

01;10

©1993 г.

ПРОХОЖДЕНИЕ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С.Д.Ковалев, А.И.Кузовлев, Д.Б.Рогожкин

Рассмотрен вопрос о распределении быстрых заряженных частиц в узком пучке, проходящем через вещество в однородном магнитном поле. Параметры распределения частиц вычислены как в малоугловом приближении, так и без него с помощью решения уравнения переноса методом моментов. Проведено сопоставление результатов, полученных обоими методами, и показано, что из-за вращения вокруг силовых линий поля ослабляется зависимость поперечного смещения частиц от направления их распространения. Обнаружен также эффект антикорреляции значений глубины проникновения частиц в вещество и их поперечного смещения, который свидетельствует об относительном подавлении отклонений обратнорассеянных частиц от оси пучка.

Введение

Информация о распространении быстрых заряженных частиц через вещество в магнитном поле представляет интерес для многих задач физики высоких энергий, астрофизики и физики Земли [1-7]. Расчеты функции распределения частиц во внешнем поле проводились как методами численного моделирования [5,6], так и на основе приближенного аналитического решения уравнения переноса [1,2,4,8-12]. К настоящему моменту известны аналитические решения соответствующей задачи для ряда предельных случаев: в отсутствие потерь энергии [8,10-12], а также с учетом неупругих соударений при ультрарелятивистских энергиях частиц [9].

Случай чисто упругого рассеяния [8,10-12] проанализирован наиболее подробно. На основе решения уравнения переноса в малоугловом диффузионном приближении найдена функция распределения заряженных частиц в узком пучке как движение частиц вдоль поля \mathbf{H} [8], так и при произвольной ориентации начальной скорости частиц относительно вектора напряженности магнитного поля [10]. Особенности азимутального углового распределения частиц в широком пучке при движении вдоль силовых линий поля рассмотрены недавно в [12]. В работе [11] функция распределения частиц найдена в более общей постановке — с учетом искривления траекторий частиц при многократном упругом рассеянии.

Этот эффект оказывается важным при расчете интенсивности магнитотормозного излучения [4].

Что касается вопроса о влиянии потерь энергии частиц на распространение пучка в магнитном поле, то этот вопрос исследовался главным образом численными методами [5,6]. Аналитические результаты относятся только к случаю ультрарелятивистских энергий частиц ($T_0 \gg mc^2$, T_0 — кинетическая энергия, m — масса частицы, c — скорость света) [9].

Следует отметить, что в работах [8–12] существенно использовалось малоугловое приближение, а также не рассматривался вопрос о совместном влиянии многократного рассеяния и потерь энергии на распределение частиц в веществе, что оказывается важным, в частности, на глубинах, сравнимых с полным пробегом.

В настоящей работе подробно проанализировано распределение быстрых заряженных частиц в узком пучке, распространяющемся через вещество вдоль силовых линий магнитного поля. В малоугловом диффузионном приближении найдено решение уравнения переноса с учетом как систематических потерь энергии (раздел 2), так и флуктуаций энергетических потерь из-за искривления траекторий частиц при многократном упругом рассеянии (раздел 3). Полученные результаты обобщают на случай движения в магнитном поле известные решения [13,14], найденные при достаточно общих предположениях для $H = 0$. Даны в явном виде простые выражения для основных характеристик пучка в среде — значений среднего квадрата поперечного смещения частиц относительно оси пучка и средней глубины проникновения частиц в вещество. Те же характеристики вычислены также и без использования малоуглового приближения на основе решения переноса методом моментов (раздел 4). Существенно, что найденные этим методом результаты справедливы как для тяжелых ($m \gg m_e$, m_e — масса электрона) частиц, так и для легких (электронов позитронов). Для последних применение малоуглового приближения, вообще говоря, оправдано только в области малых потерь энергии.

Метод моментов позволяет установить пределы применимости малоуглового приближения. Для быстрых тяжелых заряженных частиц результаты обоих подходов совпадают. Что касается электронов, то для них различия в результатах вычислений поперечных размеров пучка в легких средах ($Z \lesssim 20$, Z — порядковый номер атомов среды) незначительны, однако с ростом Z постепенно увеличиваются. Относительно небольшие различия результатов, полученных при решении уравнения переноса в малоугловом приближении и методом моментов, связаны с подавлением из-за вращения в магнитном поле зависимости поперечного смещения частиц от направления их распространения.

