фазы [1,9] мы здесь не обсуждаем, считая, что она корректно получена для каждой из исследуемых систем, например, через введение аналитического сигнала. Эмпирическая оценка упомянутой выше величины ρ имеет вид

$$\hat{\rho} = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{i(\phi_1(t_n) - \phi_2(t_n))} \right|,$$

здесь и далее крышечка сверху означает оценку, полученную по временно́му ряду конечной длины.

Обозначим приращения фаз на интервале τ через $\Delta\phi_k(t_n) = \phi_k(t_n + \tau) - \phi_k(t_n)$, $k = 1, 2$, $n = 1, \ldots, N^* = N - \tau/\Delta t$. В качестве характеристики связи между системами будем использовать коэффициент корреляции приращений фаз

$$r = \frac{\langle (\Delta\phi_1 - w_1)(\Delta\phi_2 - w_2) \rangle}{\sigma_{\Delta\phi_1} \sigma_{\Delta\phi_2}},$$

где $w_{1,2} = \langle \Delta\phi_{1,2} \rangle$ — математические ожидания приращений фаз, а $\sigma_{\Delta\phi_1}, \sigma_{\Delta\phi_2}$ — их стандартные отклонения. Для независимых друг от друга систем $r = 0$. При наличии связи r может принимать ненулевые значения вплоть до единицы. В качестве оценки величины r

по временнóму ряду будем использовать выборочный коэффициент корреляции

$$\hat{r} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N^*}(\Delta\phi_1(t_i) - \hat{w}_1)(\Delta\phi_2(t_i) - \hat{w}_2)}{\hat{\sigma}_{\Delta\phi_1}\hat{\sigma}_{\Delta\phi_2}}, \qquad (1)$$

где $\hat{w}_1, \hat{w}_2$ — выборочные средние, $\hat{\sigma}_{\Delta\phi_1}, \hat{\sigma}_{\Delta\phi_2}$ — выборочные стандартные отклонения.

Чтобы выявить связь достоверно, нужно проверить, значимо ли отличается оценка $\hat{r}$ от нуля, для чего необходимо знать закон ее распределения при нулевой связи. Получим его следующим образом. Во-первых, при достаточно длинном ряде (т. е. $N^*\Delta t$ гораздо больше времен автокорреляции τ_{corr} процессов $\Delta\phi_1(t)$ и $\Delta\phi_2(t)$) оценка $\hat{r}$ представляет собой сумму большого числа $N^*\Delta t/\tau_{corr}$ независимых слагаемых и, согласно центральной предельной теореме, распределена приближенно по гауссовскому закону [13]. Во-вторых, выборочный момент $\hat{r}$ является асимптотически несмещенной оценкой [13,14]], так что в случае длинного ряда математическое ожидание $\hat{r}$ с высокой точностью равно r, а при нулевой связи — нулю. Дисперсия $\hat{r}$ при условии, что приращения фаз распределены по нормальному закону или близко к нему, дается формулой Бартлетта [14], которая для несвязанных осцилляторов принимает вид

$$\sigma_{\hat{r}}^2 = \frac{1}{N^*}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{\Delta\phi_1}(n\Delta t)c_{\Delta\phi_2}(n\Delta t),$$

где $c_{\Delta\phi_1}(n\Delta t), c_{\Delta\phi_2}(n\Delta t)$ — автокорреляционные функции $\Delta\phi_1(t)$ и $\Delta\phi_2(t)$. Оценку дисперсии получим через выборочные оценки $c_{\Delta\phi_1}, c_{\Delta\phi_2}$:

$$\hat{\sigma}_{\hat{r}}^2 = \frac{1}{N^*}\sum_{n=-N^*/4}^{N^*/4} \hat{c}_{\Delta\phi_1}(n\Delta t)\hat{c}_{\Delta\phi_2}(n\Delta t).$$

Таким образом, 95%-й доверительный интервал для величины r имеет вид $\hat{r} \pm 1.96\hat{\sigma}_{\hat{r}}$ и при анализе отдельного временнóго ряда вывод о наличии связи (положительный вывод) делается при $|\hat{r}| > 1.96\hat{\sigma}_{\hat{r}}$ с доверительной вероятностью 0.95 (на уровне значимости 0.05). Ниже представлен анализ работоспособности этого подхода: оценки вероятностей положительных выводов при отсутствии связи (это ложные выводы, вероятность которых должна быть не более 0.05) и при ее наличии (это правильные выводы, вероятность которых определяет чувствительность метода).

