

Динамика экситон-поляритонного параметрического осциллятора

© П.И. Хаджи^{1,2}, О.Ф. Васильева²

¹ Институт прикладной физики АН Молдавии,
Кишинев, Молдавия

² Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко,
Тирасполь, Молдавия

E-mail: florina_of@mail.ru

(Поступила в Редакцию 11 августа 2010 г.
В окончательной редакции 8 ноября 2010 г.)

Изучена динамика экситон-поляритонного осциллятора. Получена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая временную эволюцию плотностей поляритонов накачки и сигнальной моды. Показано, что в зависимости от параметров системы возможны периодический и аperiodический режимы эволюции, а также покой. Доказана возможность фазового управления эволюцией системы.

Смешанные экситон-фотонные состояния в плоских полупроводниковых микрорезонаторах с квантовыми ямами в активном слое представляют собой новый класс квазидвумерных квазичастиц с уникальными свойствами [1–13]. Такие состояния называют микрорезонаторными экситон-поляритонами. Они возникают благодаря сильной связи экситонов с собственными модами электромагнитного излучения микрорезонатора. В режиме сильной связи экситонная и фотонная моды расталкиваются и возникают верхняя и нижняя микрорезонаторные поляритонные моды. Фотонная компонента поляритона обуславливает его малую эффективную массу, тогда как экситонная компонента отвечает за эффективное поляритон-поляритонное взаимодействие, благодаря чему они могут рассеиваться друг на друге. Непараболичность нижней поляритонной ветви допускает возникновение параметрического процесса, в результате которого два поляритона накачки рассеиваются в сигнальную и холостую моды с сохранением энергии и импульса. Поэтому огромный интерес вызывает поляритон-поляритонное рассеяние, благодаря которому экситон-поляритонная система демонстрирует сильно нелинейные свойства [6–13]. Особенности процессов поляритон-поляритонного рассеяния, обеспечивающего параметрическое усиление и параметрические осцилляции, изучались в ряде работ. Сильные нелинейности, обнаруженные в спектрах люминесценции микрорезонаторов [14–18] при резонансном возбуждении нижней поляритонной ветви, объяснялись четырехволновым смещением или параметрическим рассеянием фотовозбужденных поляритонов накачки в сигнальную и холостую моды. Экспериментально идентифицированы два механизма нелинейности: поляритонное параметрическое рассеяние [6,19,20] и голубой сдвиг поляритонной дисперсии [2,5]. Используя метод *rip-triobe*, в [8,9] впервые наблюдали параметрическое усиление в микрорезонаторе при возбуждении нижней поляритонной ветви пикосекундным импульсом накачки под углом падения 16.5° . После возбуждения (с небольшой задержкой) нижней поляритонной ветви дополнительно слабым

пробным импульсом, падавшим нормально, обнаружилось, что этот импульс в отражении усиливался более чем в 70 раз. При этом появлялась также холостая мода под углом в 35° . Именно для этих углов выполнялись резонансные условия. Результаты экспериментов [8,9] были воспроизведены также в [21] и моделировались в [7] с использованием механизма поляритон-поляритонного рассеяния. Аналогичные процессы наблюдались в [22] при использовании двух пучков накачки под углами в $\pm 45^\circ$ и пробного пучка под углом 0° . Режим параметрического осциллятора наблюдался в [9,14] при непрерывном возбуждении нижней поляритонной ветви излучением накачки под „магическим“ углом в 16° без пробного импульса. Выше пороговой интенсивности наблюдались сильные пучки сигнальной и холостой мод под углами 0 и 35° соответственно. В [20] обнаружена сильная и необычная зависимость поляризации света, излучаемого микрорезонатором, от поляризации накачки. Эта зависимость интерпретируется с использованием псевдоспиновой модели в рамках квазиклассического формализма, где параметрическое рассеяние описывается как резонансное четырехволновое смещение. Отметим, что процесс параметрического рассеяния наблюдался как при импульсном [20,23], так и при непрерывном [14,16,24] возбуждении.

Описание поляритонных параметрических осцилляторов и усилителей представлено в ряде работ [2,5,7,8,12–14,17,18,25–28]. В [5] выведены квантовые кинетические уравнения, описывающие систему взаимодействующих поляритонов, которые затем применялись для изучения динамики поляритонных параметрических осцилляторов. В [7] в рамках трехуровневой модели изучалась динамика волны накачки, а также сигнальной и холостой мод, которые считались когерентными и макрозаполненными. В [5] это рассмотрение было расширено на случай учета флуктуаций полей. Полуклассическое рассмотрение базировалось на тех же методах, которые были использованы при исследовании явления четырехволнового смещения. Поляритон-поляритонные взаимодействия при этом рассматривались как нелиней-

ности третьего порядка в уравнениях Максвелла–Блоха. Этот метод приводит к системе уравнений, подобной полученной в [7]. Для исследования свойств поляритонного осциллятора в [1,4,5] развит гиперспиновый формализм. Введение гиперспина позволило авторам получить квазиклассическое решение уравнений и показать, что вероятность распределения компонент гиперспина подчиняется уравнению Лиувилля. Показано также, что плотности поляритонов в сигнальной и холостой модах, осциллируя, затухают во времени.

Отметим, что до сих пор отсутствуют работы, в которых были бы исчерпывающим образом представлены особенности динамики системы поляритонов в микрорезонаторе. Поэтому дальнейшие исследования в этой области являются актуальными.

