

01

©1993 г.

ПРОЗРАЧНОСТЬ СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНЫХ БАРЬЕРОВ И НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

С.Н.Артеха, С.С.Мусеев

Рассматриваются барьеры (волновые, квантово-механические) с флуктуирующими параметрами (шириной, высотой). Показано, что при симметричных флуктуациях барьера как целого происходит его просветление, а мелкомасштабное "дрожание" ухудшает его прозрачность. Введен критерий, разграничивающий эти случаи. Рассмотрены возможные физические применения полученных результатов (локализация, преддиссоциация и др.).

Введение

Известно, что различные параметры физических систем могут испытывать флуктуации около среднего значения, влияние которых взаимно не компенсируется, т.е. усредненная (по соответствующему распределению) физическая величина может весьма существенно отличаться от аналогичной величины в системе без флуктуаций [1]. Одной из таких величин, на которые флуктуации оказывают значительное воздействие, является прозрачность барьера (волнового или квантово-механического), что может иметь приложения к исследованию случайно неоднородных сред [2,3]. "Дрожание" барьера по высоте (ширине) в среднем может быть довольно малым и обусловлено различными физическими причинами, например тепловыми флуктуациями, флуктуациями плотности, экранировкой зарядами и т.д. Однако несмотря на малость изменения параметров барьера в среднем, вклад таких конечных выбросов в среднее значение коэффициента прозрачности D оказывается весьма существенным. Число работ по случайно неоднородным средам очень велико, однако в большинстве из них используются гауссовское приближение и дельта-коррелированность процесса.

В настоящей работе рассматривается довольно широкий класс симметричных флуктуаций и исследуется их влияние на прозрачность барьеров. Это первая особенность. Заметим, что симметрия флуктуационных выбросов часто следует из самой физической постановки задачи. Второй особенностью работы является изучение зависимости прозрачности барьера от различных характеристик флуктуаций, в частности от

их пространственного масштаба. Цель работы — выяснить некоторые общие закономерности просветления при симметричных разномасштабных флуктуациях. При этом естественным образом мы приходим к двум предельным случаям: корреляционная длина случайной функции, описывающей флуктуации барьеров, стремится к бесконечности или к нулю. Если воздействие практически одинаково на характерных расстояниях системы, то такой случайный процесс довольно хорошо аппроксимируется случайным числом, т.е. имеем первый предельный случай. Второй предельный случай реализуется, когда случайные воздействия на систему много меньше (по области своего влияния) характерных размеров системы.

В разделе 1 исследуется прозрачность барьеров при крупномасштабных “дрожаниях”, в разделе 2 исследуется противоположная ситуация, когда имеется быстроизменяющееся в пространственном отношении “дрожание” потенциала, т.е. его мелкомасштабные флуктуации, а также вводится критерий, разграничивающий различные случаи изменения прозрачности барьера. В разделе 3 проводится обобщение теории на двух- и трехмерные случаи. В разделе 4 рассматриваются некоторые применения полученных результатов.

1. Повышение прозрачности барьера при крупномасштабных флуктуациях его параметров

Запишем в одномерном случае для волны k , падающей на однородный слой k_1 толщины L , выражение коэффициента прозрачности [4]

$$D = \frac{4k^2 k_1^2}{4k^2 k_1^2 + (k^2 + k_1^2)^2 \operatorname{sh}^2(2k_1 L)}. \quad (1)$$

Пусть теперь одна из стенок барьера “дрожит” как случайное число $L \rightarrow L + \xi$, т.е. имеется некоторый статистический ансамбль, элементы которого отличаются различными реализациями числа ξ , которое распределено по определенному закону $P(\xi)$. Будем рассматривать симметричные флуктуации: $P(-\xi) = P(\xi)$ (частный пример — гауссовское распределение). Выясним качественно, как меняется $\langle D \rangle$ по сравнению с D нефлуктуирующего слоя. Как следует из рис. 1, для представленной здесь функции $(1/2)[f(y + \xi) + f(y - \xi)] > f(y)$ (точка C выше точки B), при любых $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$, значит $\langle f(y + \xi) \rangle > f(y)$. Легко заметить, что возрастание усредненной функции будет в том случае, если ее выпуклость направлена вниз. Следовательно, вторая производная по ξ от

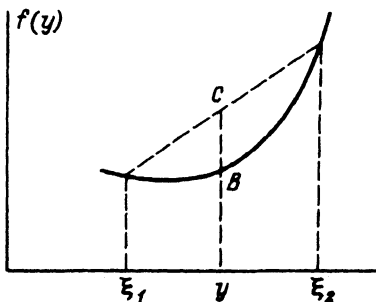


Рис. 1. Увеличение выпуклой вниз функции при усреднении.

