

01;06  
©1993 г.

## ОБ ЭФФЕКТЕ ХОЛЛА В АНИЗОТРОПНЫХ ПЛЕНКАХ И МОНОКРИСТАЛЛАХ

*Н. Н. Поляков*

Получено распределение потенциала и плотности тока в анизотропных пленках и монокристаллах с произвольной ориентацией кристаллографических направлений в электрическом и магнитном полях. Рассмотрено влияние анизотропии образцов на результаты измерений коэффициента Холла материалов электронной техники. Даны практические рекомендации по измерению эффекта Холла в анизотропных образцах, в том числе произвольной формы. Полученные в работе теоретические результаты проверены экспериментально на тетрагональных монокристаллах арсенида кадмия.

### Введение

Общие вопросы кинетической теории гальваномагнитных явлений в анизотропных полупроводниках подробно рассмотрены в монографии [1]. В ней отмечен ряд особенностей кинетических явлений в анизотропных средах. В то же время практические методы измерения эффектов Холла и магнитного сопротивления анизотропных пленок и монокристаллов нуждаются в теоретическом и экспериментальном обосновании. В частности, при изменении внешних условий (температуры, давления) параметры анизотропии исследуемых материалов могут изменяться, что должно учитываться при измерении эдс Холла. Макроскопическая модель электропроводности анизотропных кристаллов и пленок во внешнем магнитном поле имеет практическое значение при разработке ряда приборов электронной техники.

В настоящей работе на основе макроскопической теории эффекта Холла рассмотрены особенности измерений эдс Холла в анизотропных пленках и монокристаллах с произвольной ориентацией кристаллографических направлений. Теоретические расчеты проверены экспериментально на монокристаллах арсенида кадмия. Даны практические рекомендации для определения компонент тензора коэффициента Холла анизотропных образцов.

Пусть плоский образец прямоугольной формы вырезан так, что его грани  $y = 0, b$  составляют некоторый угол  $\theta$  с кристаллографическими плоскостями и толщина  $d$  образца значительно меньше его ширины  $b$  и

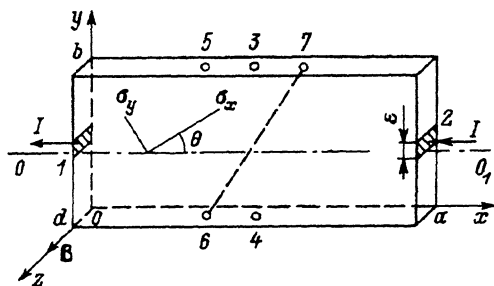


Рис. 1. Схема расположения контактов при измерении эдс Холла анизотропных образцов.

длины  $a$  (рис. 1). Токовые контакты 1, 2 расположены на оси симметрии образца, магнитное поле индукцией  $B$  направлено перпендикулярно плоскости  $xOy$ . Тензор электропроводимости  $\sigma_H$  материала образца во внешнем магнитном поле имеет вид [2]

$$\sigma_H = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & (\sigma_{xy} + R_z B \sigma_0^2) \\ (\sigma_{xy} - R_z B \sigma_0^2) & \sigma_{yy} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_{ik}$  — компоненты симметричного тензора электропроводимости в отсутствие магнитного поля;  $R_z$  — компонента тензора коэффициента Холла при условии, что линии тока в образце расположены параллельно плоскости  $xOy$ , а магнитное поле направлено вдоль оси  $Oz$ . Величина  $\sigma_0$  определяется равенством

$$\sigma_0 = (\sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2)^{1/2}. \quad (2)$$

Необходимо отметить, что компоненты тензора электропроводимости (1) зависят от индукции  $B$  линейно. Это означает, что в данном случае рассматривается эффект Холла в области относительно слабых магнитных полей, когда можно пренебречь эффектом магнитного сопротивления, определяемого членами, содержащими  $B^2$  [3]. В дальнейшем для краткости коэффициент Холла будем записывать без индекса  $z$ .