Цель настоящей работы — изучить динамику экситон-поляритонов в режиме параметрического осциллятора. Мы рассматриваем ситуацию, когда поляритоны возбуждаются на нижней ветви закона дисперсии под „магическим“ углом (рис. 1). В [5] показано, что процесс параметрического рассеяния двух поляритонов накачки в сигнальную и холостую моды описывается гамильтонианом вида

$$H = \hbar\omega_p a_p^+ a_p + \hbar\omega_s a_s^+ a_s + \hbar\omega_i a_i^+ a_i + \hbar\mu(a_p a_p a_s^+ a_i^+ + a_s a_i a_p^+ a_p^+), \quad (1)$$

где ω_p , ω_s и ω_i — собственные частоты поляритонов накачки (ω_p), сигнальной (ω_s) и холостой (ω_i) мод, μ — константа параметрической поляритон-поляритонной конверсии. Используя (1), легко получить систему гайзенберговских уравнений для операторов a_p , a_s и a_i . Усредняя эту систему уравнений и используя приближение среднего поля, можно получить систему нелинейных уравнений для амплитуд поляритонов $a_p = \langle \hat{a}_p \rangle$, $a_s = \langle \hat{a}_s \rangle$ и $a_i = \langle \hat{a}_i \rangle$

$$\begin{aligned} i\dot{a}_p &= \omega_p a_p + 2\mu a_p^+ a_s a_i, \\ i\dot{a}_s &= \omega_s a_s + \mu a_i^+ a_p a_p, \\ i\dot{a}_i &= \omega_i a_i + \mu a_s^+ a_p a_p. \end{aligned} \quad (2)$$

Систему уравнений (2) следует дополнить начальными условиями, которые запишем в виде

$$\begin{aligned} a_p|_{t=0} &= a_{p0} \exp(i\varphi_{p0}), \quad a_s|_{t=0} = a_{s0} \exp(i\varphi_{s0}), \\ a_i|_{t=0} &= a_{i0} \exp(i\varphi_{i0}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $a_{p0} = \sqrt{n_{p0}}$, $a_{s0} = \sqrt{n_{s0}}$, $a_{i0} = \sqrt{n_{i0}}$.

Используя (2), легко получить новую систему нелинейных уравнений для плотностей поляритонов n_p , n_s и n_i и двух компонент „поляризации“ $Q = i(a_p a_p a_s^+ a_i^+ - a_s a_i a_p^+ a_p^+)$, $R = a_p a_p a_s^+ a_i^+ + a_s a_i a_p^+ a_p^+$, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{n}_p &= 2\mu Q, \quad \dot{n}_s = -\mu Q, \quad \dot{n}_i = -\mu Q, \\ \dot{Q} &= \Delta R + 2\mu(4n_p n_s n_i - n_p^2 n_s - n_p^2 n_i), \quad \dot{R} = -\Delta Q, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Delta = 2\omega_p - \omega_s - \omega_i$ — расстройка резонанса.

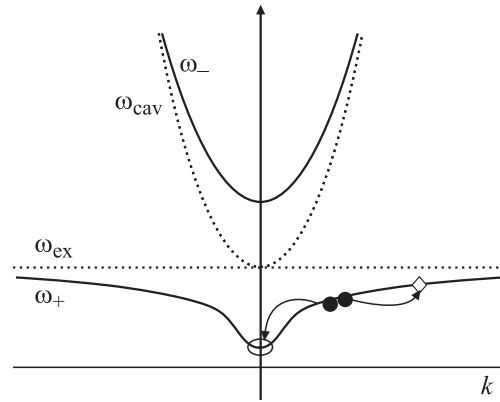


Рис. 1. Энергии поляритонов верхней и нижней ветвей (ω_{\pm}). Дисперсия микрорезонатора ω_{cav} и экситона ω_{ex} . Два поляритона накачки (темные кружки) рассеиваются в поляритоны сигнальной (светлый кружок) и холостой (ромб) мод.

Начальные условия для системы (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} n_p|_{t=0} &= n_{p0}, \quad n_s|_{t=0} = n_{s0}, \quad n_i|_{t=0} = n_{i0}, \\ Q|_{t=0} &= Q_0 = 2n_{p0} \sqrt{n_{s0} n_{i0}} \sin \theta_0, \\ R|_{t=0} &= R_0 = 2n_{p0} \sqrt{n_{s0} n_{i0}} \cos \theta_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\theta_0 = \varphi_{s0} + \varphi_{i0} - 2\varphi_{p0}$ — начальная разность фаз.

Из (3) легко получить интегралы движения

$$\begin{aligned} n_p + 2n_s &= n_{p0} + 2n_{s0}, \quad n_s - n_i = n_{s0} - n_{i0}, \\ Q^2 + R^2 &= 4n_p^2 n_i n_s, \quad R = R_0 + \frac{\Delta}{2\mu} (n_{p0} - n_p). \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) следует, что $n_i = n_s$ при $n_{i0} = n_{s0}$ в любой момент времени. Назовем этот случай вырожденным (в смысле $n_s = n_i$) и рассмотрим эволюцию плотностей поляритонов в этом случае. Далее везде считаем $n_i = n_s$. Из (6) получаем следующее выражение для Q^2

$$\begin{aligned} Q^2 &= n_p^2 (n_{p0} + 2n_{s0} - n_p)^2 \\ &\quad - \left(2n_{p0} n_{s0} \cos \theta_0 + \frac{\Delta}{2\mu} (n_{p0} - n_p) \right)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (7) следует, что нетривиальное развитие системы во времени возможно только при $n_{p0} \neq 0$ и $n_{s0} \neq 0$. Если в начальный момент времени отлична от нуля плотность только одной компоненты (n_{p0} либо n_{s0}), то нетривиальная эволюция невозможна. Это обусловлено тем, что в (1) учтены только индуцированные процессы.

