1993 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 63, в. 3
1993 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 63, N 3

01;06

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ О СЛОЕ ШОТТКИ НА ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКА

А.В.Ефанов

Рассчитывается распределение потенциала вблизи системы электродов на границе полупроводника и диэлектрика. Область пространственного заряда в полупроводнике описывается в модели Шоттки. Предполагается, что среды имеют одинаковые диэлектрические проницаемости. Рассматривается двумерная задача, когда все величины не зависят от одной координаты вдоль поверхности полупроводника. Нелинейная задача экранирования сводится к нахождению формы слоя Шоттки и решается методами теории аналитических функций. Теория иллюстрируется на примере расчета потенциала узкого металлического электрода.

Введение

В работах [1,2] были найдены аналитические решения двумерных задач о потенциале слоя Шоттки в полупроводнике. В данной работе метод решения обобщается на случай неоднородной среды — контакта полупроводника и диэлектрика с одинаковыми диэлектрическими проницаемостями.

Рассматривается следующая постановка задачи. Предполагается, что в среде имеется система электродов, простирающихся параллельно поверхности полупроводника и друг другу. Заряды на электродах считаются заданными по величине и совпадающими по знаку с зарядами подвижных носителей в полупроводнике. Решается задача об определении потенциала в системе с учетом экранирования поля наведенным зарядом в объеме полупроводника.

В работе рассматривается случай шоттковского экранирования, когда заряды на электродах отталкивают подвижные носители и создают в полупроводнике область обеднения (слой Шоттки). В этой ситуации объемная плотность наведенного заряда не зависит от величины потенциала в слое и определяется концентрацией ионизованных примесей. Размер области пространственного заряда существенно превышает длину дебаевского экранирования в объеме полупроводника.

Задача решается в асимптотическом пределе, когда можно пренебречь подробностями поведения потенциала на масштабе порядка длины экранирования. В этом случае задача сводится к нахождению формы слоя Шоттки [1]. Внутри области напряженность поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ определяется из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \left[eN_i + \rho_0(\mathbf{r}) \right], \tag{1}$$

где N_i — концентрация ионизованных примесей ($N_i = \text{const}$), e — заряд электрона, ε — диэлектрическая проницаемость, $\rho_0(\mathbf{r})$ — заданное распределение сторонних зарядов.

Форма области подбирается таким образом, чтобы на границе области и во всем нейтральном объеме полупроводника выполнялось условие $\mathbf{E} = 0$.

Решение получается с помощью методов теории аналитических функций. Напряженность поля и потенциал выражаются через некоторую функцию конформного отображения полуплоскости вспомогательной комплексной переменной на область, занятую полем. В функцию отображения входит определенное число неизвестных параметров, связанных между собой системой алгебраических уравнений. Исходная нелинейная краевая задача со свободной границей в итоге сводится к решению системы алгебраических уравнений.

План работы следующий. В разделе 1 строится общее решение для системы точечных источников, в разделе 2 подробно рассматривается частный случай одиночного электрода, приводятся явные формулы для всех зависимостей, а также обсуждаются возможные ограничения на применимость результатов работы.

1. Метод решения

Условимся, что полупроводник и диэлектрик занимают полупространства $y \leqslant 0$ и $y \geqslant 0$ соответственно (рис. 1). Будем рассматривать случай электронного типа проводимости в полупроводнике. Электроды тогда будут заряжены отрицательно, а слой Шоттки — положительно. Диэлектрическую проницаемость положим равной единице.

Следуя работам [1,2], перейдем к комплексным величинам. Обозначим $z = x + iy$, где i — мнимая единица. Введем комплексное поле $\mathcal{E} = E_x - iE_y$, где E_x и E_y — компоненты вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$.

Поле внутри области пространственного заряда может быть представлено в виде [2]

$$\mathcal{E} = 2\pi\sigma \left[\bar{z} - f(z) \right], \tag{2}$$

где $\sigma = eN_i$, $\bar{z}$ — комплексно-сопряженное значение z.