При измерениях на постоянном токе и в установившемся режиме потенциал  $\varphi(x, y)$  электрического поля в области образца удовлетворяет уравнению [2]

$$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y} = 0. \quad (3)$$

Граничные условия для потенциала следуют из требования, что нормальная составляющая вектора плотности тока на поверхности образца всюду равна нулю, кроме точек под токовыми электродами,

$$[\partial \varphi / \partial x + (RB \sigma_0 \gamma_1 + \gamma) \cdot \partial \varphi / \partial y]_{x=0, a} = [I / (\sigma_{xx} \cdot d)] \cdot \delta(y - b/2); \quad (4)$$

$$[\sigma_{yy} \cdot \partial \varphi / \partial y - (RB \sigma_0^2 - \sigma_{xy}) \cdot \partial \varphi / \partial x]_{y=0, b} = 0; \quad (5)$$

$$\gamma = \sigma_{xy} / \sigma_{xx}; \quad \gamma_1 = \sigma_0 / \sigma_{xx}. \quad (6)$$

В равенство (4) входит дельта-функция Дирака  $\delta(y - b/2)$ , применение которой справедливо для точечных контактов. Использование  $\delta$ -функции

значительно упрощает математическое решение краевой задачи, сохраняя основные физические особенности эффекта Холла в анизотропных образцах. В работе [4] показано, что реальные контакты можно считать точечными с относительной погрешностью менее 4% при условии  $\varepsilon < 0.1b$ , где  $\varepsilon$  — размер контактной площадки вдоль оси  $Oy$  (рис. 1). Это условие обычно выполняется при измерениях эдс Холла в пленках и кристаллах.

Заметим, что путем замены переменных

$$t = (\gamma_1 - i\gamma)x + iy; \quad \bar{t} = (\gamma_1 + i\gamma)x - iy \quad (7)$$

уравнение (3) переходит в уравнение вида

$$\partial^2 f / (\partial t \cdot \partial \bar{t}) = 0. \quad (8)$$

Это позволяет представить решение краевой задачи (3)–(5) в виде ряда Фурье в комплексной форме [5]

$$f(x, y) = \sum_n X_n [\alpha_n (\gamma_1 - i\gamma)x] \cdot \exp(i\alpha_n y), \quad (9)$$

$$\alpha_n = \pi n / b; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

Подставляя ряд Фурье (9) в уравнение (3) и освобождаясь от экспонент путем интегрирования от 0 до  $b$ , получаем уравнение для нахождения  $X_n(x)$

$$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} \frac{d^2 X_n}{dx^2} + 2i\alpha_n \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} \frac{dX_n}{dx} - \alpha_n^2 \cdot X_n(x) = 0. \quad (11)$$

Аналогичным образом из (4) получаем граничные условия для  $X_n(x)$ . Решение уравнения (11) с граничными условиями (4) позволяет найти комплексный потенциал  $f(x, y)$ . Действительная часть комплексного потенциала (9) имеет смысл потенциала  $\varphi(x, y)$  электрического поля в области образца. Опуская эти весьма громоздкие преобразования, запишем окончательное выражение для электрического потенциала в следующем виде:

$$\varphi(x, y) = \varphi_0 + \varphi_H; \quad (12)$$

$$\varphi_0(x, y) = \frac{I(\sigma_{yy} \cdot x - \sigma_{xy} \cdot y)}{bd\sigma_0^2} - \frac{2I}{bd\sigma_0} \sum_{n=2,4,\dots} (-1)^{n/2} \frac{1}{\alpha_n \cdot \text{sh}(\alpha_n \gamma_1 a)} \times \\ \times \{ \text{ch} [\alpha_n \gamma_1 (a - x)] \cdot \cos [\alpha_n (\gamma x - y)] - \text{ch}(\alpha_n \gamma_1 x) \cdot \cos [\alpha_n \gamma (a - x) + \alpha_n y] \}; \quad (13)$$

$$\varphi_H(x, y) = \frac{IRB}{bd} y - \frac{2IRB}{bd} \sum_{n=2,4,\dots} (-1)^{n/2} \frac{1}{\alpha_n \cdot \text{sh}(\alpha_n \gamma_1 a)} \times \\ \times \{ \text{sh} [\alpha_n \gamma_1 (a - x)] \cdot \sin [\alpha_n (\gamma x - y)] - \text{sh}(\alpha_n \gamma_1 x) \cdot \sin [\alpha_n \gamma (a - x) + \alpha_n y] \}. \quad (14)$$