Дальнейшее рассмотрение удобнее провести для нормированных величин

$$\begin{aligned} y &= n_p/n_{p0}, \quad \bar{n}_{s0} = n_{s0}/n_{p0}, \\ \alpha &= \frac{\Delta}{2\mu n_{p0}}, \quad \tau_0^{-1} = \mu n_{p0}, \quad t = \tau \tau_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда

$$Q^2 = n_{p0}^4 \left[y^2(1 + 2\bar{n}_{s0} - y)^2 - (2\bar{n}_{s0} \cos \theta_0 + \alpha(1 - y))^2 \right] \quad (9)$$

и основное уравнение эволюции можно записать в виде

$$\frac{dy}{d\tau} = \pm 2\sqrt{y^2(1 + 2\bar{n}_{s0} - y)^2 - (2\bar{n}_{s0} \cos \theta_0 + \alpha(1 - y))^2}. \quad (10)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение колебаний нелинейного осциллятора $(dy/d\tau)^2 + W(y) = 0$, где

$$W(y) = -y^2(1 + 2\bar{n}_{s0} - y)^2 + (2\bar{n}_{s0} \cos \theta_0 + \alpha(1 - y))^2 \quad (11)$$

играет роль потенциальной энергии, а $(dy/d\tau)^2$ — кинетической. Качественно поведение функции $y(\tau)$ можно установить, изучая зависимость потенциальной энергии $W(y)$ нелинейного осциллятора от y при различных значениях параметров \bar{n}_{s0} , α и θ_0 . Из (11) видно, что двукратные корни $y = 0$ и $y = 1 + 2\bar{n}_{s0}$ уравнения $W(y) = 0$ расщепляются каждый на два корня вторым слагаемым в (11). Изменение функции $y(\tau)$ возможно в той области значений y , где $W(y) \leq 0$. Из (4) и (5) можно получить начальное условие для скорости изменения этой функции. Знак производной $dy/d\tau|_{t=0}$ определяется только величиной начальной разности фаз θ_0 .

Рассмотрим сначала случай, когда начальная разность фаз $\theta_0 = \pi/2$. Решение основного уравнения (10) при этом будет зависеть от величины параметра α . Пусть расстройка резонанса Δ и вместе с нею параметр α равны нулю. Тогда для нормированной плотности поляритонов накачки получаем следующее решение:

$$y = \frac{(1 + 2\bar{n}_{s0}) \exp(\pm 2(1 + 2\bar{n}_{s0})\tau)}{2\bar{n}_{s0} + \exp(\pm 2(1 + 2\bar{n}_{s0})\tau)}. \quad (12)$$

Таким образом, видно, что при $\alpha = 0$ имеет место только апериодический режим эволюции. При этом конечный результат определяется знаком (плюс либо минус) в аргументе экспоненты (12). Решение со знаком плюс свидетельствует тому, что в начальный момент времени задано направление изменения плотности поляритонов накачки $dy/d\tau|_{t=0} > 0$. Из решения (12) следует, что это направление, определяющее увеличение плотности поляритонов накачки, сохраняется во времени, и при $\tau \gg (2\bar{n}_{s0} + 1)^{-1}$ решение асимптотически стремится к значению $y = 2\bar{n}_{s0} + 1$ (рис. 2). Это означает, что все поляритоны сигнальной и холостой мод попарно превращаются в поляритоны накачки, чем эволюция и завершается (рис. 2). Обратный процесс, т.е. распад поляритонов накачки попарно на поляритоны сигнальной и холостой мод, отсутствует в силу учета в (1) только индуцированных процессов взаимодействия между поляритонами.

Если рассматривать решение со знаком минус в (10), то в начальный момент времени плотность поляритонов

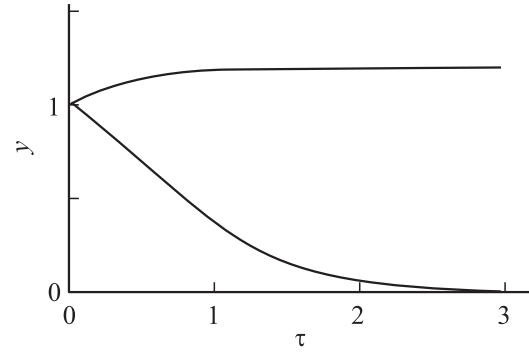


Рис. 2. Временная эволюция плотности поляритонов накачки y при $\theta_0 = \pi/2$, $\alpha = 0$ и $\bar{n}_{s0} = 0.1$.

накачки убывает: $dy/d\tau|_{t=0} < 0$. Из решения (12) следует, что уменьшение плотности поляритонов накачки имеет место в течение всего времени эволюции, и при $\tau \gg (2\bar{n}_{s0} + 1)^{-1}$ получаем $y = 0$, что означает, что все поляритоны накачки превращаются в равное количество поляритонов сигнальной и холостой мод (рис. 2). Эти особенности временной эволюции обусловлены характером стимулирования изучаемого параметрического процесса: как видно из (2) и (7), при достижении состояния с $n_p = n_{p0} + 2\bar{n}_{s0}$ и $n_p = 0$ стимулирование процесса прекращается.

Рассмотрим теперь временную эволюцию в случае $\alpha \neq 0$. Из (11) видно, что при малых значениях параметра α и фиксированном \bar{n}_{s0} уравнение $W(y) = 0$ имеет четыре действительных корня $y_1 > y_M > y_m > y_4$, причем

$$y_1 = 1 + 2\bar{n}_{s0} \left(1 + \frac{\alpha}{1 + 2\bar{n}_{s0}} \right),$$

$$y_M = 1 + 2\bar{n}_{s0} \left(1 - \frac{\alpha}{1 + 2\bar{n}_{s0}} \right),$$

$$y_m = \frac{\alpha}{1 + 2\bar{n}_{s0}}, \quad y_4 = -\frac{\alpha}{1 + 2\bar{n}_{s0}}.$$

Значения корней зависят только от величины параметров α и \bar{n}_{s0} . С ростом α корни y_1 и y_m монотонно растут, а y_M и y_4 — убывают. Решение уравнения (10) при этом имеет вид

$$y = \frac{y_m(y_M - y_4) - y_4(y_M - y_m) \operatorname{sn}^2(\sqrt{(y_1 - y_m)(y_M - y_4)} \tau \pm F(\varphi_0, k))}{y_M - y_4 - (y_M - y_m) \operatorname{sn}^2(\sqrt{(y_1 - y_m)(y_M - y_4)} \tau \pm F(\varphi_0, k))}, \quad (13)$$

где $\operatorname{sn} \varphi$ — эллиптический синус с модулем k [29,30], $F(\varphi_0, k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем k и параметром φ_0 [29, 30],

$$k^2 = \frac{(y_1 - y_4)(y_M - y_m)}{(y_1 - y_m)(y_M - y_4)},$$

$$\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(y_M - y_4)(1 - y_m)}{(y_M - y_m)(1 - y_4)}}. \quad (14)$$

Амплитуда A и период T колебаний функции $y(\tau)$ определяются выражениями

$$A = y_M - y_m, \quad T = \frac{2K(k)}{\sqrt{(y_1 - y_m)(y_M - y_4)}}, \quad (15)$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k [29,30].