Как эталонные системы используем фазовые осцилляторы

$$d\phi_1/dt = \omega_1 + b\sin\phi_1 + k_{d,1}\sin(\phi_2 - \phi_1) + k_m \sin\phi_2 + \xi_1(t),$$
$$d\phi_2/dt = \omega_2 + b\sin\phi_2 + k_{d,2}\sin(\phi_1 - \phi_2) + k_m \sin\phi_1 + \xi_2(t), \qquad (2)$$

где ω_1 и ω_2 — угловые частоты, b — параметр фазовой нелинейности, $k_{d,1}, k_{d,2}$ — коэффициенты „разностной“ связи, k_m — коэффициент „модулирующей“ связи, фазовые шумы ξ_1 и ξ_2 независимы друг от друга и имеют автокорреляционные функции $\langle \xi_k(t)\xi_k(t')\rangle = \sigma^2_{\xi_k}\delta(t-t')$, $k = 1,\ 2$, δ — дельта-функция, $\sigma^2_{\xi_1}$ и $\sigma^2_{\xi_2}$ — интенсивности шумов (см., например, [1,2,9,10]). Рассматривалась связь только разностная ($k_m = 0$) или только модулирующая ($k_{d,1} = k_{d,2} = 0$). Разностная связь рассматривалась в форме симметричной ($k_{d,1} = k_{d,2} = k_d$) и „антисимметричной“ ($k_{d,1} = -k_{d,2} = k_d$), в обоих случаях при $b = 0$. В первом случае связь синхронизующая (в случае нулевого шума и небольшой расстройки частот режим фазовой синхронизации 1 : 1 становится устойчивым при $k_d > |\omega_1 - \omega_2|/2$), во втором — не синхронизующая. Модулирующая связь рассматривалась для „линейных“ ($b = 0$) и „нелинейных“ ($b \neq 0$) осцилляторов.

При каждом наборе параметров анализировался ансамбль из $M = 100$ пар временны́х рядов, которые получались путем интегрирования уравнений (2) методом Эйлера с шагом 0.01. Интервал выборки составлял 0.3 (20 точек на характерном периоде), длина ряда $N = 2000$ (примерно 100 характерных периодов). Результаты ниже представлены для величины τ, равной двум характерным периодам, но они схожи при любых τ, превышающих примерно четверть характерного периода. По каждой паре рядов рассчитывалась величина $\hat{r}$ и делался или не делался вывод о наличии связи по критерию $|\hat{r}| > 1.96\hat{\sigma}_{\hat{r}}$. Подсчитывалась частота (оценка вероятности) положительных выводов f, т. е. доля временны́х рядов, для которых сделан вывод о наличии связи.

На рис. 1 представлены значения f и средние по ансамблю значения $\langle\hat{\tau}\rangle$ для набора параметров $\omega_1 = 1.1$, $\omega_2 = 0.9$, $\sigma_{\xi_1} = 0.2$, $\sigma_{\xi_2} = 0.1$, т. е. для неидентичных осцилляторов с умеренным уровнем шума. Они свидетельствуют о том, что предложенный метод работает корректно, так как частота ошибочных выводов не превышает 0.05 (см. штриховые