Как и следовало ожидать, в линейном приближении по магнитному полю потенциал  $\varphi$  представляется в виде двух слагаемых (12), где  $\varphi_0(x, y)$  — потенциал электрического поля в образце при отсутствии внешнего магнитного поля,  $\varphi_H(x, y)$  — потенциал холловского электрического поля, которое возникает после включения внешнего магнитного поля. Выражения (13), (14) и позволяют проанализировать условия измерения коэффициента Холла  $R$  в анизотропных образцах.

## Поперечное напряжение электропроводимости

Полученное решение (12)–(14) позволяет проанализировать распределения потенциала и плотности тока в анизотропных образцах конечных размеров, которые используются при исследованиях материалов электронной техники, а также для изготовления датчиков Холла и других магнитоэлектронных приборов.

При исследовании изотропных материалов эдс Холла, как правило, измеряют между точками 3, 4, расположенными симметрично на гранях  $y = 0, b$  (рис. 1) ближе к середине образца при  $x \cong a/2$ . В изотропных образцах при наличии тока между контактами 1, 2 в отсутствие внешнего магнитного поля разность потенциалов между точками 3, 4 равна нулю. Это облегчает практическое измерение эдс Холла между этими точками после включения магнитного поля. В рассматриваемом случае анизотропного материала ситуация существенно меняется. Из (13) следует, что разность потенциалов  $U_0$  между произвольными двумя точками 5, 6, расположенными симметрично относительно линии контактов 00<sub>1</sub> (рис. 1), определяется формулой

$$U_0 = \varphi_0(6) - \varphi_0(5) = (I/d) \cdot (\sigma_{xy}/\sigma_0^2). \quad (15)$$

Таким образом, между гранями  $y = 0, b$  анизотропных образцов даже при отсутствии внешнего магнитного поля существует разность потенциалов, которая будет сопутствовать эдс Холла. Разность потенциалов  $U_0$  можно назвать поперечным напряжением электропроводимости (ПНЭ), поскольку, согласно (15), это напряжение обусловлено отличной от нуля компонентой  $\sigma_{xy}$  тензора электропроводимости. Величина  $\sigma_{xy}$  в свою очередь определяется углом наклона  $\theta$  кристаллографических направлений по отношению к граням  $y = 0, b$ .

Существенно отметить два свойства ПНЭ, которые характерны для рассматриваемого случая образцов конечных размеров. Во-первых, величина ПНЭ не зависит от  $x$ , т.е. одинакова между любыми симметрично расположенными точками на гранях  $y = 0, b$  по всей длине образца. Возникновение не зависящего от  $x$  электрического поля напряженностью  $U_0/b$ , перпендикулярного внешнему электрическому полю, становится возможным благодаря существованию в области образца замкнутых вихревых токов электропроводимости (ВТЭ). Действительно, выражение (13) позволяет определить вектор плотности тока в образце, найти проекцию ротора  $\mathbf{j}$  при  $\mathbf{B} = 0$  и доказать соотношения

$$(\nabla \times \mathbf{j})_z = \text{rot}_z \mathbf{j} \neq 0; \quad (\nabla \times \mathbf{E})_z = \text{rot}_z \mathbf{E} = 0, \quad (16)$$

где  $\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля.

Это указывает на существование в образце вихревой составляющей полного электрического тока, в то время как электрическое поле является потенциальным, безвихревым. В изотропных материалах при таких условиях всюду в образце выполняется равенство  $\text{rot}_z \mathbf{j} = 0$ . Следовательно, именно анизотропия электропроводимости материала образца приводит к возникновению ВТЭ.