Решения (12) со знаком плюс или минус в аргументе эллиптического синуса соответствуют противоположным направлениям начальной скорости изменения функции $y(\tau)$ и отличаются друг от друга постоянным сдвигом по фазе, равным $F(\varphi_0, k)$. При $\alpha = 0$ решение (13) приводится к (12).

На рис. 3, *a* представлена временная эволюция плотности поляритонов накачки при различных значениях параметра α для решения со знаком плюс. Решение со знаком минус на начальном этапе эволюции убывает по величине. Оно отличается от представленного решения со знаком плюс только постоянным сдвигом по фазе на величину $F(\varphi_0, k)$, который определяется параметром α . Плотность поляритонов накачки (а также сигнальной и холостой мод) периодически изменяется во времени. Из рис. 3, *b, c* видно, что при фиксированном значении параметра \bar{n}_{s0} амплитуда A и период T осциллиций плотности поляритонов накачки монотонно убывают с ростом параметра α , однако амплитуда (период) монотонно растет (убывает) с ростом параметра \bar{n}_{s0} при фиксированном значении параметра α . Указанное поведение амплитуды колебаний обусловлено тем, что за период наименьшая плотность колебаний поляритонов накачки $n_m = y_m n_{p0}$ медленно растет с ростом α , тогда как наибольшая $n_M = y_M n_{p0}$ — убывает.

Рассмотрим теперь эволюцию системы при начальной разности фаз $\theta_0 = 0$. Уравнение $W(y) = 0$ имеет по-прежнему четыре действительных корня, равных 1 , $2\bar{n}_{s0} + \alpha$ и $\bar{n}_{s0} + (1 - \alpha)/2 \pm \sqrt{\bar{n}_{s0}^2 + \bar{n}_{s0}(1 - \alpha) + (1 + \alpha)^2/4}$, которые упорядочим так, что $y_1 > y_M > y_m > y_4$. В зависимости от величин \bar{n}_{s0} и α эти корни могут быть различными либо попарно равными. Совпадение второго и третьего корней, т.е. y_M и y_m , приводит к остановке эволюции системы, а равенство первого (y_1) и второго (y_M) корней приводит к аperiодической эволюции. Во всех других случаях эволюция является периодической. Исследование величин корней показывает, что при $\alpha = 1 - 2\bar{n}_{s0}$ корни y_M и y_m оказываются одинаковыми, а корень y_1 равен y_M при $\alpha = 1$. При этом $y(t)$ располагается между y_m и y_M . Решение основного уравнения по-прежнему описывается выражением (12). При $\alpha = 1 - 2\bar{n}_{s0}$ решение имеет вид $y = 1$, т.е. $n_p = n_{p0} = \text{const}$ и $n_s = n_{s0} = \text{const}$. Таким образом, отсюда следует, что при отличных от нуля начальных концентрациях квазичастиц n_{p0} и n_{s0} система может находиться в покое. На рис. 4, *a* представлена временная эволюция плотности поляритонов накачки при различных значениях параметра α . Видно, что при $\alpha < 1 - 2\bar{n}_{s0}$ колебания функции $y(\tau)$ происходят ниже

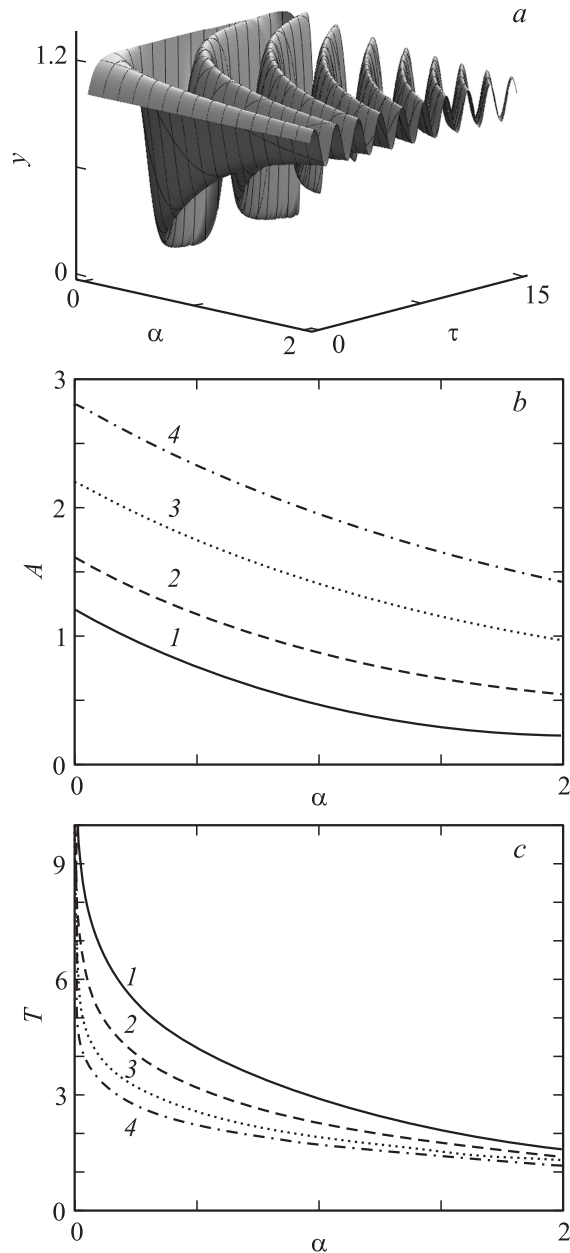


Рис. 3. Временная эволюция нормированной плотности поляритонов накачки при различных значениях параметра α и $\bar{n}_{s0} = 0.1$ (*a*) и зависимости амплитуды A (*b*) и периода T (*c*) колебаний от величины параметра α при $\theta_0 = \pi/2$ и $\bar{n}_{s0} = 0.1$ (1), 0.3 (2), 0.6 (3), 0.9 (4).