Первое слагаемое в этой формуле отвечает полю равномерно заряженного фона примесей. Оно дает частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1) с постоянной правой частью. Второе слагаемое описывает свободное кулоновское поле. Функция $f(z)$ оказывается аналитической, поскольку для нее выполняются условия Коши-Римана. Последние равносильны требованию $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$.

Комплексное поле в диэлектрике $\mathcal{E}_1$ формально записывается в виде, аналогичном (2),

$$\mathcal{E}_1 = -2\pi\sigma f_1(z). \tag{3}$$

Единственными особенностями функций $f(z)$ и $f_1(z)$ являются простые полюсы в точках $z_n = x_n + iy_n$, где x_n и y_n — декартовы координаты зарядов; $n = 1, \ldots, N$ — соответствующие номера. Они представляют собой поля точечных зарядов. Вблизи них функции $f(z)$ и $f_1(z)$ ведут себя как

$$f(z), f_1(z) \approx \frac{2Q_n}{z - z_n}, \tag{4}$$

где $Q_n = q_n/(2\pi\sigma)$, q_n — абсолютные величины зарядов электродов в расчете на единицу длины.

Задача состоит в нахождении функций $f(z)$, $f_1(z)$ и такой формы области с границей Γ (рис. 1), для которой поле $\mathcal{E}$ обращается в нуль на границе Γ и во всем нейтральном объеме полупроводника. Дополнительным краевым условием служит требование непрерывности напряженности поля $\mathbf{E}$ на границе полупроводника и диэлектрика.

Поставленная задача решается методом [3]. Для того чтобы применить метод, введем в рассмотрение новую функцию $p(z) = f(z) - z$. Условие непрерывности напряженности поля на поверхности полупроводника $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ означает для этой функции равенство $p(z) = f_1(z)$ на вещественной оси и отсутствие скачка при стремлении точки z изнутри области к границе раздела. Из этого следует, что функция $f_1(z)$ является аналитическим продолжением $p(z)$ [4]. Таким образом, необходимо искать только одну функцию $p(z)$ во всей области, лежащей над кривой Γ в плоскости z.

Функция $p(z)$ имеет те же свойства, что и одноименная функция в работе [3]. Она удовлетворяет краевому условию $\operatorname{Re} p(z) = 0$ на границе слоя Шоттки и имеет особенности в виде простых полюсов. Выражение для нее находится с помощью аналогичных рассуждений. Результат состоит в следующем.

Форма области пространственного заряда определяется конформным отображением верхней полуплоскости $\operatorname{Im} t \geqslant 0$ некоторой комплексной переменной t (рис. 2) на всю область, лежащую выше кривой Γ,

$$z = \omega(t) = \bar{c}_0 + at + \sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{c}_n}{t - \bar{t}_n}, \tag{5}$$

где c_0, a, c_n и t_n — постоянные.

Неизвестные параметры отображения вычисляются из некоторой системы алгебраических уравнений. Среди набора параметров величина a является вещественной и положительной, комплексные величины t_n имеют положительную мнимую часть.

Функции $p(z)$ и $f(z)$ при $z = \omega(t)$ записываются в виде

$$p(t) = 2ic_0'' + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{c_n}{t - t_n} - \frac{\bar{c}_n}{t - \bar{t}_n} \right), \tag{6}$$

где $c_0'' = \operatorname{Im} c_0 > 0$,

$$f(t) = c_0 + at + \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{t - t_n}. \tag{7}$$

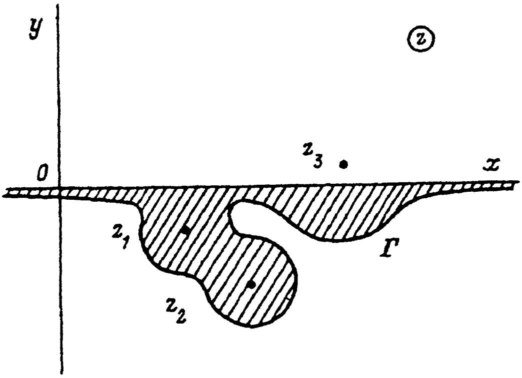

Рис. 1. Вид области пространственного заряда в полупроводнике.