Взаимодействие ВТЭ с границами образца приводит к возникновению на гранях  $y = 0, b$  дополнительных поверхностных токов, которые выравнивают величину  $U_0$  по всей длине образца, в том числе в приконтактных

областях. Более подробно модельные представления о ВТЭ для некоторых частных случаев анизотропии электропроводимости даны в работе [6].

Вторая особенность ПНЭ заключается в том, что его величина  $U_0$  не зависит от геометрических размеров образца, но определяется отношением  $\sigma_{xy}/\sigma_0$  и плотностью электрического тока. Это объясняется тем, что распределение линий вектора плотности тока в анизотропных образцах существенно отличается от соответствующего распределения в изотропных материалах. Распределение линий плотности тока в анизотропном образце можно представить как суперпозицию распределения тока в изотропном образце и ВТЭ. В изотропном прямоугольном образце при пропускании электрического тока по схеме рис. 1 картина распределения плотности тока симметрична относительно линии контактов  $OO_1$  и ВТЭ отсутствуют. В анизотропных материалах эта симметрия нарушается и степень искажения этой симметрии определяется параметром анизотропии  $\sigma_x/\sigma_y$ , а также углом наклона  $\theta$  кристаллографических направлений к границам образца. Соответственно этими величинами определяется степень нарушения симметрии распределения потенциала на гранях  $y = 0, b$  относительно  $OO_1$ , что приводит к возникновению ПНЭ при заданном токе через образец.

На основании отмеченных свойств следует одно из возможных практических применений ПНЭ — ориентация кристаллографических направлений анизотропных пленок и монокристаллов относительно границ образцов. Величина  $U_0$  зависит от угла  $\theta$ : например, при  $\theta = 0, \pi/2, 3\pi/2$  ПНЭ отсутствует, при  $\theta > \pi/2$  ПНЭ меняет знак. Величина ПНЭ может дать полезные сведения о свойствах пленок и кристаллов при их механических деформациях.

Экспериментальная проверка полученного распределения потенциала (13) была проведена на тетрагональных монокристаллах арсенида кадмия, полученных методом направленной кристаллизации. На рис. 1 плоскости  $xOy$  соответствует кристаллографическая плоскость (100),  $\sigma_x, \sigma_y$  являются электропроводимостями по направлениям кристалла [001] и [010] соответственно. Эти величины были измерены заранее на специально изготовленных образцах, вырезанных вдоль указанных направлений монокристалла ( $\sigma_x = 26 \cdot 10^2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ,  $\sigma_y = 9 \cdot 10^2 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ). Величина угла  $\theta = 30^\circ$ , что позволяло вычислять компоненты тензора электропроводимости данного образца по известным формулам преобразования систем координат. Для опытного получения распределения потенциала был вырезан образец размерами  $a = 8.4 \text{ мм}$ ,  $b = 4 \text{ мм}$ ,  $d = 1 \text{ мм}$ , токовыми электродами служили впаянные оловянные контакты размером  $\varepsilon = 0.4 \text{ мм}$ .

Распределение (13) потенциала  $\varphi_0$  на гранях  $y = 0, b$  для его сравнения с экспериментом целесообразно представить в виде

$$[\varphi_0(x)]_{y=0} = (I/d) \cdot Q; \quad [\varphi_0(x)]_{y=b} = (I/d) \cdot (Q - \sigma_{xy}/\sigma_0^2); \quad (17)$$

$$Q = \frac{\sigma_{yy}}{b\sigma_0^2} x - \frac{2}{b\sigma_0} \sum_{n=2,4,\dots} (-1)^{n/2} \times \\ \times \frac{\text{ch}[\alpha_n \gamma_1 (a - x)] \cdot \cos(\alpha_n \gamma x) - \text{ch}(\alpha_n \gamma_1 x) \cdot \cos[\alpha_n \gamma (a - x)]}{\alpha_n \cdot \text{sh}(\alpha_n \gamma_1 a)}. \quad (18)$$

