

УДК 539.2:533.951.2

©1993

ЧАСТОТЫ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ КАНАЛОВ

Т. Васильева, Ю. Гандель, Л. Давыдова, В. Шикин

Рассчитывается спектр плазменных колебаний системы квазиодномерных электронных каналов для самого простого случая (одиночный канал), решение получено квазианалитическим методом. Численным методом решена наиболее общая задача о спектре периодической системы сдвоенных каналов. Результаты расчета используются для интерпретации имеющихся экспериментальных данных.

1. В работе [1] была сформулирована и аналитически решена в одном из практически интересных предельных случаев задача о плазменных колебаниях в системе квазиодномерных электронных каналов. В общем случае, исследование которого необходимо для интерпретации имеющихся экспериментальных данных [2], задача должна решаться с привлечением численных методов. Изложение соответствующих результатов приведено в данной работе.

Вначале исследован спектр плазменных колебаний для одиночного квазиодномерного канала в приближении, когда равновесная плотность электронов полагается постоянной. Общая процедура сведения решения интегрального уравнения к исследованию системы алгебраических уравнений обладает в данном случае хорошей численной сходимостью, так что конечные результаты можно считать квазианалитическими. Эти результаты удобно использовать затем для проверки численного решения общего уравнения для собственных плазменных частот в периодической системе сдвоенных квазиодномерных каналов.

Далее излагаются детали решения общей задачи о собственных частотах в указанной системе. Обсуждаются имеющиеся экспериментальные данные [2] в свете полученной информации о собственных плазменных частотах.

2. В случае одиночного электронного канала уравнения холодной плазмы, определяющие спектр плазменных колебаний, записываются в виде

$$\delta \dot{n}_0 + n_0 v'_x = 0, \quad (1)$$

$$-m^* \dot{v} = e \varphi'(x, t), \quad (2)$$

$$\varphi'(x, t) = 2 \frac{e}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\delta n_0(s, t) ds}{x - s}. \quad (3)$$

Здесь (1) — уравнение непрерывности в линейном приближении ($\delta n_0 \ll n_0$); δn_0 — флуктуация плотности; n_0 — равновесная плотность в

слое, которая полагается постоянной; (2) — уравнение движения, $v(x, t)$ — скорость электронов, m^* — эффективная масса электронов; (3) — уравнение Пуассона, $\varphi(x, t)$ — электропотенциал, κ — диэлектрическая постоянная окружающей среды. Полагается, что длина канала L много больше его ширины, т.е. $L \gg a$.

Система уравнений (1)–(3) дополняется граничными условиями

$$v(x, t)|_{x=\pm a} = 0. \quad (4)$$

Используя новые переменные

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \omega^2 = \lambda^{-1} \frac{2n_0 e^2}{m^* \kappa a}, \quad (5)$$

можно свести уравнения (1)–(4) к следующей задаче на собственные значения λ :

$$\varphi(\tilde{x}) = \lambda \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}(\tilde{x} - s) \varphi'(s) ds, \quad \varphi'|_{\tilde{x}=\pm 1} = 0 \quad (6)$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{x}. \quad (7)$$

Для решения уравнения (6) удобно использовать набор собственных функций Чебышева $U_n(x)$. Представим решение (6) в виде

$$\varphi'(\tilde{x}) = \sqrt{1 - \tilde{x}^2} [\varphi_0 u_0(\tilde{x}) + \varphi_2 u_2(\tilde{x}) + \varphi_4 u_4(\tilde{x}) + \dots] \quad (8)$$

Это определение удовлетворяет граничным условиям (4); φ_{2n} , $n = 0, 1, 2, \dots$ — произвольные коэффициенты. После подстановки (8) в (6) и использования свойств полиномов Чебышева [3] будем иметь вместо интегрального уравнения систему линейных уравнений относительно коэффициентов φ_{2n} . Мы решили эту систему в нулевом, первом и втором приближениях и получили хорошую численную сходимость при вычислениях максимального собственного значения λ .

Так, в нулевом приближении

$$\varphi'(\tilde{x}) = \sqrt{1 - \tilde{x}^2} \varphi_0 u_0(\tilde{x}) \quad (9)$$

и максимальное собственное значение λ , соответствующее минимальному значению ω , которое нас интересует по условиям эксперимента, равно

$$\lambda^{(0)} = \frac{1}{\pi^2} \left(2 + \frac{2}{3}\right) = 0.27019. \quad (9a)$$