$D(L+\xi)$ может дать информацию о том, будет больше усредненный коэффициент прозрачности $\langle D \rangle$ ($D_{\xi\xi} > 0$) или меньше ($D_{\xi\xi} < 0$) по сравнению с D нефлуктуирующего слоя. Кроме того, можно приближенно определить область шума, дающую наибольший эффект. Для оценки верхнего предела усредненной величины бывает полезным “распределение редких выбросов”, когда вся вероятность $P(\xi)$ сосредоточена в двух симметричных относительно $\xi = 0$ точках ξ_1 и ξ_2 .

Вернемся к замене $L \rightarrow L + \xi$. Возможны следующие постановки задачи соответственно для неограниченных и ограниченных флуктуаций: а) левая граница слоя не является “жесткой”, т.е. барьер может, исчезнув, начать расти влево от начала координат $\xi \in (-\infty, +\infty)$; б) левая граница является непроходимой для барьера $\xi \in [-L, L]$. Для определенности возьмем, например, гауссовское распределение. В случае а

$$P(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (2)$$

В случае б

$$P(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| > L, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\Phi\left[\frac{L}{\sqrt{2}\sigma}\right]} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2\sigma^2} \right\}, & |\xi| \leq L, \end{cases} \quad (3)$$

где интеграл вероятности

$$\Phi[x] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy.$$

Физический смысл такого “обрубленного” гауссовского распределения состоит в следующем. Когда мы экспериментально определяем реальную функцию распределения, то вследствие конечной точности любых приборов на графике получаются гистограммные столбики, только сгладив которые можно получить некоторую кривую. Причем вследствие конечности времени наблюдения в реальном опыте число таких столбиков будет конечным. Имеется и другая причина, которая приводит к обрубанию “хвостов” распределения “из первых принципов”: энергия отдельной флуктуации не может превышать энергии всей системы.

Исследовав функцию D , можно качественно построить графики $\langle D \rangle$ в случаях а и б (кривые а и б на рис. 2), т.е. мы видим, что при малой толщине барьерного слоя (по сравнению с длиной падающей волны) флуктуации ухудшают прозрачность барьера; при большой толщине — наоборот: прозрачность флуктуирующего слоя больше, чем нефлуктуирующего; существует некоторая толщина слоя l_0 , при которой данные флуктуации не изменяют прозрачность барьера.

Для квантово-механического барьера

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE},$$

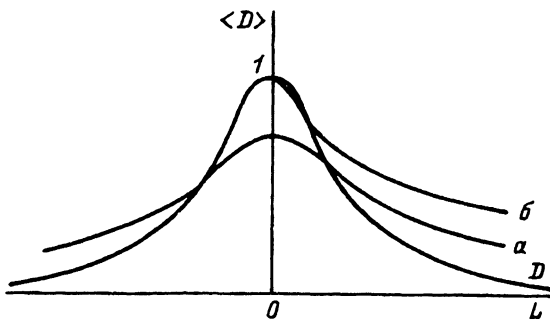


Рис. 2. Изменение средней прозрачности при флуктуациях барьера по ширине.

где m — масса налетающей частицы, E — ее энергия;

$$k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}.$$

Здесь U — потенциальный барьер. Для достаточно сильного ($D \ll 1$) барьера

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}\right). \quad (4)$$

Пусть $L \rightarrow L(1 + \xi)$, где

$$P(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| > 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\Phi\left[\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right]} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right\}, & |\xi| \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Считая ради определенности $D \sim D_0 e^{-4}$, получаем “выигрыш”: при $\sigma \sim \sqrt{2}/8$ $\langle D \rangle/D \sim 1.3$, при $\sigma \sim \sqrt{2}/4$ $\langle D \rangle/D \sim e$ раз. Максимальный “выигрыш” (по “распределению редких выбросов”) $\sim e^4/2$. В случае флуктуаций высоты прямоугольного барьера $U \rightarrow U(1 + \xi)$ необходимо в формуле (1) сделать замену