уровня $y = y_0 = 1$, а при $\alpha > 1 - 2\bar{n}_{s0}$ — выше этого уровня. В точке $\alpha = 1 - 2\bar{n}_{s0}$ колебания отсутствуют, так как их амплитуда равна нулю. На рис. 4, *b* представлена зависимость амплитуды A колебаний функции $y(\tau)$ от величины параметра α при различных значениях параметра \bar{n}_{s0} . Видно, что существуют области роста и убывания амплитуды, а также точки, где поведение амплитуды резко изменяется. Эти особенности обусловлены особенностями поведения корней y_M и y_m в зависимости от α и \bar{n}_{s0} . Видно также, что существуют такие значения

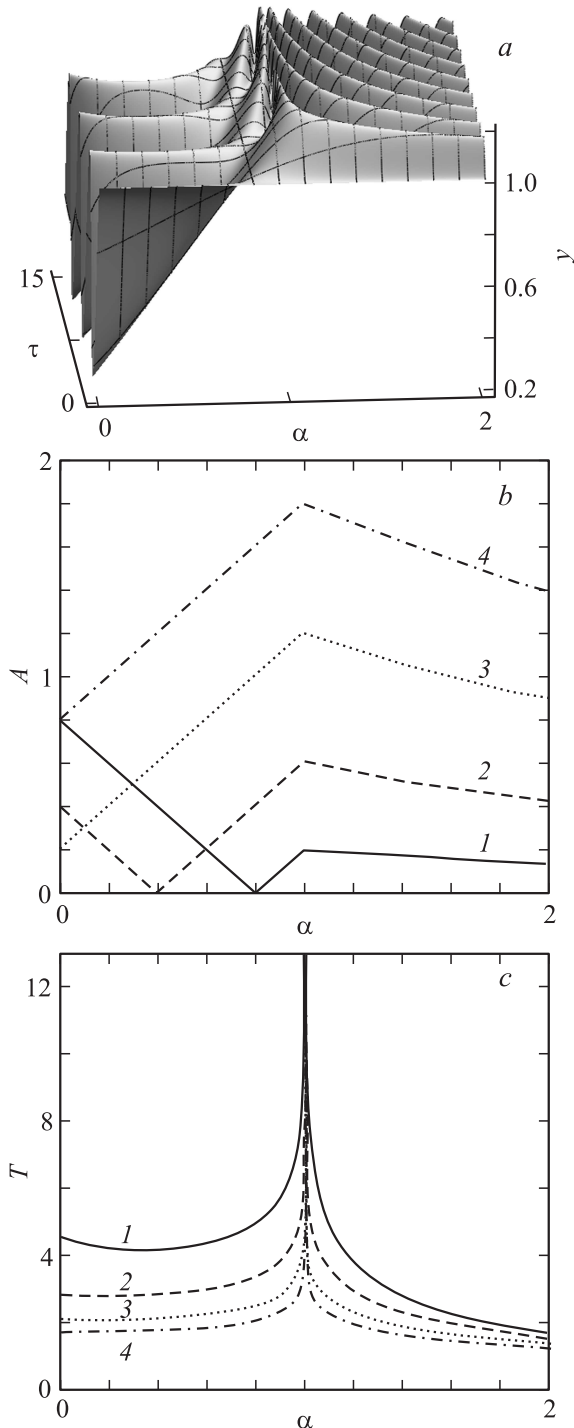


Рис. 4. То же, что на рис. 3, для $\theta_0 = 0$.

параметров α и \bar{n}_{s0} , при которых амплитуда обращается в нуль, что соответствует покою системы при отличных от нуля исходных плотностях квазичастиц.

Что касается периода колебаний T , то его поведение определяется параметрами α и \bar{n}_{s0} (рис. 4, *c*). Он непрерывно изменяется в зависимости от α . Однако при $\alpha = 1$ период расходится, что свидетельствует об аперриодичности эволюции системы. Расходимость периода при

$\alpha = 1$ обусловлена тем, что корни y_1 и y_M уравнения $W(y) = 0$ оказываются одинаковыми. Решение основного уравнения при этом имеет вид

$$y = \frac{(2\bar{n}_{s0} + 1) \operatorname{ch}^2 2\sqrt{\bar{n}_{s0}(\bar{n}_{s0} + 1)}\tau - \bar{n}_{s0}}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{\bar{n}_{s0}(\bar{n}_{s0} + 1)}\tau + \bar{n}_{s0}}. \quad (16)$$

На рис. 4, *a* это решение отображается в форме тангенсообразного горба в зависимости от τ при $\alpha = 1$. Оно соответствует тому, что плотность поляритонов накачки монотонно растет с ростом времени и асимптотически стремится снизу к значению $n_p = n_{p0}(2\bar{n}_{s0} + 1)$. Следовательно, в этом случае все поляритоны сигнальной и холостой мод попарно превращаются в поляритоны накачки, чем эволюция и завершается.

