

## ГЕОМЕТРИЯ ОБРАЗЦА И ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

И. Т. Ахизер, Ю. Г. Гуревич, Н. Закиров

Институт радиофизики и электроники Академии наук Украины,  
310085, Харьков, Украина  
(Получена 12.02.1992. Принята к печати 3.11.1992)

Построена теория эффектов Холла и магнитосопротивления в слабых электрических и магнитных полях в полупроводниковых образцах конечных размеров. Предсказано существование вихревых электрических токов и магнитосопротивления в линейном по магнитному полю приближении. Получены критерии справедливости традиционной теории гальваномагнитных эффектов.

Вопрос о влиянии геометрии образца на гальваномагнитные эффекты как в слабых [ $1^{-3}$ ], так и в сильных полях [ $4^{-5}$ ] обсуждался неоднократно.

При этом в линейном по электрическому полю  $E$  приближении основное внимание уделялось магнитосопротивлению (в слабых магнитных полях  $H$  — квадратичное по  $H$  слагаемое); в сильных же электрических полях рассматривались образцы, у которых конечным являлся лишь один размер образца — в направлении холловского поля.

Между тем нетрудно понять, что в образце, все размеры которого ограничены, уже в слабых электрическом и магнитном полях не только величина эффекта Холла становится существенно иной (по сравнению с неограниченным образцом); но и в магнитосопротивлении появляются слагаемые, линейные по  $H$  (аналогично продольным термомагнитным эффектам [ $4$ ]). Кроме того, в образце должны возникнуть вихревые токи, измерение которых (методами типа ядерного магнитного резонанса) позволяет получить бесконтактным способом информацию о свойствах материала.

Очевидно, что в сильных электрических полях, когда носители тока разогреваются, при конечном расстоянии между токовыми контактами ситуация становится значительно сложнее, однако здесь мы ее рассматривать не будем.

Будем считать для определенности, что полупроводниковый образец имеет форму параллелепипеда, ограниченного плоскостями  $x = \pm a$ ,  $y = \pm c$ ,  $z = \pm b$ , причем на плоскостях  $x = \pm a$  находятся токовые контакты, а магнитное поле направлено вдоль оси  $y$ . Ясно, что в такой геометрии задача будет двумерной (все величины зависят от  $x$  и  $z$ ).

Пусть внешнее электрическое поле слабое, так что нелинейными эффектами можно пренебречь (соответствующие критерии приведены в [ $4$ ]). Тогда для электрического потенциала  $\varphi(x, z)$  имеем следующее уравнение:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (1)$$

Это уравнение должно быть дополнено граничными условиями. На плоскостях  $z = \pm b$  граничные условия очевидны (отсутствие электрического тока через боковые грани):

$$j_z|_{z=\pm b} = \sigma_{zz}E_z + \sigma_{zx}E_x|_{z=\pm b} = 0. \quad (2)$$

Здесь (считаем электронный газ невырожденным)

$$\sigma_{zz} = \frac{16\sqrt{2}\pi m^{1/2}e^2}{3(2\pi\hbar)^3 T} \int_0^\infty \nu^{-1}(\epsilon) \frac{\epsilon^{3/2}}{1 + \omega_H^2/\nu^2(\epsilon)} e^{(\mu-\epsilon)/T} d\epsilon,$$

$$\sigma_{zx} = \frac{16\sqrt{2}\pi m^{1/2}e^2}{3(2\pi\hbar)^3 T} \int_0^\infty \frac{\omega_H}{\nu^2(\epsilon)} \frac{\epsilon^{3/2}}{1 + \omega_H^2/\nu^2(\omega)} e^{(\mu-\epsilon)/T} d\epsilon \quad (3)$$