$$k_1^2 \rightarrow k_1^2(1 + \xi) + k^2\xi. \quad (6)$$

Исследование этой формулы показывает, что при малых L (по сравнению с длиной волны де Бройля) $D_{\xi\xi} < 0$, т.е. флуктуации ухудшают прозрачность, при больших же L , наоборот, прозрачность возрастает при флуктуациях. Можно показать, что для узких барьеров учет сильных “выбросов” (например, надбарьерных реализаций) обеспечивает еще большее уменьшение прозрачности. Это наглядно видно из рис. 3, где приведена зависимость D от ξ в очень растянутом по оси ординат виде. Вблизи точки $\xi = 0$ $D_{\xi\xi} < 0$, т.е. $D(\xi)$ имеет выпуклость вверх. Этот участок $(\xi_1; \xi_2)$, которому соответствуют точки A и T на графике $D(\xi)$, при усреднении прозрачности дает отрицательный вклад (точка C лежит ниже точки B). За точкой A влево (при $\xi < \xi_1$) имеем надбарьерные реализации $U(1 + \xi) < E$. Если бы в этой области прозрачность оставалась равной единице (штриховая кривая 1) и за точкой T прозрачность

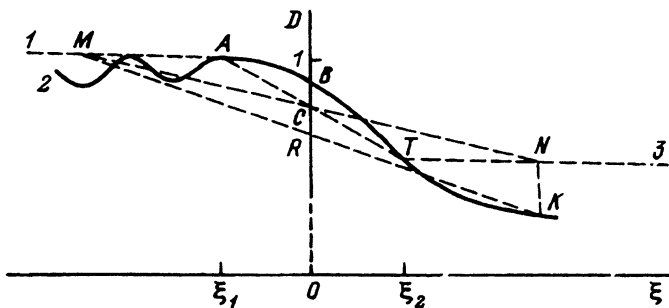


Рис. 3. Доказательство ухудшения прозрачности "узких" барьеров, флуктуирующих по высоте.

тоже не менялась (штриховая кривая 3), то вклад сильных выбросов (середина отрезка MN) изобразился бы точкой C , т.е. средняя прозрачность все равно уменьшилась бы по сравнению с нефлуктуирующей прозрачностью (точка B). Однако за точкой T прозрачность $D(\xi)$ уменьшается и середина отрезка MK (точка R) лежит еще ниже, чем точка C . Кроме того, влево от точки A мы имеем надбарьерные эффекты и $D \leq 1$ (кривая 2), что еще больше уменьшает среднюю прозрачность. Таким образом, флуктуации узких барьеров по высоте приводят к уменьшению их средней прозрачности.

Проведем исследование влияния на прозрачность мультипликативных флуктуаций $U(x) \rightarrow U(x)(1 + \xi)$ в случае сильного барьера произвольной формы, удовлетворяющего условиям применимости ВКБ. В этом случае [4]

$$D = \exp \left\{ -A \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{U(x) - E} dx \right\}, \quad (7)$$

где $A = (2\sqrt{2m/\hbar})$; x_1, x_2 — точки поворота.

Тогда

$$\langle D \rangle = C \int_{-\Delta}^{+\Delta} \exp \left\{ -A \int_{x_1(\xi)}^{x_2(\xi)} \sqrt{U(x) - E} dx \right\} P(\xi) d\xi, \quad (8)$$

где 2Δ — область шума, при которой приближенная формула для D остается справедливой; C — нормировочная постоянная.

Из

$$U(x) = \frac{E}{(1 + \xi)} \quad (9)$$

находятся точки поворота, тогда производные от $D(\xi)$ по ξ

$$D'_\xi(\xi) \sim - \exp\{\dots\} \left[\int_{x_1(\xi)}^{x_2(\xi)} \frac{U(x) dx}{\sqrt{(1 + \xi)U(x) - E}} \right], \quad (10)$$

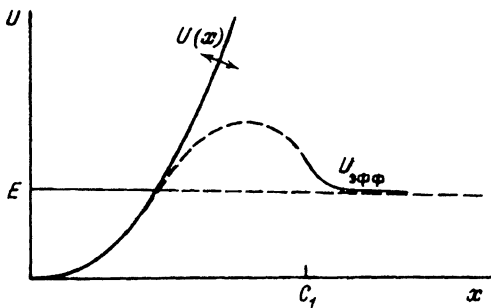


Рис. 4. Эффективный потенциал флуктуирующего гармонического осциллятора.

$$D''_{\xi\xi} \sim \exp\{\dots\} A[\dots]^2 + \exp\{\dots\} \int_{x_1(\xi)}^{x_2(\xi)} \frac{U(x)^2 dx}{2(U(1+\xi) - E)^{3/2}}, \quad (11)$$

где выражения в квадратных и фигурных скобках берутся из сравнения с (8), (10).