Рассмотрим теперь случай $\theta_0 = \pi$. В этом случае также существуют четыре действительных корня уравнения $W(y) = 0$, которые определяются значениями 1, $2\bar{n}_{s0} - \alpha$ и

$$y_{\pm} = \bar{n}_{s0} + (\alpha + 1)/2 \pm \sqrt{\left(\bar{n}_{s0} + \frac{\alpha + 1}{2}\right)^2 + 2\bar{n}_{s0} - \alpha}.$$

Корень $2\bar{n}_{s0} - \alpha$ пересекается с корнем y_- в точке $\alpha = 2\bar{n}_{s0}$, а также с корнем $y = 1$ в точке $\alpha = 2\bar{n}_{s0} - 1$. Корень y_- с другими корнями не пересекается. Сразу же отметим, что пересечение корня $2\bar{n}_{s0} - \alpha$ с корнем y_- приводит к возникновению аперриодической эволюции. Вне этой точки имеет место только периодическая эволюция плотности поляритонов накачки. Пересечение корня $2\bar{n}_{s0} - \alpha$ с единицей в точке $\alpha = 2\bar{n}_{s0} - 1$ приводит к обращению амплитуды периодической эволюции в нуль. Таким образом, при $\theta_0 = \pi$, как и при $\theta_0 = 0$, имеет место периодический и аперриодический режимы эволюции (рис. 5, *a*), а также обращение амплитуды периодических колебаний в нуль (рис. 5, *b*). Различие состоит в том, что при $\theta_0 = \pi$ аперриодическая эволюция возникает при разных значениях α , зависящих от \bar{n}_{s0} , а именно при $\alpha = 2\bar{n}_{s0}$, тогда как при $\theta_0 = 0$ эта бифуркация имела место только при $\alpha = 1$. Такое поведение корней приводит к сложной временной эволюции плотности поляритонов накачки, а также амплитуды и периода колебаний в зависимости от параметра α . Из рис. 5, *b* видно, что амплитуда колебаний в зависимости от α представляет собой сложную кривую, которая может обращаться как в нуль, так и в единицу. Это обусловлено поведением корней y_m и y_M в зависимости от α и \bar{n}_{s0} . Зависимости периода колебаний T от α при различных значениях \bar{n}_{s0} представлены на рис. 5, *c*. Видно, что в зависимости от величины параметра \bar{n}_{s0} период колебаний T обращается в бесконечность в точках $\alpha = 2\bar{n}_{s0}$.

Полученные результаты при $\theta_0 = 0, \pi/2$ и π свидетельствуют о возможности фазового контроля за эволюцией системы. Поэтому полезным является исследование особенностей эволюции в зависимости от начальной разности фаз. Уравнение $W(y) = 0$ в этом случае имеет

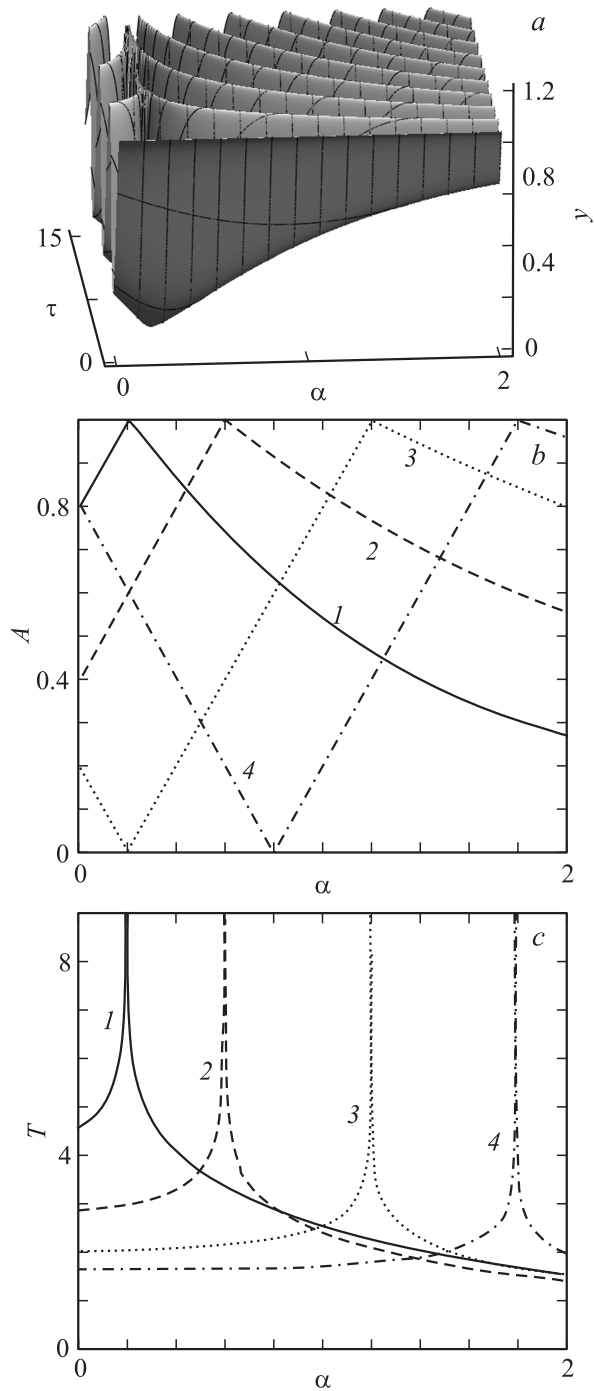


Рис. 5. То же, что на рис. 3, для $\theta_0 = \pi$.

четыре действительных корня

$$y = \bar{n}_{s0} + \frac{1 + \alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\bar{n}_{s0} + \frac{1 + \alpha}{2}\right)^2 - 2\bar{n}_{s0} \cos \theta_0 - \alpha}$$

и

$$y = \bar{n}_{s0} + \frac{1 - \alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\bar{n}_{s0} + \frac{1 - \alpha}{2}\right)^2 + 2\bar{n}_{s0} \cos \theta_0 + \alpha},$$

три из которых положительные, а один отрицательный. В зависимости от величины θ_0 корни могут быть по-

парно вырожденными. Если их расположить в порядке $y_1 > y_M > y_m > y_4$, то при изменении от нуля до 2π корни y_1 и y_M могут оказаться вырожденными в некоторых точках $\theta_0 = \theta_1$ и $\theta_0 = 2\pi - \theta_1$, корни y_m и y_4 — в точках $\theta_0 = \theta_2$ и $\theta_0 = 2\pi - \theta_2$. Равенство корней соответствует апериодической эволюции.