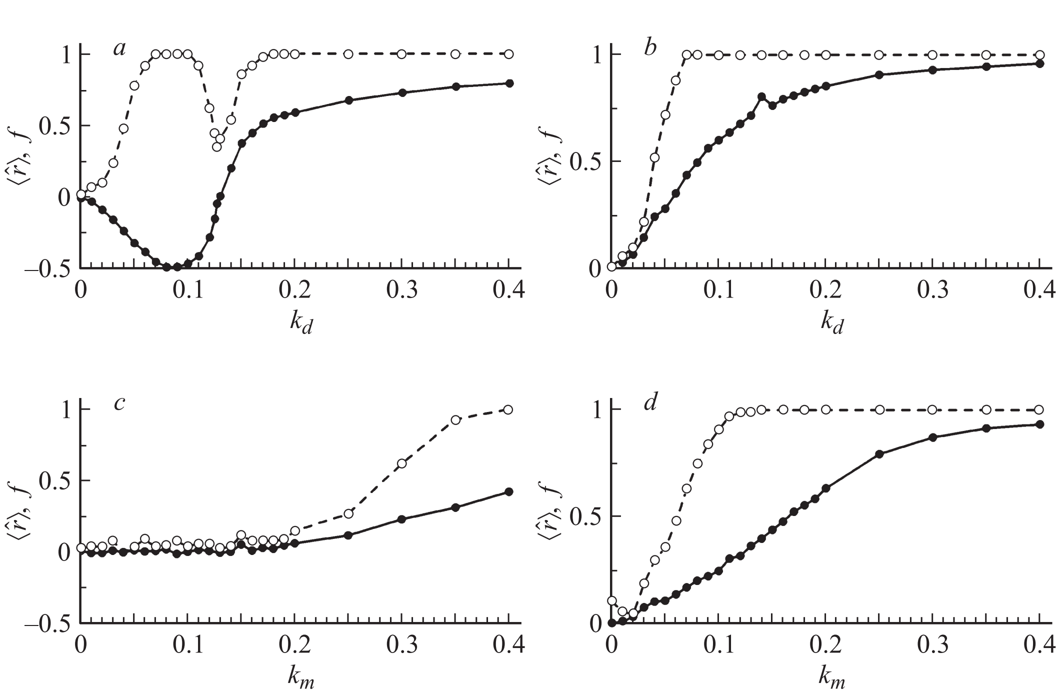

Рис. 1. Средние значения $\langle \hat{r} \rangle$ (сплошные линии) и частоты положительных выводов f (штриховые линии), рассчитанные по ансамблю из 100 временны́х рядов: a — разностная связь с $k_{d,1} = k_{d,2} = k_d$, b — разностная связь с $k_{d,1} = -k_{d,2} = k_d$, c — модулирующая связь при $b = 0$, d — модулирующая связь при $b = 0.7$.

линии при $k_d = 0$ или $k_m = 0$). Кроме того, метод весьма чувствителен к разностной синхронизующей связи: частота f велика уже при малых (по сравнению с величиной $(\omega_1 - \omega_2)/2 = 0.1$) значениях k_d и растет с ростом k_d (рис. 1, a). Еще более быстрый рост f наблюдается при разностной антисимметричной связи (рис. 1, b). К модулирующей связи чувствительность несколько ниже, но также достаточно высока (рис. 1, c, d), особенно при наличии фазовой нелинейности (рис. 1, d).

Несколько неожиданные отрицательные корреляции r и немонотонность графиков на рис. 1, a для синхронизующей разностной связи объясняется следующим образом. Заметим, что в первом и втором уравнениях системы (2) в правой части есть один и тот же член $k\sin(\phi_2 - \phi_1)$, но с разным знаком. Приращения фаз получаются интегрированием (2) на интервале τ, так что

$$\eta(t) = \int\limits_{t}^{t+\tau} k\sin\bigl(\phi_2(t') - \phi_1(t')\bigr)dt'$$