Из полученного выражения следует, что для достаточно широких (по сравнению с длиной волны де Бройля) и достаточно высоких (по сравнению с E) барьеров мультипликативный шум увеличивает их проницаемость. В случае же резких границ в формуле (7) появляется коэффициент $D_0(\xi)$

$$D_0 \approx \frac{16E}{U_{эфф} + \xi}.$$

Проведенные исследования не изменяют окончательного вывода. Таким образом, флуктуации потенциала, аппроксимирующиеся случайным числом, приводят к просветлению сильного барьера. Интересным является также "прохождение" бесконечных потенциалов, которые могут описывать связанные системы. В этом случае при флуктуациях эффективный потенциал оказывается гораздо ниже нефлуктуирующего и вероятность обнаружения частицы в любой точке барьерной области существенно повышается, а значит, уменьшается степень локализации частицы в системе. Покажем это на примере (рис. 4)

$$U = \frac{kx^2}{2}, \quad k \rightarrow k(1 + \xi),$$

где ξ распределено по гауссовскому закону.

Определим эффективный потенциал, проникнув в который до данной точки C , частица имеет ту же вероятность обнаружения, что и в случае дрожащего потенциала (коэффициент прозрачности для этого потенциала равен $\langle D \rangle$ флуктуирующего барьера). При опускании ветви параболы ниже E в точке C будем считать, что частица с практически единичной вероятностью достигает этой точки. В квазиклассическом приближении

$$\langle D \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi \left[\left(1 - \frac{E}{U_m} \right) / \sqrt{2} \sigma \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\frac{E}{U_m} - 1}^{x_1} \exp \left\{ - \left[\frac{2\sqrt{2}\mu}{h} \int_{x_1(\xi)}^{x_2(\xi)} \sqrt{U(x)(1+\xi) - E} dx + \frac{\xi^2}{2\sigma^2} \right] \right\} d\xi. \quad (12)$$

Здесь $\Phi[y]$ — интеграл вероятности, $U_m = (kC^2/2)$ (максимальное U), точки поворота $x_2(\xi) = C$ (фиксированная), а $x_1(\xi) = (2E)/(k(1+\xi))$. Легко понять, откуда получился нижний предел в интеграле: при $\xi < (E/U_m) - 1$ парабола лежит ниже точки наблюдения. Рассмотрим третий член в (12). Из структуры показателя экспоненты видно, что для растущего потенциала $U(x)$ при отодвигании верхнего предела x_2 значение выражения в квадратных скобках увеличивается, причем те значения ξ , для которых квадратные скобки минимальны, все больше приближаются к $(E/U_m) - 1$, т.е. к нижнему пределу по ξ ; их вклад в среднее уменьшается. Поэтому начиная с некоторого расстояния C_1 третий член в (12) становится значительно меньше первых двух

$$\langle D \rangle \sim D' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi \left[\left(1 - \frac{E}{U_m} \right) / \sqrt{2}\sigma \right], \quad 0 \leq D' \leq 1/2.$$

Найдем асимптотический вид эффективного потенциала при $x > C_1$

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \left(1 - \frac{2E}{kx^2} \right) \right] \right\} = \exp \left\{ - \frac{2\sqrt{2}\mu}{h} \int_{x_0}^x \sqrt{U_{\text{эфф}} - E} dx \right\}.$$

Взяв логарифмические производные от обеих частей, получим

$$U_{\text{эфф}} = E + \frac{\hbar^2 E^2 R^2}{k^2 \mu \sigma^2} \frac{1}{x^6},$$

где

$$R = \frac{2 \exp\{-1/2\sigma^2\}}{\pi(1 - \Phi[1/\sqrt{2}\sigma])}.$$

Поскольку в действительности $\langle D \rangle$ больше, чем D' , то вероятность обнаружить частицу в некоторой точке еще больше, чем та, которую мы использовали. Следовательно, точный эффективный потенциал на коротких расстояниях все ниже отклоняется от найденного $U_{\text{эфф}}$. Вид асимптотического поведения $U_{\text{эфф}}$ показан на рис. 4 сплошной линией, а возможный вид его на малых расстояниях — штриховой.