В первом приближении

$$\varphi'(\tilde{x}) = \sqrt{1 - \tilde{x}^2} [\varphi_0 u_0 + \varphi_2 u_2(\tilde{x})], \quad (10)$$

$$\lambda^{(1)} = 0.27493. \quad (10a)$$

Во втором приближении

$$\varphi'(\tilde{x}) = \sqrt{1 - \tilde{x}^2} [\varphi_0 u_0 + \varphi_2 u_2(\tilde{x}) + \varphi_4 u_4(\tilde{x})], \quad (11)$$

$$\lambda^{(2)} = 0.27493. \quad (11a)$$

3. Для периодической цепочки электронных каналов уравнения плазменных колебаний усложняются. Например, в случае периодической системы одиночных каналов (рис. 1, а) имеем для канала l

$$i\omega m^* v_l = e\varphi'_l + e\varphi'_{l+1} + e\varphi'_{l-1} + \dots, \quad (12)$$

$$\varphi'_{l+1}(x) = \frac{2e}{\kappa} \int_{-a+2b}^{+a+2b} \frac{\delta n_{l+1}(s) ds}{x-s}, \quad (13)$$

$$\varphi'_{l-1}(x) = \frac{2e}{\kappa} \int_{-a-2b}^{+a-2b} \frac{\delta n_{l-1}(s) ds}{x-s}, \quad (14)$$

$\varphi'_l(x)$ из (3).

Решение этих уравнений в конечных разностях должно приводить к общему закону дисперсии, имеющему дискретные и непрерывные индексы. В данной работе мы, однако, отказываемся от исследования этой общей задачи, ограничиваясь описанием мод, возбуждение которых может быть осуществлено однородным электрическим полем, осциллирующим вдоль плоскости $z = 0$ (рис. 1, а). Специальным свойством этих мод являются дополнительные соотношения

$$\delta n_{l+1}(x+2b) = \delta n_l(x), \quad \delta n_{l-1}(x-2b) = \delta n_l(x). \quad (15)$$

Используя (15) и делая замену переменных в (13) и (14), можно получить

$$\varphi'_{l+1}(x) = \frac{2e}{\kappa} \int_{-a}^{+a} \frac{\delta n_l(s) ds}{x-s-2b}, \quad (16)$$

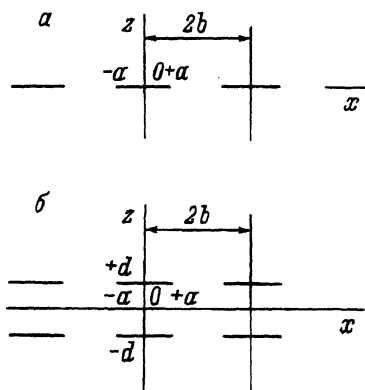


Рис. 1. Схематическое изображение квазиодномерных каналов.

a — периодическая система одиночных слоев,
 b — периодическая система сдвоенных слоев.
 $2a$ — ширина слоя,
 $2d$ — расстояние между сдвоенными слоями,
 $2b$ — расстояние между соседними слоями.

$$\varphi'_{l-1}(x) = \frac{2e}{\kappa} \int_{-a}^{+a} \frac{\delta n_l(s)}{x-s+2b} ds. \quad (17)$$

В результате система (12)–(14) сводится к задаче о плазменных колебаниях для одиночного канала с интегральным ядром специального вида

$$\varphi(\tilde{x}) = \lambda \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}(\tilde{x}-s)\varphi'(s)ds, \quad \varphi'|_{\tilde{x}=\pm 1} = 0, \quad (18)$$

$$\mathcal{L}(\tilde{x}) = \frac{1}{\tilde{x}} + \frac{1}{\tilde{x} - (2b/a)} + \frac{1}{\tilde{x} + (2b/a)}. \quad (19)$$

Последняя интересующая нас задача — колебания в периодической петчке сдвоенных каналов (рис. 1, б). Соответствующее интегральное уравнение (20) возникает при обобщении уравнений (1)–(3) из [1] на периодический случай (рис. 1, б) аналогично тому, как это было сделано выше для случая периодической системы одиночных каналов

$$\varphi_{\pm}(\tilde{x}) = \lambda_{\pm} \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_{\pm}(\tilde{x}-s)\varphi'(s)ds, \quad \varphi'|_{\tilde{x}=\pm 1} = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{x}) = & \frac{1}{\tilde{x}} \pm \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + 4(d^2/a^2)} + \frac{2\tilde{x}}{\tilde{x}^2 - 4(b^2/a^2)} \pm \\ & \pm \frac{\tilde{x} - 2(b/a)}{(\tilde{x} - 2(b/a))^2 + 4(d^2/a^2)} \pm \frac{\tilde{x} + 2(b/a)}{(\tilde{x} + 2(b/a))^2 + 4(d^2/a^2)}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\omega_{\pm}^2 = \lambda_{\pm}^{-1} \frac{2e^2 n_0}{m^* \kappa_{\pm} a}, \quad \kappa_+ = \langle \kappa \rangle, \quad \kappa_- = \kappa. \quad (22)$$

Согласно [1], в случае моды ω_- электрические поля локализованы в основном между электрическими слоями, поэтому диэлектрическая постоянная κ в (22) для этой моды имеет смысл диэлектрической постоянной между двумя электронными слоями. Что касается моды ω_+ , то величина κ_+ зависит от деталей распределения κ за пределами конденсаторов. Мы не учитываем этого фактора, предпочитая ввести добавочный свободный параметр — эффективную диэлектрическую постоянную $\langle \kappa \rangle$ — и извлечь этот параметр из экспериментальных данных для ω_{\pm} , воспользовавшись равенством

$$\frac{\omega_+^2}{\omega_-^2} = \frac{\lambda_- \kappa}{\lambda_+ \langle \kappa \rangle}. \quad (23)$$