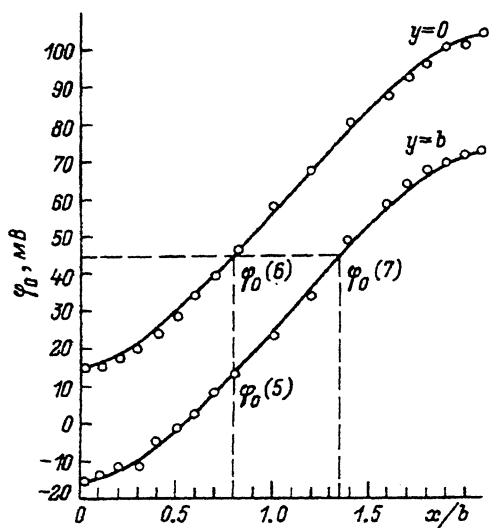


Рис. 2. Зависимость потенциала  $\varphi_0$  на гранях  $y = 0, b$  от отношения  $x/b$  при  $\sigma_x > \sigma_y$  и  $\theta = \pi/6$ .

На ЭВМ по соотношениям (17), (18) для данного образца строился график зависимости  $\varphi_0(x)$  на гранях  $y = 0, b$  для определенных значений токов. На рис. 2 теоретические кривые  $\varphi_0(x)$  представлены сплошными линиями для тока  $I = 0.1$  А через образец. Затем при помощи подвижного вольфрамового зонда и высокоомного вольтметра В2-34 измерялось это же распределение потенциала на гранях  $y = 0, b$  относительно отрицательного электрода, который был заземлен. Постоянный ток 0.1 А пропускался через образец от стабилизированного источника питания Б5-44. Экспериментальные результаты измерений потенциала представлены на рис. 2 точками, относительная погрешность измерения потенциала не превышала 5%. Эта погрешность в основном определялась неточностью определения координаты  $x$  подвижного зонда. Для уменьшения данной погрешности отсчет координаты  $x$  подвижного зонда производился под микроскопом МБС-10.

Как видно из графика, получено совпадение теоретического распределения потенциала с экспериментальными данными в пределах погрешности измерений. Поперечное напряжение электропроводности  $U_0$  одинаково по всей длине образца и равно  $31.4 \cdot 10^{-3}$  В. В средней части образца наблюдается линейная зависимость  $\varphi_0(x)$ , при увеличении относительной длины образца  $a/b$  этот линейный участок увеличивается, однако характер распределения  $\varphi_0(x)$  в приконтактных областях не изменяется.

### Измерение эдс Холла

После включения внешнего магнитного поля в образце возникает поперечное электрическое холловское поле, потенциал которого определяется выражением (14). Из него следует, что между гранями  $y = 0, b$  существует эдс Холла, не зависящая от  $x$ ,

$$\mathcal{E}_H = IRB/d. \quad (19)$$

Несмотря на сложное, несимметричное распределение линий плотности тока в анизотропных образцах, возникшее поперечное холловское поле является однородным. Вихревые холловские токи в приконтактных

областях образца выравнивают распределение холловских электрических зарядов на гранях  $y = 0, b$ . Заметим, что это имеет место для токовых контактов малой площади ( $\epsilon < 0.1b$ ), когда закорачивающим действием токовых электродов на величину эдс Холла можно пренебречь. Формула (19) и позволяет определять компоненту тензора коэффициента Холла по результатам измерения эдс Холла.

При практических измерениях эдс Холла в анизотропных пленках и кристаллах необходимо иметь в виду, что в случае симметричного расположения измерительных контактов 3, 4 (рис. 1) измеренное напряжение  $U_{34}$  является алгебраической суммой ПНЭ и эдс Холла. Величина ПНЭ является весьма существенной и мешает измерению эдс Холла. Например, для нашего образца  $\text{CdAs}_2$  в магнитном поле  $B = 0.5$  Тл при токе  $I = 0.1$  А эдс Холла  $\mathcal{E}_H = 1.04 \cdot 10^{-3}$  В, в то время как, согласно данным рис. 2, ПНЭ составляет величину  $U_0 = 31.4 \cdot 10^{-3}$  В. Исключить влияние ПНЭ на результат измерения эдс Холла можно двумя способами.