2. Прозрачность барьера при его мелкомасштабных флуктуациях

В этом случае можно поступить следующим образом: барьер разбивается на участки L_i , на каждом из них независимо имеют место флуктуации, аппроксимирующиеся некоторым случайным числом (при $L_i \rightarrow 0$ имеем дельта-коррелированное "дрожание"). Выше шла речь о том, что "дрожание" по высоте очень узкого барьера приводит к ухудшению его

прозрачности. Поэтому вполне естественно ожидать, что при независимых флуктуациях каждого i -го барьерчика его эффективный потенциал увеличится, т.е. и эффективный потенциал всего барьера должен возрасти, что означает ухудшение прозрачности барьера. Можно примерно оценить эффективный потенциал, характеризуя каждый прямоугольный i -й барьерчик величиной $D(U_i)$. Потенциал $U_{\rightarrow\phi\phi}$ определится из равенства

$$D(U_{\rightarrow\phi\phi}) = \langle D(U_i(1 + \xi)) \rangle. \quad (13)$$

Разлагая известную формулу (1) для прямоугольного барьера [4] с точностью до L^2 , получим

$$(k^2 + k_{1\rightarrow\phi\phi}^2)^2 = \langle (k^2 + k_1^2(\xi))^2 \rangle,$$

откуда следует

$$U_{\rightarrow\phi\phi}^2 = U^2 Z_1, \quad (14)$$

где

$$Z_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \xi)^2 P(\xi) d\xi = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 P(\xi) d\xi > 1.$$

Для гауссовского распределения $Z_1 = 1 + 2\sigma^2$.

Однако такое рассуждение оказывается приближенно верным только в случае достаточно сильных барьеров, так как предполагает, что прозрачность барьера равна произведению прозрачностей его составных частей, что, конечно же, в общем случае неверно. Проведем более строгое исследование. Выделим произвольно i -й флуктуирующий барьерчик внутри нашего барьера. Его флуктуации независимы от тех реализаций, которые принимают две другие части барьера — справа и слева от выделенного барьерчика. Каждая из этих частей характеризуется комплексными коэффициентами отражения и прохождения (R_1, T_1) , (R_2, T_2) , (R_3, T_3) , причем выражения для R_2 и T_2 можно записать в явном виде. Для волны, падающей из $-\infty$ на барьер, составленный из двух частей, можно просуммировать амплитуды волн и найти суммарный коэффициент прохождения

$$\tilde{T}_{11} = \frac{\tilde{T}_1 \tilde{T}_2}{1 - R_1 \tilde{R}_2}, \quad (15)$$

где \tilde{T}_i — коэффициент прохождения для волны, падающей слева на i -ю часть барьера; R_i — коэффициент отражения для волны, падающей на i -й барьер справа (из $+\infty$).

Аналогично для барьера, составленного из трех частей,

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{T}_{11} \tilde{T}_3}{1 - R_{11} \tilde{R}_3}. \quad (16)$$

Здесь R_{11} характеризует отражение от барьера, составленного из двух частей, для волны, падающей справа,

$$R_{11} = R_2 + \frac{\tilde{T}_2 T_2 R_1 \exp\{2ikL_2\}}{1 - R_1 \tilde{R}_2}, \quad (17)$$

где L_2 — толщина 2-й части барьера.

Для прямоугольного барьера $\tilde{R}_2 = R_2$, $\tilde{T}_2 = T_2$. Окончательная формула для прозрачности

$$D = \frac{D_1 D_2 D_3}{|1 - R_1 R_2 - R_2 R_3 + R_1 R_2^2 R_3 - T_2^2 R_1 R_3 \exp\{2ikL_2\}|^2}. \quad (18)$$

Для нахождения точного значения эффективного потенциала нужно усреднить (18) и решить уравнение

$$D(k, k_{1 \rightarrow \phi\phi}) = \langle D(k, k_1(\xi)) \rangle, \quad (19)$$

что в общем виде аналитически сделать нельзя. Однако формулу (18) можно разложить по степеням L_2 . С точностью до второго члена разложения появляются выражения вида $(k^2 + k_1^2(\xi))^2$, которые показывают, что прозрачность ухудшается. В общем случае

$$U_{\phi\phi} \sim U Z_3, \quad \text{где } 1 < Z_3 < \sqrt{Z_1}.$$

В случае надбарьерного прохождения прозрачность весьма существенно зависит от формы барьера (например, для случая $U(x) = E\xi$ [5]).

