01;07

СОЛИТОНЫ В СРЕДЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ЛИНЕЙНОЙ ДИСПЕРСИИ

В.Я.Хасилев

Для среды с произвольным законом линейной дисперсии, представимой в виде полинома, получено уравнение для огибающей и методом обратной задачи рассеяния найдены солитонные решения. Возможность существования солитонов связана с компенсацией дисперсии высших порядков нелинейными членами. Показано, что по результатам измерений скорости распространения солитонов с различной амплитудой можно восстановить закон линейной дисперсии среды.

В нелинейной оптике волоконных световодов [1–5], а также в других разделах физики при рассмотрении нелинейных волн в среде с дисперсией широко используется нелинейное уравнение шредингеровского типа (НУШ) для огибающей $V(z,t)$

$$iV_z + V_{tt} + 2\left|V\right|^2 V = 0, \tag{1}$$

где использованы стандартные безразмерные переменные z — координата вдоль направлениия распространения, t — время в системе отсчета движущейся с групповой скоростью.

Уравнение (1) применимо при выполнении условия медленно меняющихся амплитуд

$$V_t V^{-1} \ll \omega_0,$$

где ω_0 — частота несущей.

Солитонные решения (1) имеют вид [6]

$$V(z,t) = \frac{2\eta}{\mathrm{ch}\,(2\eta(t+4\xi z))} \exp\left[-2i\xi\left(t + 2(\xi^2-\eta^2)z/\xi\right)\right], \tag{2}$$

где η и ξ — произвольные постоянные, определяющие амплитуду и длительность солитона, а также его перемещение в бегущей системе координат.

Солитоны сохраняют свои параметры при распространении и восстанавливают их после столкновений с другими солитонами. На качественном уровне такое поведение солитонов объясняется компенсацией дисперсионного уширения импульсов нелинейным самосжатием. Отметим, что такая компенсация возможна только для импульсов вполне определенной формы и амплитуды, задаваемой выражением (2).

Рассмотрим среду, в которой в пределе малых амплитуд линейный закон дисперсии описывается полиномом степени N с произвольными действительными коэффициентами

$$k - k_0 = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n(z)(\omega - \omega_0)^n, \tag{3}$$

где k — волновой вектор, нулевой индекс относится к несущей частоте.

Ниже будет показано, что при определенном виде нелинейности в такой среде возможно распространение солитонов огибающей, параметры которых отличаются от параметров солитонов (2). Рассмотрим задачу рассеяния Захарова–Шабата [6]

$$\begin{aligned} v_{1,t} + i\zeta v_1 &= U v_2, \\ v_{2,t} - i\zeta v_2 &= -U^* v_1, \end{aligned} \tag{4}$$

где $v_{1,2}(t;\zeta,z)$, $\zeta = \xi + i\eta$ — собственные функции и собственные значения; $U(z,t)$ — рассеивающий потенциал.

Введем уравнения, определяющие зависимость собственных функций от z,

$$\begin{aligned} v_{1,z} &= A v_1 + B v_2, \\ v_{2,z} &= C v_1 + D v_2, \end{aligned} \tag{5}$$

где коэффициенты A, B, C, D могут зависеть от потенциала $U(z,t)$, от его производных по t и от ζ.

Выполняя дифференцирование (4) по z и (5) по t и исключая смешанные производные, получим условие совместности переопределенной системы уравнений (4) и (5)

$$A_t = UC + U^* B, \tag{6а}$$

$$B_t + 2i\zeta B = (D - A)U + U_z, \tag{6б}$$

$$C_t - 2i\zeta C = (D - A)U^* - U_z^*, \tag{6в}$$

$$D_t = -A_t. \tag{6г}$$

Будем искать решение системы (6) в виде полинома по степеням ζ

$$A = \sum_{n=0}^{N} A_n \zeta^n, \qquad B = \sum_{n=0}^{N} B_n \zeta^n, \qquad C = \sum_{n=0}^{N} C_n \zeta^n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ, получим систему из $4(N+1)$ зацепляющихся дифференциальных уравнений. Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащая производные по t, имеет решение, зависящее от $4(N+1)$ констант интегрирования, являющихся функциями z. Некоторые из этих функций, как будет видно в дальнейшем, можно задать таким образом, чтобы в линейном пределе получить закон дисперсии (3). Решая эту систему начиная с больших значений n, получим

$$B_N = 0, \qquad C_N = 0, \qquad A_n = a_n(z),$$

$$B_{N-1} = ia_N U, \qquad C_{N-1} = -ia_N U^*, \qquad A_{N-1} = a_{N-1}(z),$$

$$B_{N-2} = ia_{N-1}U - a_N\frac{U_t}{2}, \qquad C_{N-2} = -ia_{N-1}U^* - \frac{a_N}{2}U_t^*,$$

$$A_{N-2} = -\frac{a_N}{2}UU^* + a_{N-2}(z),$$

$$B_{N-3} = ia_{N-2}U - \frac{a_{N-1}}{2}U_t - \frac{ia_N}{4}U_{tt} - \frac{ia_N}{2}U^2U^*,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .,$$

где $a_i(z)$ — произвольные функции z.