Полупроводник занимает область $y \leqslant 0$. Точки $z_1, z_2, \ldots$ — комплексные координаты электродов. Кривая Г — граница слоя Шоттки.

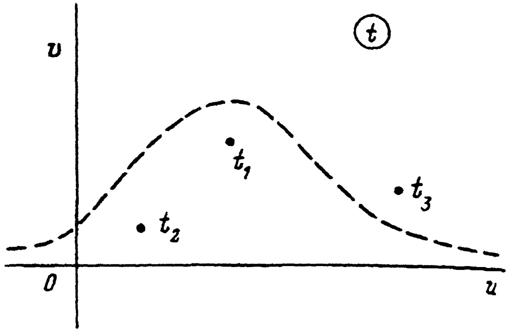

Рис. 2. Комплексная плоскость переменной $t = u + iv$.

Точки $t_1, t_2, \ldots$ — соответствуют координатам электродов, пунктир — положение прообраза вещественной оси плоскости z.

Последнее выражение получается из формулы (5) путем комплексного сопряжения всех коэффициентов при степенях переменной t, т.е. $f(t) = \bar{\omega}(t)$.

Легко убедиться, что краевое условие $\mathcal{E} = 0$ на границе Г (т.е. при вещественных значениях t) действительно выполняется. Для этого достаточно подставить (5) и (7) в (2). Непрерывность поля на границе полупроводника обеспечивается тем, что функция $p(t)$ оказывается аналитической во всех точках $t \neq t_n, \bar{t}_n$.

Уравнения для нахождения параметров c_0, a, c_n и t_n получаются так же, как и в работе [1]. Необходимо требовать, чтобы полюса функций (3) и (7) соответствовали друг другу

$$\omega(t_n) = z_n, \tag{8}$$

а вычеты в полюсах удовлетворяли соотношениям

$$c_n \omega'(t_n) = 2Q_n, \tag{9}$$

где $\omega'(t)$ — производная от $\omega(t)$; $n = 1, 2, \ldots, N$.

В рассматриваемой задаче приведенных уравнений оказывается недостаточно. Уравнения (8) и (9) налагают только $2N$ условий, в то время как неизвестных величин имеется $2N + 2$ штук. Дополнительные условия получаются из следующих соображений.

Константа a, очевидно, должна быть положительной вещественной величиной. Только в этом случае сохраняется направление обхода границ при конформном отображении. Эта константа может быть выбрана произвольно, так как она определяет лишь масштаб растяжения осей координат.

В выборе вещественной части параметра c_0 также имеется свобода. Функция (5) определяется с точностью до конформного отображения верхней полуплоскости переменной t на самую себя с сохранением направления обхода границы. Такое преобразование есть трансляция плоскости t вдоль вещественной оси на произвольное расстояние u_0. Замена переменной $t = t' - u_0$ в формуле (5) показывает, что относительно новой переменной t' функция $\omega(t)$ записывается в виде, в котором параметры t_n и c_0 переходят в набор $\tilde{t}_n = t_n + u_0$, $\tilde{c}_0 = c_0 - au_0$. Таким образом, происходит сдвиг положений всех полюсов на одинаковое расстояние вдоль вещественной оси. Имеющийся произвол устраняется тем, что вещественную часть одного из параметров t_n можно задать "руками", например, из соображений симметрии.

Мнимая часть параметра c_0 возникает только в том случае, когда в глубине диэлектрика имеется однородное поле с компонентой $E_y^\infty > 0$. Действительно, если кривая Γ, описываемая уравнением $z = \omega(u)$, при $u \to \infty$ стремится к асимптоте $y = -c_0''$, то слой Шоттки при $x \to \infty$ переходит в равномерно заряженную полосу. Это может быть только при условии, что в диэлектрике имеется поле $E_y^\infty = 4\pi e N_i |c_0''|$. Источником поля может быть равномерно заряженная плоскость, расположенная на некотором расстоянии от поверхности полупроводника.