Введем качественный критерий, разграничивающий характерные размеры флуктуаций, ухудшающих прозрачность барьера $l \ll l_0$, от характерных размеров флуктуаций, приводящих к возрастанию прозрачности $l \gg l_0$, l_0 — характерный критический размер флуктуаций, при котором прозрачность барьера не меняется. Область размеров $\sim l_0$ требует особого рассмотрения, так как результат сильно зависит не только от характеристик флуктуаций, но и от формы барьера. Если флуктуации улучшают прозрачность отдельно взятого барьерчика ширины l , т.е. его эффективный потенциал становится меньше, то можно ожидать, что и прозрачность всего барьера с флуктуирующими участками таких размеров улучшится. Вследствие того что при произвольной форме барьера могут существовать флуктуирующие участки, как улучшающие, так и ухудшающие прозрачность, исследование проведем для некоторого среднего U_1 . Будем считать, что l_0 — размер, начиная с которого формулу для прозрачности можно приближенно представить в виде экспоненты (выпуклость явно направлена вниз). Для этого нужно

$$(k^2 + k_1^2)^2 \operatorname{sh}^2[k_1 l] > 4k_1^2 k^2, \quad k_1 l > 1. \quad (20)$$

Записав эту систему в виде равенств при $l = l_0$, получим, что

$$l_0 = \max \{l_{01}, l_{02}\},$$

где

$$l_{01} = \frac{1}{k_1}, \quad l_{02} = \frac{1}{k_1} \operatorname{arcsh} [2k_1 k / (k^2 + k_1^2)].$$

Для сильных барьеров при характерных размерах флуктуаций

$$l \gg \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U_1 - E)}}$$

прозрачность флуктуирующего барьера больше прозрачности нефлуктуирующего, в обратном случае прозрачность ухудшается.

В случае неупорядоченных систем полученные выше результаты следует пояснить. Например, для потенциала Кронига-Пенни (исходная $D = 1$) малый разброс барьеров по высоте ("дрожание" барьера как целого) приводит к локализации частиц (локализация Андерсона) [6,7]. Согласно же данной работе (исходная $D \ll 1$), если энергия частицы не попадает в разрешенную зону, то рассмотренные выше флуктуации могут привести к увеличению прозрачности цепочки ($\langle D \rangle$ также спадает экспоненциально с глубиной, но с меньшим показателем).

3. Влияние пространственных неоднородностей потенциала на рассеяние частиц при упругих столкновениях

Результаты, полученные выше, о влиянии флуктуаций потенциала на прозрачность барьеров можно обобщить на двух- и трехмерные случаи. Правда, теперь речь будет идти не о коэффициентах прозрачности или отражения, а о рассеянии частиц на потенциале в некотором направлении. Налетающие частицы можно описать плоской волной $\psi = e^{ikz}$, а рассеянные на угол θ частицы будут описываться для центрально-симметричного поля $U(R)$ вдали от центра расходящейся сферической волной

$$\frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}$$

[4], т.е. волновая функция имеет на больших расстояниях асимптотический вид

$$\psi = e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}. \quad (21)$$

Считая поток частиц ограниченным диафрагмой, запишем эффективное сечение рассеяния $d\sigma$ внутри телесного угла $d\Omega$

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega,$$

где

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Для поля $U(r)$ можно записать [4]

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(S_l - 1) P_l(\cos \theta), \quad (22)$$

где $P_l(x)$ — полиномы Лежандра, l — орбитальный момент, $S_l = e^{2i\delta_l}$, δ_l — фазы рассеяния.