является компонентой обоих приращений фаз. При $b = 0$ имеем $\Delta\phi_1(t) = \omega_1\tau + \varepsilon_1(t) + \eta(t)$ и $\Delta\phi_2(t) = \omega_2\tau + \varepsilon_2(t) - \eta(t)$, где $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)$ — интегралы от $\xi_1(t), \xi_2(t)$, т.е. независимые гауссовские процессы с нулевым средним. При малой связи $\varepsilon_k(t)$ и $\eta(t)$ можно считать почти независимыми друг от друга. Из-за наличия общей аддитивной компоненты $\eta(t)$ с разным знаком имеем отрицательную корреляцию r (рис. 1, a, малые связи). В режиме, близком к синхронизации, нарушается независимость $\varepsilon_k(t)$ и $\eta(t)$, а приращения фаз на одном и том же интервале времени почти равны друг другу, так что величина r положительна и близка к единице (рис. 1, a, сильные связи). Поэтому r меняет знак с минуса на плюс по мере приближения к режиму синхронизации, а f имеет провал при промежуточных значениях k_d, когда график для r пересекает прямую $r = 0$.

В случае разностной антисимметричной связи общая компонента разностей фаз $\eta(t)$ входит с одним и тем же знаком и ведет к положительной корреляции и монотонному росту r и f (рис. 1, b). Аналогичный анализ для модулирующей связи показывает, что величина r чувствительна к ней при наличии фазовой нелинейности $b \neq 0$, когда есть общие члены в правых частях первого и второго уравнений системы (2). Это действительно наблюдается на рис. 1, d. Однако интересно, что метод чувствителен к модулирующей связи и в случае

$b = 0$, но только при достаточно бо́льших k_m (рис. 1, c). Аналогичный анализ показывает, что в случае однонаправленной связи все результаты схожи, но чувствительность метода несколько снижается (графики не показаны), и лишь для случая однонаправленной модулирующей связи метод вовсе не чувствителен.

На рис. 2 показано, что использование r имеет некоторые преимущества перед ρ и помимо большей простоты и универсальности при оценке значимости. А именно, величина r чувствительна к модулирующей связи (рис. 2, c, d), где ρ не чувствительна вовсе, так как распределение разности фаз остается практически равномерным с ростом интенсивности такой связи. То же самое имеет место в случае антисимметричной разностной связи (рис. 2, b). При синхронизующей разностной связи абсолютные величины r и ρ растут с ростом k примерно с одинаковой скоростью (рис. 2, a). Аналогичный анализ показывает, что лишь в случае однонаправленной синхронизующей связи бо́льшие преимущества по чувствительности имеет ρ (графики не показаны).

Подчеркнем, что вывод о наличии связи по ненулевому значению оценки ρ с заданной доверительной вероятностью возможен лишь для осцилляторов без фазовой нелинейности [10]. В противном случае требуется специальный анализ: например, ρ на рис. 2, d даже для несвязанных осцилляторов велика и значимо отлична от нуля при $b \neq 0$, но не по причине наличия связи, а из-за фазовой нелинейности, ведущей к неравномерности распределения разности фаз на отрезке от 0 до 2π. Предложенный здесь альтернативный подход работает и для нелинейных осцилляторов без каких-либо изменений.

Таким образом в работе предложен метод выявления связи между осцилляторами, который дает выводы с заданной доверительной вероятностью. Он основан на расчете корреляций между приращениями фаз колебаний. Метод прост в реализации и не требует большого объема вычислений, как известные подходы с построением суррогатных данных [11]. Метод применим в широком круге ситуаций — для различных видов связи и при наличии индивидуальной фазовой нелинейности в динамике исследуемых систем — в отличие от широко используемой оценки коэффициента фазовой когерентности [12]. Поэтому он представляется полезным новым средством для исследования связей между колебательными системами различной природы по их временны́м рядам.