— компоненты тензора электропроводности,  $\omega_H = eH/mc$ ;  $m$ ,  $e$ ,  $\mu$  — масса, заряд электрона и химический потенциал;  $\epsilon$  — энергия электрона,  $T$  — температура,  $\nu(\epsilon) = \nu_0(\epsilon/T)^{-q}$  — частота релаксации импульса (значения  $q$  для различных механизмов можно найти в [4]),  $E_x = -\partial\varphi/\partial x$ ,  $E_z = -\partial\varphi/\partial z$ . Что касается токовых контактов, то здесь можно сформулировать граничные условия двух типов:

$$j_x|_{x=\pm a} = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xz}E_z|_{x=\pm a} = j_0, \quad (4a)$$

$$\varphi|_{x=\pm a} = \pm\Delta\varphi/2, \quad (4б)$$

где  $\sigma_{xx} = \sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xz} = -\sigma_{zx}$ ;  $\Delta\varphi$  — разность потенциалов, приложенная к образцу;  $j_0$  — заданная внешним источником плотность тока.

Граничные условия (4a) отвечают режиму тока, а (4б) — режиму поля [4]. Очевидно, что реализация граничных условий (4a) представляется весьма сомнительной, так как требует при наличии магнитного поля специального, достаточно искусственного, устройства контакта. Граничные условия (4б) более естественны, так как отвечают бесконечной проводимости в плоскостях  $x = \pm a$ . На самом деле в реальном эксперименте имеют место граничные условия, описываемые выражением (подробнее см. [4])

$$j_x|_{x=\pm a} = \mp\sigma_s^{(1,2)} [\tilde{\varphi}(x, z) - \tilde{\varphi}_{1,2}]|_{x=\pm a},$$

где  $\tilde{\varphi}(x, z)$  — электрохимический потенциал образца,  $\tilde{\varphi}_{1,2}$  — электрохимические потенциалы токоподводящих проводов,  $\sigma_s^{(1,2)}$  — поверхностная электропроводность контактов, вводимая обычно феноменологически (или восстанавливаемая из эксперимента).

Граничные условия (4a) и (4б) (с разной степенью достоверности) отвечают двум предельным случаям написанных выше граничных условий и не содержат феноменологических параметров, что позволяет представить общую картину. Кроме того, как будет показано далее, именно при малореальных граничных условиях (4a) получают общепринятые выражения для гальваномангнитных эффектов (см., например, [6]).

Полную систему граничных условий можно переписать так:

$$\sigma_{xx} \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \sigma_{xz} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{z=\pm b} = 0,$$

$$\sigma_{xx} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sigma_{xz} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{x=\pm a} = -j_0,$$

$$\varphi|_{x=\pm a} = \pm\Delta\varphi/2. \quad (5)$$

В режиме тока задача решается тривиально:

$$\varphi(x, z) = -\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xz}^2} j_0 x - \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xz}^2} j_0 z. \quad (6)$$

Из (6) следует, что для режима тока при разомкнутых холловских контактах результат не зависит от геометрии образца, а холловское поле

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xz}^2} j_0 \quad (7)$$

— однородно.

Магнитосопротивление в этом случае проявляется в изменении разности потенциалов  $V(H)$  в магнитном поле

$$V(H) = \int_{-a}^a E_x dx = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xz}^2} j_0 2a. \quad (8)$$

Важно подчеркнуть, что при  $q = 0$  [ $\nu$  ( $\epsilon$ ) не зависит от энергии] из-за отсутствия координатных зависимостей  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  (ср. со случаем безграничной среды при разомкнутых холловских контактах [6]) магнитосопротивление исчезает, а при  $q \neq 0$  и в слабых магнитных полях ( $\omega_H/\nu < 1$ ) — квадратично зависит от  $H$ .

Иначе обстоит дело в режиме поля [см. (46)]. В этом случае задача нахождения  $\varphi(x, z)$  сводится к задаче Пуанкаре (задача с косоj производной [7]), которая не имеет аналитического решения. Задача резко упрощается, если предположить, что магнитное поле слабое ( $\omega_H/\nu \ll 1$ ), и искать  $\varphi(x, z)$  методом последовательных приближений по малому параметру  $\omega_H/\nu$ .