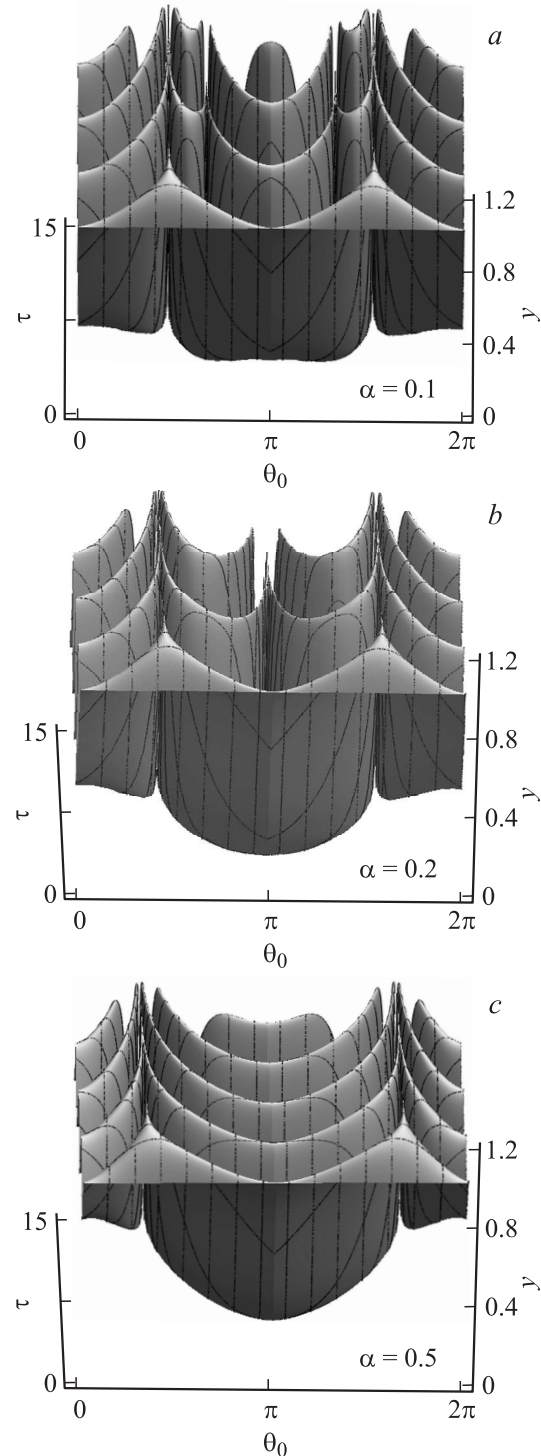


Рис. 6. Временная эволюция нормированной плотности поляритонов накачки в зависимости от начальной разности фаз θ_0 при различных значениях параметра α .

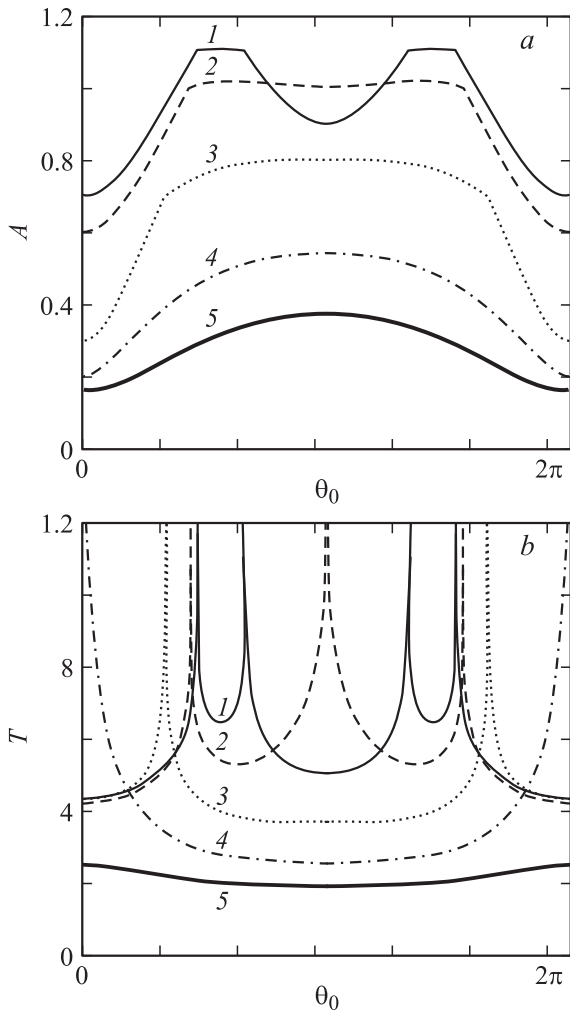


Рис. 7. Зависимость амплитуды A (a) и периода T (b) колебаний плотности поляритонов накачки от начальной разности фаз θ_0 для значений $\alpha = 0.1$ (1), 0.2 (2), 0.5 (3), 1 (4), 1.5 (5).

На рис. 6 представлены графики временной эволюции плотности поляритонов накачки при различных значениях начальной разности фаз θ_0 и параметра α . Из рис. 6 следует, что имеют место чередующиеся участки периодической эволюции системы, которые разделяются узкими горбами либо провалами аperiodической эволюции, соответствующими вырожденным корням. Число таких горбов и провалов определяется параметрами α и $\bar{n}_{s,0}$. С ростом θ_0 сначала растут амплитуда и период осцилляций плотности поляритонов накачки, пока не установится аperiodический режим эволюции при определенном значении θ_0 , где плотность поляритонов монотонно растет со временем и асимптотически устанавливается равной $2\bar{n}_{s,0} + 1$. Затем при увеличении θ_0 снова восстанавливается периодический режим эволюции, который заканчивается узким провалом. Затем снова возникает сравнительно широкий по θ_0 периодический режим эволюции, где амплитуда и период колебаний значительно больше. Таким образом, при изменении

начальной разности фаз θ_0 от нуля до 2π при $\alpha = 0.1$ имеют место четыре аperiodических режима эволюции (рис. 6, a), при $\alpha = 0.2$ — три аperiodических режима (рис. 6, b), а при $\alpha = 0.5$ — два (рис. 6, c).