1. При симметричном расположении холловских контактов 3, 4 величину ПНЭ можно учесть, измерив до включения внешнего магнитного поля напряжение между этими контактами путем непосредственного отсчета или компенсационным методом. Дополнительная разность потенциалов, возникающая после включения магнитного поля, и будет представлять собой эдс Холла.

2. Холловские контакты 6, 7 можно располагать несимметрично, но на одной эквипотенциальной линии (рис. 1, 2). Поскольку выше доказано, что холловское электрическое поле в анизотропном образце является однородным, то несимметричное расположение измерительных контактов не будет влиять на величину эдс Холла. Этот способ предпочтителен при изготовлении датчиков Холла из анизотропных пленок или кристаллов, так как в этом случае стремятся свести к нулю все факторы, сопутствующие эдс Холла.

В практике измерений коэффициента Холла изотропных материалов большое распространение имеет метод Ван-дер-Пау<sup>[3]</sup>, применяемый для плоских образцов произвольной формы. В работе [7] показано, что теория метода Ван-дер-Пау основана на линейном приближении (12) потенциала электрического поля в образце в магнитном поле. Так как данное линейное приближение справедливо и в случае анизотропных материалов, то метод Ван-дер-Пау измерения эдс Холла можно применять также к анизотропным плоским пленкам и тонким плоским образцам монокристаллов произвольной формы. Для проверки этого утверждения производились измерения эдс Холла прямоугольного образца  $\text{CdAs}_2$  по описанной выше методике. Затем из этого же монокристалла вырезались образцы произвольной формы (овал, неправильные многогранники) и на них производились измерения эдс Холла с учетом ПНЭ. Относительная погрешность измерений эдс Холла не превышала 5%, коэффициент Холла вычислялся по формуле (19). Получено совпадение результатов измерений эдс Холла на анизотропных образцах различной формы. Следовательно, метод Ван-дер-Пау можно применять для определения коэффициента Холла анизотропных пленок и кристаллов.

В заключение отметим, что формально эдс Холла и ПНЭ имеют сходство. Действительно, эдс Холла возникает в изотропном образце потому, что во внешнем магнитном поле электропроводимость изотропного материала становится тензором (1). Однако несмотря на это формальное сходство, ПНЭ и эдс Холла имеют различный физический смысл.

Эдс Холла возникает в ограниченных образцах в результате разделения зарядов под действием силы, действующей на носители тока со стороны внешнего магнитного поля. ПНЭ в анизотропных пленках и кристаллах имеет смысл падения напряжения вследствие более сложного по сравнению с изотропными материалами распределения линий вектора плотности электрического тока.

Автор выражает благодарность сотрудникам Института общей неорганической химии РАН Д.И.Пищикову и А.М.Раухману за предоставленные образцы.

#### Список литературы

- [1] Баранский П.И., Буда И.С., Даховский И.В., Коломиец В.В. Электрические и гальваномагнитные явления в анизотропных полупроводниках. Киев: Наукова думка, 1987. 270 с.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [3] Кучис Е.В. Гальваномагнитные эффекты и методы их исследования. М.: Радио и связь, 1990. 264 с.
- [4] Поляков Н.Н. // Заводская лаборатория. 1990. Т. 56. № 5. С. 42-46.
- [5] Лаверентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
- [6] Поляков Н.Н. // Изв. вузов. Физика. 1989. № 12. С. 14-19.
- [7] Поляков Н.Н., Коньков В.Л. // Заводская лаборатория. 1969. Т. 35. № 8. С. 954-957.

Липецкий педагогический институт

Поступило в Редакцию  
13 февраля 1992 г.