1. Постановка задачи

Пусть на однородную среду вдоль магнитного поля \mathbf{H} падает узкий пучок заряженных частиц с кинетической энергией T_0 . Считаем, что напряженность магнитного поля H невелика ($r_H \gg a^2/\lambda$, $r_H = (pc)/(z_1 e H)$ — ларморовский радиус [15], a — атомный размер, λ — длина волны частицы, p — импульс частицы, $z_1 e$ — заряд частицы) и магнитное поле не влияет на процесс однократного рассеяния.

Совместим начало координат с точкой влета пучка в среду, ось Z направим вдоль магнитного поля. Тогда уравнение переноса для плотности потока частиц $N(\mathbf{r}, \Omega, T)$ можно записать в виде [14]

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} N - \frac{1}{r_H} \frac{\partial}{\partial \varphi} N = n_0 \int d\Omega' \frac{d\sigma}{d\Omega'} (T|\Omega', \Omega) [N(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\Omega}', T) - N(\mathbf{r}, \Omega, T)] + \hat{I}_{in} \quad (1)$$

с граничным условием

$$N(z=0, \rho, \Omega, T) = \delta(\rho) \frac{\delta(1 - \cos \theta)}{2\pi} \delta(T - T_0). \quad (2)$$

В (1), (2) Ω — единичный вектор, указывающий направление скорости частиц, в сферической системе координат Ω имеет вид $\Omega = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$; θ, φ — полярный и азимутальный углы; $\rho = (x, y)$; n_0 — число атомов в единице объема среды; $(d\sigma/d\Omega)(T|\Omega', \Omega)$ — сечение упругого рассеяния из состояния Ω' в состояние Ω ; \hat{I}_{in} — интеграл неупругих столкновений [14].

В приближении непрерывного замедления [14]

$$\hat{I}_{in} = \frac{\partial}{\partial T} [\bar{\varepsilon}(T)N(\mathbf{r}, \Omega, T)], \quad (3)$$

где $\bar{\varepsilon}(T)$ — тормозная способность среды.

Для быстрых заряженных частиц тормозная способность определяется формулой Бете-Блоха [14]

$$\bar{\varepsilon}(T) = 4\pi n_0 r_e^2 Z z_1^2 m_e c^2 \frac{(E+1)^2}{E(E+2)} L_{ion}(E), \quad (4)$$

где r_e — классический радиус электрона ($\pi n_0 r_e^2 \approx 0.15(\rho_0/A)$, ρ_0 — плотность среды), Z и A — порядковый номер и атомный вес атомов вещества, m_e — масса электрона, $E = T/(mc^2)$ — кинетическая энергия частицы в единицах энергии покоя, L_{ion} — ионизационный логарифм.

В [14] указано, как в случае необходимости обобщить (3) с учетом флуктуаций энергетических потерь в неупругих соударениях. Ниже на вопросе о влиянии разброса потерь энергии на распределение частиц останавливаться не будем.

В приближении непрерывного замедления существует однозначная связь между энергией частицы T и длиной пути S , пройдя который частица потеряет энергию $T_0 - T$ [14]

$$S(T) = \int_T^{T_0} \frac{dT'}{\varepsilon(T')} = R_0 - R(T), \quad (5)$$

где $R(T)$ — средний пробег частицы с энергией T , $R_0 = R(T_0)$.

Воспользовавшись соотношением (5) в уравнении (1), можно перейти к новой переменной S . В результате для $N(\mathbf{r}, \Omega, S) = \varepsilon(T)N(\mathbf{r}, \Omega, T)$ получаем уравнение

$$\left(\Omega \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{r_H} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) N = n_0 \int d\Omega' \frac{d\sigma}{d\Omega'} (S|\Omega', \Omega) [N(\mathbf{r}, \Omega', S) - N(\mathbf{r}, \Omega, S)] - \frac{\partial}{\partial S} N \quad (6)$$

с граничным условием

$$N(z = 0, \rho, \Omega, S) = \delta(\rho) \frac{\delta(1 - \cos \theta)}{2\pi} \delta(S). \quad (7)$$

Прежде чем перейти к решению уравнений (6), (7), напомним, как происходит процесс многократного рассеяния в отсутствие магнитного поля ($r_H \rightarrow \infty$). Как показано в [14], изотропизация углового распределения частиц наступает на длине l_i , удовлетворяющей уравнению

$$\int_0^{l_i} \frac{dS}{l_{tr}(S)} = 1, \quad (8)$$

где l_{tr} — транспортная длина упругого рассеяния

$$l_{tr}(T) = (8\pi n_0 r_e^2 Z(Z+1)z_1^2)^{-1} \left(\frac{m}{m_e} \right)^2 \frac{E^2(E+2)^2}{(E+1)^2} L_c^{-1}(E), \quad (9)$$

$L_c(E)$ — кулоновский логарифм.