Учет внешнего поля не приводит к новым результатам. Можно считать, что граница между диэлектриком и полупроводником проходит не при $y = 0$, а при $y = -c_0''$. Положительный заряд полосы $-c_0'' \leqslant y \leqslant 0$ никак не сказывается на распределении поля в области $y \leqslant -c_0''$. В этой области напряженность поля полосы, складываясь с однородным полем E_y^∞, в сумме дает нуль.[1]

Нахождением неизвестных постоянных практически завершается решение задачи. Комплексное поле $\mathcal{E} = E_x - iE_y$ определяется формулами (2) и (3), в которых функции $f(z)$ и $f_1(z) = p(z)$ даются выражениями (6) или (7). Результат записывается в форме

$$\mathcal{E} = 2\pi\sigma[\overline{\omega(t)} - f(t)] \quad \text{при} \quad y \leqslant 0,$$

$$\mathcal{E} = 2\pi\sigma[\omega(t) - f(t)] \quad \text{при} \quad y \geqslant 0. \tag{10}$$

Вспомогательная переменная t в формулах (10) выражается через переменную z с помощью соотношения $z = \omega(t)$, рассматриваемого как уравнение относительно t. Практическое обращение функции $\omega(t)$ оказывается возможным лишь численными методами. Ввиду этого все промежуточные вычисления целесообразно проводить для функций на плоскости переменной t. При этом, правда, нужно рассчитывать форму линии, отвечающей вещественной оси плоскости z (рис. 2). Именно эта линия разделяет области определения двух формул (10). Ее точки даются уравнением $\operatorname{Im}\omega(t) = 0$.

Электрический потенциал получается из напряженности поля путем контурного интегрирования

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}_1) - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\mathbf{E}(\mathbf{r}). \tag{11}$$

---

[1] Если диэлектрик весь заполнен объемным зарядом, то имеет место постановка задачи, аналогичная [1]. Это обстоятельство впервые отмечено М.В.Энтиным (частное сообщение).

Выберем в качестве начальной точки контура $\mathbf{r}_1$ произвольную точку на границе слоя Шоттки, где $\varphi(\mathbf{r})_1 = 0$. С учетом (2) и (3) и соотношения $f(z) = z + p(z)$ для потенциала в полупроводнике получим выражение

$$\varphi = 2\pi\sigma \left[-y^2 + y_1^2 + \mathrm{Re} \int_{z_1}^{z} dz' p(z') \right], \tag{12}$$

а для потенциала в диэлектрике

$$\varphi = 2\pi\sigma \left[y_1^2 + \mathrm{Re} \int_{z_1}^{z} dz' p(z') \right]. \tag{13}$$

Результат вычислений по формулам (12) и (13) не зависит от положения точки $z = x_1 + iy_1$ на границе слоя Шоттки.

После замены переменной $z' = \omega(t)$ интеграл в формулах для потенциала находится в элементарных функциях. Ввиду громоздкости формулы мы здесь ее не приводим. В следующем разделе рассматривается пример такого вычисления в случае одиночного заряда.

2. Решение для одиночного заряда

Разместим заряд величиной q на оси ординат в точке $z_1 = iy_0$ (рис. 3). В соответствии с формулой (5) функция конформного отображения $\omega(t)$ в этом случае будет иметь вид

$$z = at + \frac{\bar{c}}{t + iv_0}, \tag{14}$$

где v_0 — положительное число.

Формулы (8) и (9) дадут уравнения для определения констант c и v_0

$$av_0 - \frac{\bar{c}}{2v_0} = y_0, \tag{15}$$

$$c\left(a + \frac{\bar{c}}{4v_0^2}\right) = 2Q, \tag{16}$$

где $Q = q/(2\pi\epsilon N_i)$.

Из уравнения (15) следует, что величина c является чисто вещественной.

Перейдем к формулам (14) —(16) к безразмерным переменным. Выберем в качестве характерной длины радиус цилиндра пространственного

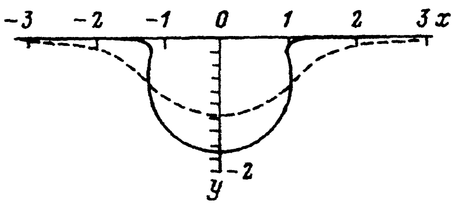

Рис. 3. Форма слоя Шоттки одиночного заряда.