Система уравнений решается при произвольном конечном N. В нулевом порядке по ζ из (6б) и (6в) получаются нелинейные уравнения в частных производных, которым должны удовлетворять функции U и U^*. Ограничиваясь значением $N = 5$, получим уравнения для U и U^* в виде

$$U_z - 2a_0U - ia_1U_t + \frac{a_2}{2}\left(U_{tt} + 2|U|^2U\right) + \frac{ia_3}{4}\left(U_{ttt} + 6|U|^2U_t\right) -$$

$$-\frac{a_4}{8}\left(U_{tttt} + 6|U|^4U + 8|U|^2U_{tt} + 4|U_t|^2U + 6U_t^2U^* + 2U^2U_{tt}^*\right) -$$

$$-\frac{ia_5}{16}\Big(U_{ttttt} + 30|U|^4U_t + 10|U|^2U_{ttt} + 10|U_t|^2U_t + 20U_{tt}U_tU^* +$$

$$+10U_{tt}^*UU_t + 10U_{tt}UU_t^*\Big) = 0, \tag{7а}$$

$$U_z^* + 2a_0U^* - ia_1U_t^* - \frac{a_2}{2}\left(U_{tt}^* + 2|U|^2U^*\right) + i\frac{a_3}{4}\left(U_{ttt}^* + 6|U|^2U_t^*\right) +$$

$$+\frac{a_4}{8}\left(U_{tttt}^* + 6|U|^4U^* + 8|U|^2U_{tt}^* + 4|U_t|^2U^* + 6UU_t^{*2} + 2U^{*2}U_{tt}\right) -$$

$$-\frac{ia_5}{16}\Big(U_{ttttt}^* + 30|U|^4U_t^* + 10|U|^2U_{ttt}^* + 10|U_t|^2U_t^* + 20U_{tt}^*UU_t^* +$$

$$+10U_{tt}U_t^*U^* + 10U_{tt}^*U_tU^*\Big) = 0. \tag{7б}$$

Сравнивая уравнение (7а) и комплексно сопряженное (7б), находим ограничение на коэффициенты a_n: $\mathrm{Re}(a_n) = 0$. Для того чтобы удовлетворить закону дисперсии (3), введем обозначения $2a_0 = i\alpha_0$, $a_1 = i\alpha_1$, $a_2 = 2i\alpha_2$, $a_3 = 4i\alpha_3$, $a_4 = 8i\alpha_4$, $a_5 = 16i\alpha_5$, где α_n —функции z, совпадающие с коэффициентами в разложении (3). После этого (7а) примет вид

$$U_z - i\alpha_0U + \alpha_1U_t + i\alpha_2\left(U_{tt} + 2|U|^2U\right) - \alpha_3\left(U_{ttt} + 6|U|^2U_t\right) -$$

$$-i\alpha_4\left(U_{tttt} + 6|U|^4U + 8|U|^2U_{tt} + 4|U_t|^2U + 6U_t^2U^* + 2U^2U_{tt}^*\right) +$$

$$+\alpha_5\Big(U_{ttttt} + 30|U|^4U_t + 10|U|^2U_{ttt} + 10|U_t|^2U_t + 20U_{tt}U_tU^* +$$

$$+10U_{tt}^*UU_t + 10U_{tt}UU_t^*\Big) = 0. \tag{8}$$

Для нахождения солитонных решений уравнения (8) необходимо решать прямую и обратную задачи рассеяния для (4), что осуществляется аналогично [6]. Однако эволюция данных рассеяния, определяемая из (5), имеет иной вид. Рассмотрим асимптотический (при $|t| \to \infty$, $|U| \to 0$) вид уравнения (5). При этом

$$B, C \to 0, \qquad A \to \sum_{n=0}^{N} a_n(z)\zeta^n \equiv \bar{A}(z,\zeta)$$