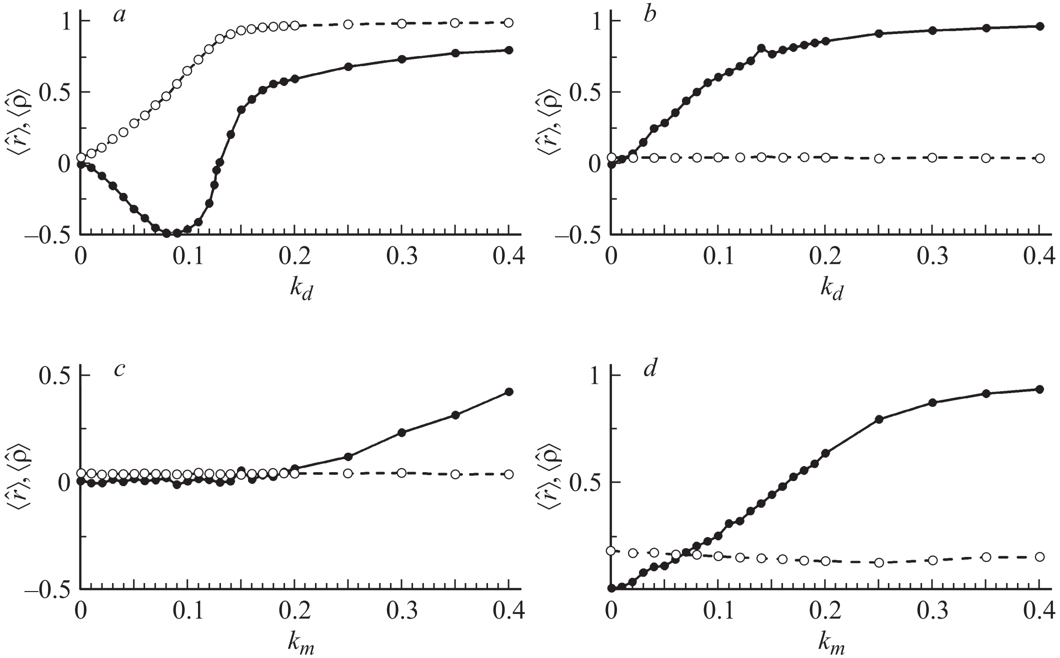

Рис. 2. Зависимость коэффициентов фазовой когерентности (штриховые линии) и корреляции приращения фаз (сплошные линии) от коэффициентов связи для: a — синхронизующей связи, b — разностной антисимметричной связи, c, d — модулирующей связи при $b = 0$ (c) и $b = 0.7$ (d).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-02-00599, 12-02-00377) и программы РАН „Фундаментальные науки — медицине".

Список литературы

[1] *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* // Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
[2] *Bezruchko B., Ponomarenko V., Rosenblum M.G., Pikovsky A.S.* // Chaos. 2003. V. 13. P. 179.
[3] *Hung Y.-C., Hu C.-K.* // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. P. 244 102.
[4] *Mormann F., Lehnertz K., David P., Elger C.E.* // Physica D. 2000. V. 144. N 3–4. P. 358–369.
[5] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P. 056 207.
[6] *Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Pavlova O.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H.* // Physiological Measurement. 2008. V. 29. P. 945.
[7] *Мохов И.И., Смирнов Д.А.* // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42. С. 650.
[8] *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
[9] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J., Schafer C., Tass P.A.* // Neuroinformatics (eds Moss F., Gielen S.), Handbook of Biological Physics. V. 4 (Elsevier Science, New York, 2000). P. 279.
[10] *Kralemann B., Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A., Mrowka R.* // Phys. Rev. E. 2008. V. 77. P. 066 205.
[11] *Смирнов Д.А., Сидак Е.В., Безручко Б.П.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16. № 2.
[12] *Schelter B., Winterhalder M., Timmer J., Peifer M.* // Phys. Lett. A. 2007. V. 366. P. 382–390.
[13] *Боровков А.А.* Математическая статистика. М.: Физматлит, 2007. 704 с.
[14] *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временны́х рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974.