На рис. 7 представлены зависимости амплитуды A и периода T колебаний плотности поляритонов накачки от θ_0 при различных значениях параметра α . Видно, что амплитуда колебаний может изменяться немонотонно в зависимости от θ_0 . Что касается периода колебаний, то существуют такие значения θ_0 , при которых он обращается в бесконечность, т.е. имеют место аperiodические режимы эволюции. Указанные особенности временной эволюции определяются зависимостью корней уравнения $W(y) = 0$ от θ_0 .

Таким образом, можно сделать вывод, что в вырожденном случае (при $n_{i,0} = n_{s,0}$) имеют место различные режимы временной эволюции плотности поляритонов в зависимости от их начальных плотностей и начальной разности фаз θ_0 : периодический и аperiodический режимы и покой. Амплитуда и период колебаний существенно определяются параметрами системы.

Список литературы

- [1] A.V. Kavokin, G. Malpuech. Thin films and nanostructures. Cavity polaritons / Eds V.M. Agranovich, D. Taylor. Elsevier, Amsterdam (2003).
- [2] H. Deng, H. Haug, Y. Yamamoto. Rev. Mod. Phys. **82**, 1489 (2010).
- [3] A. Kavokin. Appl. Phys. A **89**, 241 (2007).
- [4] M.M. Glazov, K.V. Kavokin. Phys. Rev. B **73**, 245 317 (2006).
- [5] I.A. Shelykh, R. Johne, D.D. Solnyshkov, A.V. Kavokin, N.A. Gippius, G. Malpuech. Phys. Rev. B **76**, 155 308 (2007).
- [6] D.M. Whittaker. Phys. Rev. B **63**, 193 305 (2001).
- [7] C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud, A. Quattropani. Phys. Rev. B **62**, R 4825 (2000).
- [8] P.G. Savvidis, J.J. Baumberg, R.M. Stevenson, M.S. Skolnick, D.M. Whittaker, J.S. Roberts. Phys. Rev. Lett. **84**, 1547 (2000).
- [9] J.J. Baumberg, P.G. Savvidis, R.M. Stevenson, A.I. Tartakovskii, M.S. Skolnick, D.M. Whittaker, J.S. Roberts. Phys. Rev. B **62**, R 16 247 (2000).
- [10] M.H. Szymanska, F.M. Marchetti, D. Sanvitto. Phys. Rev. Lett. **105**, 236 402 (2010).
- [11] P. Schwendimann, C. Ciuti, A. Quattropani. Phys. Rev. B **68**, 165 324 (2003).
- [12] P.G. Savvidis, J.J. Baumberg, D. Porras, D.M. Whittaker, M.S. Skolnick, J.S. Roberts. Phys. Rev. B **65**, 073 309 (2002).
- [13] I.A. Shelykh, A.V. Kavokin, G. Malpuech. Phys. Status Solidi B **242**, 2271 (2005).
- [14] R.M. Stevenson, V.N. Astratov, M.S. Skolnick, D.M. Whittaker, M. Emam-Ismael, A.I. Tartakovskii, P.G. Savvidis, J.J. Baumberg, J.S. Roberts. Phys. Rev. Lett. **85**, 3680 (2000).
- [15] A.I. Tartakovskii, D.N. Krizhanovskii, G. Malpuech, M. Emam-Ismael, A.V. Chernenko, A.V. Kavokin, V.D. Kulakovskii, M.S. Skolnick, J.S. Roberts. Phys. Rev. B **67**, 165 302 (2003).
- [16] A.I. Tartakovskii, D.N. Krizhanovskii, V.D. Kulakovskii. Phys. Rev. B **62**, R 13 298 (2000).

- [17] C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud, A. Quattropani. Phys. Rev. B **63**, 041 303(R) (2001); Semicond. Sci. Technol. **18**, S 279 (2003).
- [18] P.G. Savvidis, C. Ciuti, J.J. Baumberg, D.M. Whittaker, M.S. Skolnik, J.S. Roberts. Phys. Rev. B **64**, 075 311 (2001).
- [19] V. Savona, P. Schwendimann, A. Quattropani. Phys. Rev. B **71**, 125 315 (2005).
- [20] A. Kavokin, P.G. Lagoudakis, G. Malpuech, J.J. Baumberg. Phys. Rev. B **67**, 195 321 (2003).
- [21] M. Saba, C. Ciuti, J. Bloch, V. Thierry-Mieg, R. Adre, L.S. Dang, S. Kundermann, A. Mura, C. Bongiovanni, J.E. Stachli, B. Deveaud. Nature **414**, 731 (2001).
- [22] R. Huang, F. Tassone, Y. Yamamoto. Phys. Rev. B **61**, R 7854 (2000).
- [23] P.G. Lagoudakis, P.G. Savvidis, J.J. Baumberg, D.M. Whittaker, P.R. Eastham, M.S. Skolnick, J.S. Roberts. Phys. Rev. B **65**, 161 310(R) (2002).
- [24] A.I. Tartakovskii, D.N. Krizhanovskii, D.A. Kurysh, V.D. Kulakovskii, M.S. Skolnick, J.S. Roberts. Phys. Rev. B **65**, 081 308(R) (2002).
- [25] N.A. Gippius, S.G. Tikhodeev. J. Phys.: Cond. Matter **16**, S 3653 (2004).
- [26] V.M. Agranovich, M. Litinskaia, D.G. Lidzey. Phys. Status Solidi B **234**, 130 (2002).
- [27] C. Ciuti. Phys. Rev. B **69**, 245 304 (2004).
- [28] H. Oka, H. Ishihara. Phys. Rev. Lett. **100**, 170 505 (2008).
- [29] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИФМЛ, М. (1963).
- [30] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Наука, М. (1971).