Пунктир — заряд расположен на оси ординат в точке $y = 0$, сплошная линия — $y = -0.7$. Все расстояния измерены в единицах $R = (q/\pi\epsilon N_i)^{1/2}$.

заряда вокруг уединенного линейного источника, расположенного в глубине полупроводника,

$$R = \sqrt{2Q} = \sqrt{\frac{q}{\pi e N_i}}. \tag{17}$$

Положим $a = R$. После переобозначения отношений z/R через z и c/R через c вместо (14) получим

$$z = \omega(t) = t + \frac{c}{t + iv_0}. \tag{18}$$

Разрешив (18) относительно t, найдем

$$t = \frac{z - iv_0}{2} + \sqrt{\frac{(z + iv_0)^2}{4} - c}. \tag{19}$$

Квадратный корень здесь понимается в смысле главного значения, т.е. разрез проводится из начала координат вдоль вещественной оси. На верхнем берегу разреза берется положительной значение функции.

Постоянные c и v_0 определяются из системы уравнений (15) и (16)

$$v_0 = \frac{1}{3}\left(2y_0 + \sqrt{y_0^2 + 3}\right),$$

$$c = \frac{2}{9}\left(3 - y_0^2 + y_0\sqrt{y_0^2 + 3}\right), \tag{20}$$

где y_0 — обезразмеренная координата точечного заряда.

Координаты точек на границе слоя Шоттки даются зависимостью $z = \omega(u)$ при вещественных значениях u. Исключая в уравнении кривой параметр u, приходим к явному представлению формы линии

$$x = \pm\frac{y - v_0}{y}\sqrt{(y_0 - v_0)^2 - (y - y_0 + v_0)^2}. \tag{21}$$

В нем ордината y изменяется в пределах $2(y_0 - v_0) \leqslant y \leqslant 0$. Нижний предел соответствует точке $z = 0$, где достигается максимальная глубина слоя Шоттки.

Решение существует только при $y_0 \geqslant -1$. На рис. 3 показано, каким образом трансформируется область пространственного заряда при $y_0 \to -1$. В предельном случае $y_0 = -1$ постоянная $v_0 = 0$ и выражение (21) представляет собой уравнение окружности единичного радиуса, касающейся границы диэлектрика в одной точке.

Напряженность поля определяется формулой (10). В ней нужно заменить множитель $\sigma \to \sigma R$, чтобы перейти к безразмерной переменной z.

Исключая переменную t с помощью (19), находим

$$\mathcal{E} = 2\pi\sigma R[\bar{z} - f(z)] \quad \text{при} \quad y \leqslant 0,$$

$$\mathcal{E} = 2\pi\sigma R[z - f(z)] \quad \text{при} \quad y \geqslant 0, \tag{22}$$

где

$$f(z)=\frac{1}{2}\left[z-iv_0+\sqrt{(z+iv_0)^2-4c}+\frac{i}{3v_0-y_0}\frac{z-3iv_0-\sqrt{(z+iv_0)^2-4c}}{z-iy_0}\right]. \tag{23}$$

В формулах для потенциала (12) и (13) нужно заменить $\sigma\to\sigma R^2$. Выбирая начало контура интегрирования в точке $z_1=\omega(0)=-ic/v_0$, получаем

$$y_1^2+\mathrm{Re}\int\limits_{z_1}^{z}dz'p(z')=\ln\left|\frac{t-iv_0}{t+iv_0}\right|+\frac{c^2}{2}\,\mathrm{Re}\left[\frac{i}{v_0}\frac{1}{t+iv_0}-\frac{1}{(t+iv_0)^2}\right]. \tag{24}$$

Переменная t в этом выражении исключается с помощью соотношения (19). Подставляя (24) в (12) и (13), приходим к искомым выражениям для потенциала.

Используем теперь результаты для расчета потенциала узкого металлического электрода на поверхности полупроводника (при $y_0=0$). Будем считать, что полоса является бесконечно тонкой и имеет ширину по оси x $d\ll R$, где R — определенная выше характерная длина. Установим связь между потенциалом на электроде V и зарядом q.