Полное эффективное сечение [4]

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (23)$$

Флуктуации $U(r) \rightarrow U(r)(1 + \xi)$ могут привести в зависимости от вида потенциала как к увеличению, так и к уменьшению эффективного сечения. Действительно,

$$\langle \sigma \rangle = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \langle \sin^2 \delta_l \rangle,$$

а $f = \langle \sin \delta_l^2 \rangle$ может быть как больше, так и меньше нефлуктуирующей функции в зависимости от знака

$$f_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 \delta_l}{\partial \xi^2} \sin 2\delta_l + 2 \frac{\partial \delta_l}{\partial \xi} \cos 2\delta_l. \quad (24)$$

Для больших значений l , когда движение квазиклассично [4],

$$\delta_l = - \int_{r_0}^{\infty} \frac{mU(r)dr}{\hbar^2 \sqrt{k^2 - (l + 1/2)^2/r^2}}. \quad (25)$$

Тогда $f_{\xi\xi} = 2\delta_l \cos 2\delta_l$. По порядку величины (если (25) сходится) $\delta_l \sim mU(r_0)r_0/k\hbar^2$, $r_0 \sim l/k$. Отсюда видно, что при малых $U(r)$ флуктуации увеличивают эффективное сечение рассеяния, а при $U > U_c$ — наоборот, т.е. наблюдается аналогия с одномерным случаем. Для слабого поля $U(x, y, z)$

$$|U| \ll \hbar^2/ma^2 \quad (26)$$

(для любых скоростей частиц) или

$$|U| \ll \hbar^2 ka/ma^2 \quad (27)$$

(для быстрых частиц), где a — радиус действия поля, U — порядок его величины, справедливо борновское приближение [4]

$$d\sigma = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar} \left| \int U e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{v} \right|^2 d\omega, \quad (28)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$; \mathbf{k}, \mathbf{k}' — волновой вектор до и после рассеяния.

В этом случае флуктуации $U(r)$ (ограниченные условиями (26) или (27)) приводят к увеличению эффективного сечения рассеяния $\langle d\sigma \rangle = d\sigma(1 + \langle \xi^2 \rangle)$, $U_{\text{эфф}} = U(1 + \langle \xi^2 \rangle)$, т.е. в трехмерном (и двухмерном) случае можно также ожидать, что при флуктуациях $\xi(r)$, характерные размеры которых меньше некоторых критических r_c , будет увеличиваться эффективное сечение рассеяния. В случае сильных потенциалов и не очень быстрых частиц (не выполнены условия (26), (27)) “дрожание” потенциала как целого может привести как к увеличению, так и к уменьшению эффективного сечения рассеяния (в зависимости от вида потенциала). В качестве примера запишем полное эффективное сечение квазиклассического рассеяния в поле, имеющем при $r > r_0$ вид $U = \alpha/r^n$, $n > 2$ [4],

$$\sigma = 2A\pi^{n/n-1} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{n-3}{n-1} \right) \right] \Gamma \left(\frac{n-3}{n-1} \right) \left[\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n-2)} \right]^{2/(n-1)}. \quad (29)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $A = (\alpha/(\hbar v))^{2/(n-1)}$, $r_0 \sim (\alpha/(\hbar v))^{1/(n-1)}$, условие применимости формулы (29) $m\alpha k^{n-2}/\hbar^2 \gg 1$ (накладывает ограничения на флуктуации). При $U \rightarrow U(1+\xi)$ получим $\langle \sigma \rangle / \sigma = \langle (1+\xi)^{2/(n-1)} \rangle$, т.е. при $2 < n < 3$ флуктуации увеличивают полное эффективное сечение рассеяния, а при $n > 3$ уменьшают его. При $n = 3$, т.е. для $U = \alpha/r^3$, флуктуации не влияют на полное эффективное сечение. Для частиц с малой энергией в поле $U = \alpha/r^n$ ($\alpha > 0$, $n > 3$) [4]

$$f = -\frac{\Gamma\{(n-3)/(n-2)\}}{\Gamma\{(n-1)/(n-2)\}} \left[\frac{j}{(n-2)} \right]^{2/(n-2)}, \quad (30)$$

где $j = (1/\hbar)\sqrt{2\alpha m}$.