и (5) сводится к виду

$$v_{1,z} = \bar{A}v_1, \qquad v_{2,z} = -\bar{A}v_2.$$

Определяя коэффициенты отражения $b(\zeta, z)$ аналогично [6], получим

$$b_z(\zeta, z) = -2\bar{A}b(\zeta, z),$$

откуда

$$b(\zeta, z) = b(\zeta, 0)\exp(-2F), \tag{9}$$

$$F(\zeta, z) = \sum_{n=0}^{N} f_n(z)\zeta^n, \qquad f_n(z) = \int_0^z a_n(z')dz'. \tag{10}$$

В частном случае, когда коэффициенты a_n не зависят от z, получаем $F = \bar{A}(\zeta) \cdot z$, что позволяет получить результаты, аналогичные [7], при этом, если $N = 2$, воспроизводятся результаты работы [6].

Используя (9) и (10), получим односолитонное решение в виде

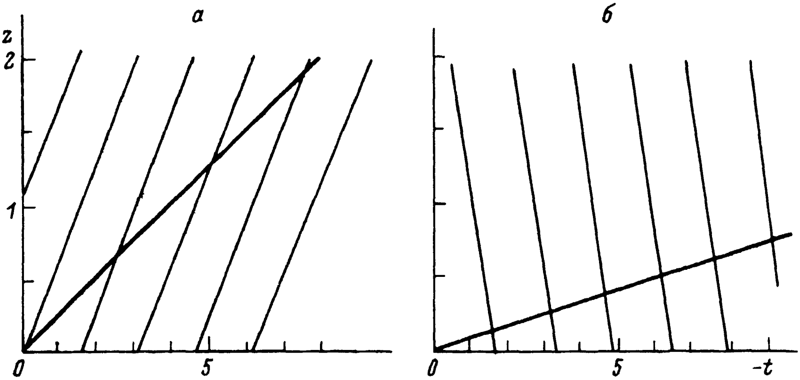
$$U(z,t) = \frac{2\eta}{\operatorname{ch}\left(2\eta t + 2\operatorname{Re} F(\zeta, z)\right)} \exp\left[-i\left(2\xi t - 2\operatorname{Im} F(\zeta, z)\right)\right]. \tag{11}$$

Сравнивая с односолитонным решением НУШ (2), видим, что солитоны уравнения (8) имеют другую скорость. Расстояние z солитон (11) проходит с задержкой $\Delta t = -\operatorname{Re} F/\eta$ вместо $\Delta t = -4\xi z$ в случае НУШ. Кроме этого, солитон (11) приобретает набег фазы осциллирующего множителя $2\operatorname{Im} F$ вместо $4(\eta^2 - \xi^2)z$ в случае НУШ.

На рисунке показаны траектории движения максимума огибающей и линии постоянного значения фазы осциллирующего множителя для солитонов (2) и (11) при одинаковых собственных значениях задачи рассеяния $\zeta = 1 + i/2$. При этом коэффициенты в уравнении (8) выбраны следующим образом: $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -0.2$, $\alpha_4 = -0.1$, $\alpha_5 = -0.1$. Видно, что совпадающие при $z = 0$ солитоны при увеличении z расходятся и приобретают различный набег фазы осциллирующего множителя.

Отметим, что, подставляя в (11) другое собственное значение задачи рассеяния $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$, можно получить не только совпадение амплитуды и формы солитонов (2) и (11), что обеспечивается выбором $\eta_2 = \eta_1$, но и обеспечить одинаковые скорости движения их огибающей при выполнении условия

$$\operatorname{Re} F(\zeta_2, z) = 4\eta_1\xi_1 z.$$



Траектория движения максимума огибающей и линии постоянного значения фазы осциллирующего множителя для солитонов НУШ (*а*) и солитонов уравнения с дисперсией пятого порядка (*б*).

Поскольку η_2 уже определено, то последнее соотношение можно рассматривать как уравнение для ξ_2. На этом возможности "подгонки" параметров солитонов исчерпываются, у них остаются различающиеся фазовые множители. Таким образом, в общем случае солитоны уравнения (8) не сводимы к солитонам НУШ. В пределе малых амплитуд уравнение (8) имеет линейный аналог

$$U_z - i\alpha_0 U + \alpha_1 U_t + i\alpha_2 U_{tt} - \alpha_3 U_{ttt} - i\alpha_4 U_{tttt} + \alpha_5 U_{ttttt} = 0.$$

При этом дисперсионное уравнение для бегущей волны $e^{i((k-k_0)z-(\omega-\omega_0)t)}$ имеет вид

$$k - k_0 = \sum_{n=0}^{5} \alpha_n(z)(\omega - \omega_0)^n, \tag{12}$$

что совпадает с (3) при $N = 5$.