Ограничиваясь линейным по  $H$  приближением, для  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{xz}$  из (3) найдем

$$\sigma_{xx} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2} + q\right) \frac{ne^2}{m\nu_0},$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2} + 2q\right) \frac{ne^2\omega_H}{m\nu_0^2}.$$

Тогда, решение задачи

$$\Delta\varphi = 0,$$

$$\varphi|_{x=\pm a} = \pm \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \sigma_{xx} \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \sigma_{xz} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Big|_{z=\pm b} = 0 \quad (9)$$

естественно искать в виде

$$\varphi = \varphi^{(0)}(x, z) + \varphi^{(1)}(x, z) \frac{\omega_H}{\nu_0}. \quad (10)$$

Для  $\varphi^{(0)}(x, z)$  имеем

$$\Delta\varphi^{(0)} = 0,$$

$$\varphi^{(0)}|_{x=\pm a} = \pm \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \sigma_{xx} \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial z} \Big|_{z=\pm b} = 0, \quad (11)$$

г. е. имеем задачу Неймана [7].

Ее решение находится тривиально и записывается так (естественно, в отсутствие магнитного поля  $\varphi^{(0)}(x, z)$  зависит только от  $x$ ):

$$\varphi^{(0)}(x, z) = -\frac{\Delta\varphi}{2} \frac{x}{a} \quad (12)$$

Тогда

$$E_x^{(0)} = -\partial\varphi^{(0)}/\partial x = \Delta\varphi/2a, \quad E_z^{(0)} = -\partial\varphi^{(0)}/\partial z = 0,$$

$$j_x^{(0)} = \sigma_{xx} E_x^{(0)} = \sigma_{xx} \frac{\Delta\varphi}{2a}, \quad j_z^{(0)} = 0. \quad (13)$$

Для линейной по  $H$  поправки с  $\varphi^{(0)}$  из (9) с учетом (11) и (12) получаем

$$\Delta\varphi^{(1)}(x, z) = 0,$$

$$\varphi^{(1)}(x, z)|_{x=\pm a} = 0, \quad -\sigma_{xx} \frac{\partial\varphi^{(1)}(x, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm b} = \sigma_{xz} \frac{\Delta\varphi}{2a} \frac{\nu_0}{\omega_H}, \quad (14)$$

г. е. опять имеем задачу Неймана.

Стандартным методом находится ее решение

$$\varphi^{(1)}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2} \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} \frac{\nu_0}{\omega_H} \Delta\varphi \frac{\text{sh } \alpha_n z}{\text{ch } \alpha_n b} \cos \alpha_n x, \quad (15)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2a} (2n+1).$$

Из (15) легко определяется поле Холла

$$E_z \equiv E_z^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi (2n+1)} \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} \frac{\Delta\varphi}{2a} \frac{\text{ch } \alpha_n z}{\text{ch } \alpha_n b} \cos \alpha_n x. \quad (16)$$

Если  $a \gg b$ , то всюду

$$E_z = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} \frac{\Delta\varphi}{2a}. \quad (17)$$

Такова же величина  $E_z$  и при  $b \gg a$  в области  $b - |z| < a$ . В области  $b - |z| > a$  поле Холла равно нулю.

Если говорить о разности потенциалов на холловских контактах, то при  $a \gg b$

$$V_z = \int_{-b}^b E_z dz = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} \Delta\varphi \frac{b}{a},$$

а при  $a \ll b$  (вопреки общепринятым представлениям о том, что в такой геометрии  $j_z \neq 0$ , а  $E_x = 0$ , следовательно,  $V_z = 0$ ) по крайней мере при  $x = 0$

$$V_z \ll \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} \Delta\varphi,$$

т. е. значительно больше  $V_z$  в геометрии  $a \gg b$ .