Тогда

$$\frac{\langle \sigma \rangle}{\sigma} = \langle (1+\xi)^{2/(n-2)} \rangle,$$

т.е. при $3 < n < 4$ эффективное сечение больше, а при $n > 4$ — меньше. Рассеяние в кулоновом поле приводит к формуле Резерфорда [4]

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{d\sigma}{\sin^4(\theta/2)}.$$

В этом случае сечение рассеяния возрастает

$$\frac{\langle d\sigma \rangle}{d\sigma} = 1 + \langle \xi^2 \rangle.$$

4. Некоторые следствия

Теория, рассмотренная выше, может иметь непосредственные применения к прохождению частиц (или волн) через неоднородный слой, к туннелированию, к локализации частиц в связанных системах и др. Более подробно рассмотрим следствие, связанное с преддиссоциацией молекул. Как известно [4], в этом случае вероятность перехода

$$\omega = 2 \exp \left[-\frac{2\pi U^2}{\hbar v |F_2 - F_1|} \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{2\pi U^2}{\hbar v |F_2 - F_1|} \right] \right\}, \quad (31)$$

где $U(r)$ — возмущающая энергия; $F_i = -dV_i/dr$, V_i — потенциальная энергия для i -го атома; v — общее значение скоростей ядер в точке пересечения потенциалов; $U^2 \ll \hbar v |F_2 - F_1|$.

С учетом того что каждая молекула находится в индивидуальных условиях, необходимо считать возмущающую энергию флуктуирующей $U(r) \rightarrow U(r)(1+\xi)$. Выясним, является ли это стабилизирующим фактором для системы или дестабилизирует ее (найдем соответствующие области). При $\xi = 0$ условие возрастания вероятности $\omega_{\xi\xi} > 0$ дает

$$2 \exp\{-A\}(1-4A) > 1-2A, \quad A = \frac{2\pi U^2}{\hbar v |F_2 - F_1|} \quad (A \ll 1).$$

Таким образом, при $A < A_0$, где $A_0 \approx 1/7$, эффективная возмущающая энергия оказывается больше средней возмущающей энергии; если же $A > A_0$, то ситуация противоположная, т.е. одни молекулы стабилизируются, другие дестабилизируются.

Еще одно следствие касается термоэлектронной эмиссии. Запишем уравнение Ричардсона для плотности тока

$$j = BT^2 \exp \left\{ -\frac{A}{kT} \right\}, \quad (32)$$

где B — константа Ричардсона, k — постоянная Больцмана, T — температура, A — работа выхода материала катода (т.е. электрону необходимо преодолеть потенциальный барьер).

Величина A уже является некоторой средней характеристикой (такими являются все феноменологические константы). Сделать ее переменной можно, либо пустив по поверхности металла электромагнитную волну, либо облучая катод квантами, энергия которых недостаточна для фотоэффекта. В случае неоднородности катода величина A также будет случайной. Тогда $A \rightarrow A(1 + \xi)$. Считая ξ распределенной по обрубленному гауссовскому распределению от -1 до $+1$, получим изменение эмиссионного тока

$$\frac{\langle j \rangle}{j} = \frac{1}{2\Phi[1/\sqrt{2}\sigma]} \left[\Phi \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{A\sigma}{\sqrt{2}kT} \right) \pm \Phi \left(\left| \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} - \frac{A\sigma}{\sqrt{2}kT} \right| \right) \right] \exp \left\{ \frac{A^2\sigma^2}{2k^2T^2} \right\},$$

т.е. средний эмиссионный ток возрастает (эффективная работа выхода меньше средней работы выхода).

Заключение

Таким образом, в работе исследовано влияние малых симметричных флуктуаций на прозрачность сильных ($D \ll 1$) барьеров и доказано, что крупномасштабные (в сравнении с длиной волны де Бройля) неоднородности приводят к просветлению барьера, в то время как мелкомасштабные неоднородности ухудшают его прозрачность. Введен критерий, разграничивающий эти случаи.

Список литературы

- [1] Лифшиц И.М., Гродескул С.А., Пастур Л.А. Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982. 358 с.
- [2] Вальков А.Ю., Романов В.П., Тупясова Т.И. // ЖЭТФ. 1991. Т. 99. Вып. 4. С. 1283–1301.
- [3] Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1963. 702 с.
- [5] Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975. 240 с.
- [6] Anderson P.W. // Phys. Rev. 1958. Vol. 109. N 5. P. 1492–1505.
- [7] Мотт Н. Переходы металл-изолятор. М.: Наука, 1979. 342 с.

Институт космических исследований
Москва

Поступило в Редакцию
22 июля 1992 г.