С учетом того что коэффициенты α_n произвольны, соотношение (12) описывает линейную дисперсию среды достаточно общего вида. Для существования солитонов в такой среде необходимо компенсировать дисперсионное расплывание импульсов нелинейными эффектами. В случае НУШ, которое получается из (8) при $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$, дисперсия второго порядка, соответствующая члену U_{tt}, компенсируется керровской нелинейностью, которой соответствует член вида $2\left|U\right|^2 U$. Для компенсации дисперсии третьего порядка, соответствующей члену U_{ttt}, необходим нелинейный член вида $6\left|U\right|^2 U_t$. Компенсация дисперсии более высокого порядка требует уже нескольких нелинейных членов в уравнении. При этом в каждом порядке разложения k по степеням ω компенсация происходит независимо.

Подставляя в (8) выражение для бегущей волны с постоянной амплитудой $Ee^{i((k-k_0)z-(\omega-\omega_0)t)}$, можно получить нелинейный аналог дисперсионного соотношения (12)

$$k-k_0 = \alpha_0+\alpha_1(\omega-\omega_0)+\alpha_2\left((\omega-\omega_0)^2 - 2E^2\right)+\alpha_3\left((\omega-\omega_0)^3 - 6E^2(\omega-\omega_0)\right)+$$

$$+\alpha_4\left((\omega-\omega_0)^4+6E^4-12E^2(\omega-\omega_0)^2\right)+$$
$$+\alpha_5\left((\omega-\omega_0)^5+30E^4(\omega-\omega_0)-20E^2(\omega-\omega_0)^3\right). \qquad (13)$$

Полученное соотношение задает нелинейные свойства среды, в которой при произвольном законе линейной дисперсии возможно существование солитонов вида (11).

Отметим, что в обычных световодах существуют потери, которые могут приводить к расплыванию солитонов. В связи с этим в наиболее перспективных в практическом отношении линиях связи используются световоды, по длине которых распределены участки с усилением на рабочей длине волны [8]. Поэтому в данном случае, а также при рассмотрении прохождения солитонов через световоды небольшой длины потерями можно пренебречь.

Рассмотрим возможность экспериментального использования полученных результатов. Если на вход среды при $z=0$ подавать солитоны вида
$$U(t,0)=\frac{2\eta}{\operatorname{ch}2\eta t}$$
($\xi=0$, $\zeta=i\eta$), то солитоны НУШ будут поступать на выход среды ($z=z_0$) с нулевой задержкой (в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью), а солитоны (11) будут поступать с задержкой $\Delta t=-\operatorname{Re}F(\zeta)/\eta$ и дополнительным набегом фазы $\Delta\varphi=2\operatorname{Im}F(\zeta)$. Если теперь измерять Δt и $\Delta\varphi$ при различных значениях амплитуды солитонов, то при достаточном количестве измерений можно будет восстановить коэффициенты полинома $\bar{A}(\zeta)$, дающего закон линейной дисперсии для импульсов малой амплитуды. Для среды с дисперсией пятого порядка достаточно серии из пяти измерений.

Отметим, что определение закона линейной дисперсии среды из характеристик распространения импульсов малой амплитуды затруднено вследствие их дисперсионного расплывания. В случае солитонов такое расплывание отсутствует, а дисперсия высших порядков приводит лишь к изменению скорости их распространения и дополнительному набегу фазы.

Список литературы

[1] *Hasegava A., Tappert F.* // Appl. Phys. Lett. 1973. Vol. 23. P. 142–144.
[2] *Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С.* // УФН. 1986. Т. 149. С. 450–509.
[3] *Дианов Е.М., Прохоров А.М.* // УФН. 1986. Т. 143. С. 289–311.
[4] *Петрунькин В.Ю., Селищев А.В., Щербаков А.С.* // Опт. и спектр. 1988. Т. 64. Вып. 3. С. 698–700.
[5] *Петрунькин В.Ю., Селищев А.В., Щербаков А.С.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 1. С. 112–114.
[6] *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. Вып. 1. С. 118–134.
[7] *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 479 с.
[8] *Mollenauer L.F., Gordon J.P., Islam M.N.* // IEEE J. Quant. Elektron. 1986. Vol. 22. N 1. P. 157–173.

Ростовский-на-Дону университет
Научно-исследовательский институт физики

Поступило в Редакцию
20 декабря 1991 г.
В окончательной редакции
17 июня 1992 г.