Часть поля  $E_x$ , связанная с магнитным полем, как следует из (15), принимает вид

$$E_x^{(1)} = \frac{4}{\pi} \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} \frac{\Delta\varphi}{2a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} \frac{\text{sh } \alpha_n z}{\text{ch } \alpha_n b} \sin \alpha_n x. \quad (18)$$

Если геометрия образца такова, что  $a \gg b$ , то

$$E_x^{(1)} = 2 \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} \frac{\Delta\varphi}{2a} \frac{z}{a} \sum (-1)^{n+1} \sin \alpha_n x, \quad (19)$$

т. е. появляется добавка к продольному электрическому полю, линейная по магнитному полю и распределенная по всему образцу. Из сравнения (17) и (19) следует, что  $E_x^{(1)} \sim \frac{b}{a} E_z^{(1)} \ll E_z^{(1)}$ . Если же  $a \ll b$ , то в области  $b - |z| > a$  эта добавка обращается в нуль, а в области  $b - |z| < a$

$$E_x^{(1)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} \frac{\Delta\varphi}{2a} \ln \frac{1 - \text{tg}(\pi x/4a)}{1 + \text{tg}(\pi x/4a)} \text{sign } z \quad (20)$$

и добавка велика.

Понятно, что так как  $E_x^{(1)}$  — нечетная функция  $x$ , вклад в полное «манитосопротивление»  $V(H) = \int_{-a}^a E_x dx$  она не вносит. Но если определить

$$V(H) = \int_0^a E_x dx,$$

то

$$V(H, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2} \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} \Delta\varphi \frac{\text{sh}(\pi/2a + n\pi/a) z}{\text{ch}(\pi/2a + n\pi/a) b} + \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (21)$$

Когда  $a \gg b$ ,

$$V(H, z) = \frac{\Delta\varphi}{2} \left[ 1 - \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} \frac{z}{a} \right]. \quad (22)$$

В случае же  $a \ll b$

$$V(H, z) = 0$$

при  $b - |z| > a$  и

$$V(H, z) = \frac{\Delta\varphi}{2} \left[ 1 - \frac{8G}{\pi^2} \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xx}} \text{sign } z \right] \text{ при } b - |z| < a, \quad (23)$$

где  $G = 0.915\dots$  — постоянная Каталана [8].

Таким образом, даже при разомкнутых холловских контактах и  $q = 0$  [см. (3)] в ограниченных образцах в режиме поля имеет место манитосопротивление, линейно зависящее от магнитного поля и от координаты наблюдения  $z$ .

Для того чтобы понять причину такого необычного поведения поля Холла и манитосопротивления, рассмотрим геометрию электрических токов, циркулирующих в образце в линейном по магнитному полю приближении.

Подставляя в выражения для токов

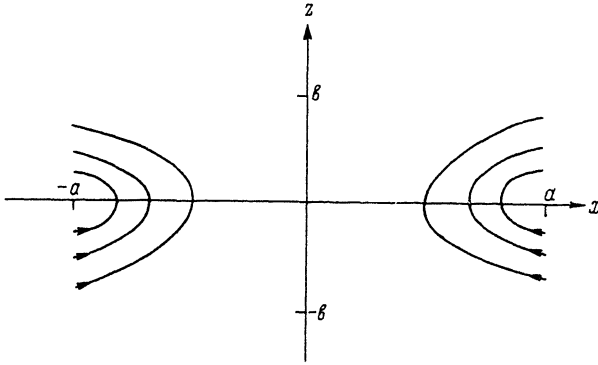


Рис. 1. Распределение токов в образце при  $a \gg b$ .

$$j_x^{(1)} = -\sigma_{xx} \frac{\omega_H}{\nu_0} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x},$$

$$j_z^{(1)} = -\sigma_{xx} \frac{\omega_H}{\nu_0} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} + \sigma_{xz} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial x}$$

выражение  $\varphi^{(1)}(x, z)$  (15), получим

$$j_x^{(1)} = \frac{2}{\pi} \sigma_{xz} \frac{\Delta \varphi}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sh} \alpha_n z}{2n+1 \operatorname{ch} \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$j_z^{(1)} = \frac{2}{\pi} \sigma_{xz} \frac{\Delta \varphi}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch} \alpha_n z}{2n+1 \operatorname{ch} \alpha_n b} \cos \alpha_n x - \sigma_{xz} \frac{\Delta \varphi}{2a}. \quad (24)$$

Если геометрия образца такова, что  $a \gg b$ , то из (24) находим

$$j_x^{(1)} = 2\sigma_{xz} \frac{\Delta \varphi}{2a} \frac{z}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \alpha_n x; \quad j_z^{(1)} = 0.$$

На самом же деле  $j_z^{(1)}$  отличен от нуля и в  $b/a$  раз меньше  $j_x$ . Геометрия токов в этом случае изображена на рис. 1. Исчезающе малый ток  $j_z$  в такой геометрии во всех точках образца оправдывает вычисление поля Холла из соотношения  $j_z \equiv 0$  [6]. Однако отличие от нуля тока  $j_x^{(1)}$  приводит к существованию магнитосопротивления в линейном по  $H$  приближении.