Сошьем асимптотику решения (12) в области $r\ll R$

$$\varphi(\mathbf{r})\approx 2q\ln\left(\frac{\bar{e}^{1/6}r}{\sqrt{3}\,R}\right), \tag{25}$$

где $\bar{e}$ — основание натурального логарифма, с асимптотикой точного выражения для потенциала металлической полосы в неограниченном диэлектрике при $r\gg d$

$$\varphi(\mathbf{r})\approx V+2q\ln\left(\frac{4r}{d}\right). \tag{26}$$

Приравнивая (25) и (26), получаем

$$|V|=2q\ln\left(\frac{4\sqrt{3}}{\bar{e}^{1/6}}\frac{R}{d}\right). \tag{27}$$

Логарифм в (27) должен считаться большой величиной по сравнению с единицей. С учетом этого уравнение (27) может быть разрешено относительно q. Решая его последовательными приближениями, находим

$$q\approx\frac{|V|}{2\ln\left(\frac{4\sqrt{3}}{\bar{e}^{1/6}}\frac{L_s}{d}\right)}, \tag{28}$$

где $L_s=(|V|/2\pi\epsilon N_i)^{1/2}$ — толщина слоя Шоттки в одномерной задаче.

Дифференциальная емкость C дается формулой

$$C=\frac{dq}{d|V|}\approx\frac{1}{2\ln\left(\frac{4\sqrt{3}\,\bar{e}^{1/3}L_s}{d}\right)}. \tag{29}$$

Приведем некоторые асимптотики. На расстояниях $x \gg R$ ордината y кривой Γ, согласно (21), ведет себя как $y \approx -2\sqrt{3}/9R(R/x)^2$. Потенциал в диэлектрике на больших расстояниях от источника убывает по закону

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx -\frac{8\sqrt{3}\,qR}{9}\frac{y}{r^2}.$$

Наибольшая глубина слоя Шоттки составляет величину $|y_{\max}| = 2\sqrt{3}\,R/3$.

Обсуждение

Представленное в разделе 1 решение не охватывает всех ситуаций в задаче. Нами рассмотрен случай односвязанной области пространственного заряда, т.е. такой области, в которой любой замкнутый контур, лежащий целиком внутри области, непрерывными деформациями стягивается в точку. В действительности ОПЗ может быть многосвязанной. Так, в системе зарядов на рис. 1 при небольшом изменении координаты заряда z_2 "залив" на берегу слоя Шоттки трансформируется во внутреннее "море". Граница слоя Шоттки тогда состоит по меньшей мере из двух контуров. Такая задача решается путем конформного отображения многосвязанной стандартной области на искомую область. В работе [3] рассмотрена подобная задача для периодической цепочки зарядов.

Слой Шоттки может распадаться на несвязанные части. Этот случай реализуется тогда, когда группа зарядов лежит в глубине полупроводника достаточно далеко от его поверхности. В подобном варианте задача решается методом [1].

В указанных ситуациях система уравнений (8), (9) оказывается несовместной. К сожалению, здесь не удается указать формальный критерий, позволяющий ставить диагноз непосредственно по исходным данным. Правильный выбор определяется лишь физическими соображениями.

Метод обобщается на случай непрерывного распределения зарядов на электродах [2]. Можно найти потенциал, создаваемый системой равномерно заряженных полос, параллельных поверхности полупроводника. В отличие от рассмотренной выше задачи требование знакопостоянства зарядов на электродах оказывается необязательным. Необходимо лишь, чтобы потенциал на электродах соответствовал выталкиванию подвижных носителей из слоя Шоттки.

Автор благодарит М.В.Энтина за обсуждения.

Список литературы

[1] *Ефанов А.В., Энтин М.В.* // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. Вып. 4 (10). С. 1299–1303.
[2] *Ефанов А.В., Энтин М.В.* // ФТП. 1987. Т. 21. Вып. 11. С. 2013–2017.
[3] *Ефанов А.В.* // ФТП. 1990. Т. 24. Вып. 5. С. 902–907.
[4] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1965. С. 716.

Институт физики полупроводников
Новосибирск

Поступило в Редакцию
16 июня 1992 г.