4. Уравнение (20) является наиболее общим (формулы (18) и (6) следуют из него в качестве предельных случаев по параметрам a, b, d). Это

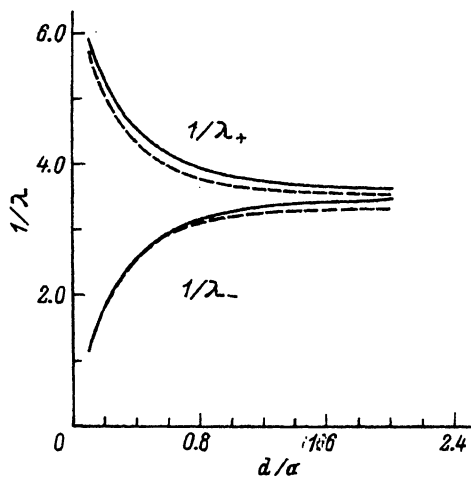


Рис. 2. Рассчитанная зависимость собственных значений λ_- и λ_+ от параметра d/a при $b/a = 2.9$ (сплошные кривые) и 2.1 (штриховые кривые).

уравнение исследовалось нами численно с использованием метода дискретных особенностей для сингулярных интегральных уравнений [4]. С этой целью уравнение (20) приводилось к виду

$$\gamma + \int_{-1}^{\xi} \varphi'(s) ds = \lambda_{\pm} \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_{\pm}(\xi - s) \varphi'(s) ds$$

на интервале $-1 < \xi < 1$ с дополнительными условиями

$$\varphi'(-1) = \varphi'(1) = 0.$$

Дискретизация задачи проводилась по методу дискретных особенностей, причем входящий в сингулярное интегральное уравнение параметр $\gamma = \varphi(-1)$ является неизвестной константой и играет ту же роль при решении полученной системы линейных алгебраических уравнений, что и регуляризирующий параметр Лифанова [4].

Результаты расчета λ_- и λ_+ в интересующей нас области значений параметров d/a и b/a представлены на рис. 2. Ширина плазменного дублета $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ сильно зависит от толщины $2d$ диэлектрика, разделяющего электронные слои. С увеличением параметра d/a ширина плазменного дублета резко уменьшается. Наличие и близость соседних каналов (характеризуемые величиной параметра b/a) не оказывают сильного влияния на частоты и ширину плазменного дублета.

Случай $b \gg a$ и $d \gg a$ соответствует одиночному каналу. Значение λ , полученное численным методом, совпадает со значением $\lambda = 0.27493$, найденным квазианалитически с привлечением набора собственных функций Чебышева (см. определение λ (11)).

Применим полученные результаты для интерпретации экспериментальных данных [2]. Согласно [2], средняя плотность электронов в двоярном канале $n_0 = 6.5 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$, эффективная масса электронов $m^* = 0.0707m_0$ (m_0 — масса электрона), $\kappa = 13$, $2b = 11 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, $2d = 1.3 \cdot 10^{-5} \text{ см}$. Частоты плазменного дублета ω_- и ω_+ равны 4 и

8 мэВ. Кроме того, известна также номинальная (геометрическая) ширина электронного канала $2a_0 = 5.5 \cdot 10^{-5}$ см. Реальная ширина канала, которая может быть только меньше этой величины, была оценена следующим образом.

В наших расчетах было выбрано значение λ_- , которое при подстановке в (22) дает точное экспериментальное значение ω_- . Это значение равно $\lambda = 0.4473$ и соответствует $2a = 4.38 \cdot 10^{-5}$ см. Полученное значение $2a$ меньше номинальной ширины канала, что указывает на разумность предложенной модели. Далее можно воспользоваться равенством (23) и оценить $\langle \kappa \rangle$. После подстановки всех величин получаем

$$\langle \kappa \rangle = 0.533\kappa.$$

Ранее мы получили в [1] приближенные оценки для $2a = 5.48 \cdot 10^{-5}$ см и $\langle \kappa \rangle = 0.65\kappa$, что в разумных пределах согласуется с найденными в данной работе результатами.

Список литературы

- [1] Шикин В., Васильева Т. // ФТТ. 1991. Т. 33. № 4. С. 1317-1319.
- [2] Demel T., Heitmann D., Crambow P., Ploog K. // Phys. Rev. B. 1988. V. 38. N 17. P. 12732-12735.
- [3] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. II. М., 1974. С. 184.
- [4] Белоцерковский С.Н., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М., 1985.

Институт физики твердого тела РАН
Черноголовка
Московская область

Поступило в Редакцию
26 марта 1993 г.
В окончательной редакции
10 июня 1993 г.