В случае, когда  $a \ll b$ ,

$$j_x = 0, \quad j_z = -\sigma_{xz} \frac{\Delta \varphi}{2a} \text{ при } b - |z| > a;$$

$$j_x = \frac{2}{\pi} \sigma_{xz} \frac{\Delta \varphi}{2a} \ln \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4a}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4a}} \operatorname{sign} z, \quad j_z = 0 \text{ при } b - |z| < a. \quad (25)$$

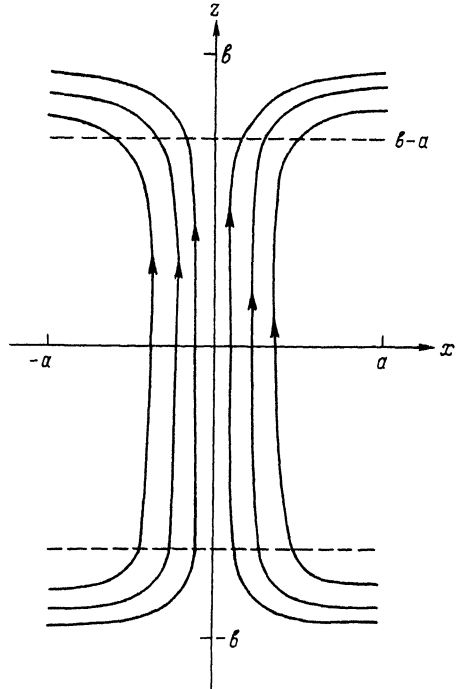


Рис. 2. Распределение токов в образце при  $a \ll b$ .

Как и ранее, равенство нулю соответствующей компоненты тока означает, что она много меньше ортогональной ее компоненты. Распределение токов в данной геометрии изображено на рис. 2. Из рис. 2 и формулы (25) следует, что (исключая пограничный слой  $\sim a$  вблизи стенок  $z = \pm b$ ) в основной области образца  $E_z = 0$  и  $j_z \neq 0$ , что соответствует замкнутым холловским контактам [6]. Однако как уже указывалось выше, наличие пограничных слоев, в которых  $E_z$  не только отлично от нуля, но и велико, приводит к большим холловским разностям потенциалов при измерении с поверхностей  $z = \pm b$ . Общепринятые результаты [6] получаются, как следует из проведенного выше анализа, только в том случае, если измерять  $V_z$  между двумя точками  $z = z_1$  и  $z = z_2$ , удовлетворяющими условию  $b - |z_{1,2}| > a$ .

Полученные результаты могут существенно изменить теорию тепловых (нелинейных) размерных эффектов в греющих электрических полях (см. [4-5]), которая строилась в приближении  $a \rightarrow \infty$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Маделунг. Физика полупроводниковых соединений электронов III и V групп, 477. М. (1967).
- [2] Ю. Ф. Соколов, Б. Г. Степанов. Микроэлектроника, 3, 142 (1974).
- [3] Ю. Ф. Соколов, В. В. Гастев. ФТП, 9, 1694 (1975).
- [4] Ф. Г. Басс, В. С. Бочков, Ю. Г. Гуревич. Электроны и фононы в ограниченных полупроводниках, 281. М. (1984).
- [5] Э. И. Рашба, З. С. Грибников, В. Я. Кравченко. УФН, 119, 3 (1976).
- [6] А. И. Ансельм. Введение в теорию полупроводников, 615. М. (1978).
- [7] К. Миранда. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М. (1957).
- [8] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 1108. М. (1971).

Редактор Л. В. Шаронова