Пренебрегая зависимостью L_{ion} и L_c от энергии, на основе (8), (9) находим

$$l_i = R_0 \left[1 - \frac{4(E_0 + 1) \exp\left(-\frac{1}{\gamma}\right)}{(E_0 + 2)^2 - E_0^2 \exp\left(-\frac{1}{\gamma}\right)} \right], \quad \gamma = \frac{1}{2}(Z+1) \left(\frac{m_e}{m} \right) \frac{L_c}{L_{ion}}. \quad (10)$$

Для быстрых тяжелых ($m \gg m_e$) частиц параметр $\gamma \ll 1$, и из (10) следует $l_i \approx R_0$, т.е. изотропизация наступает только в самом конце пути. Это обстоятельство позволяет всегда использовать для тяжелых частиц малоугловое приближение.

Для быстрых электронов ситуация иная. Параметр $\gamma \gtrsim 1$ и $l_i \approx R_0$ только в области ультрарелятивистских энергий ($E_0 \gg 1$). В области нерелятивистских энергий ($E_0 \ll 1$) параметр γ меньше единицы и

$$l_i = R_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{l_{tr}(T_0)}{R_0}\right) \right].$$

В частности, в тяжелых средах ($Z \gg 1$), $l_{tr}(T_0) \ll R_0$ и $l_i \approx l_{tr}(T_0)$, т.е. поток электронов изотропизуется гораздо раньше, чем частицы остаются. Таким образом, применение малоуглового приближения для электронов возможно далеко не всегда и требует дополнительного обоснования.

2. Решение уравнения переноса в стандартном малоугловом приближении

Для интеграла упругих столкновений заряженных частиц, как обычно [14], будем использовать диффузионное приближение

$$\begin{aligned} \hat{I}_{el} &= n_0 \int d\Omega' \frac{d\sigma}{d\Omega'} (S|\Omega', \Omega) [N(\mathbf{r}, \Omega', S) - N(\mathbf{r}, \Omega, S)] \approx \\ &\approx \frac{1}{2l_{tr}(S)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] N. \end{aligned} \quad (11)$$

Предполагая также, что частица в среде мало отклоняется от направления своего первоначального движения, воспользуемся малоугловым разложением коэффициентов уравнения переноса. Это приближение хорошо обосновано для быстрых тяжелых заряженных частиц [13,14].

Подставим (11) в уравнение (6) и проведем разложение по малому углу θ . Удерживая только линейные по θ члены в левой части (6) (стандартное малоугловое приближение), для плотности потока частиц $N(\mathbf{r}, \Omega, S)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial z} + \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{r_H(S)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] N = \\ = \frac{1}{2l_{tr}(S)} \left[\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\theta^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] N - \frac{\partial}{\partial S} N, \end{aligned} \quad (12)$$

$$N(z=0, x, y; \theta, \varphi; S) = \delta(x)\delta(y) \frac{\delta(\theta)}{2\pi\theta} \delta(S). \quad (13)$$

В уравнении (12) удобно перейти от полярного угла θ и азимутального угла φ к переменным $\theta_x = \theta \cos \varphi$ и $\theta_y = \theta \sin \varphi$, которые в малоугловом приближении представляют собой углы между вектором Ω и плоскостями $Y0Z$ и $X0Z$ соответственно. В результате имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial z} + \theta_x \frac{\partial}{\partial x} + \theta_y \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\theta_x}{r_H(S)} \frac{\partial}{\partial \theta_x} + \frac{\theta_y}{r_H(S)} \frac{\partial}{\partial \theta_y} \right] N = \\ = \frac{1}{2l_{tr}(S)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_y^2} \right] N - \frac{\partial}{\partial S} N, \end{aligned} \quad (14)$$

$$N(z=0, x, y; \theta_x, \theta_y; S) = \delta(x)\delta(y)\delta(\theta_x)\delta(\theta_y)\delta(S). \quad (15)$$

Решение уравнений (14), (15) нетрудно найти с помощью преобразования Фурье по переменным ρ и $\theta = (\theta_x, \theta_y)$ (такой метод решения уравнения переноса подробно изложен в [14]). В итоге для плотности потока $N(z, \rho, \theta, S)$ получаем выражение

$$N(z, \rho, \theta, S) = \frac{\delta(S-z)}{\pi^2 D^2(z)} \exp \left[-\frac{\rho^2 A_1 - 2\rho\theta A_2 + \theta^2 A_3 + 2h[\rho\theta]A_4}{D^2(z)} \right], \quad (16)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$;

$$A_1(z) = 2 \int_0^z \frac{dS}{l_{tr}(S)}; \quad A_2(z) = \int_0^z dz' A_1(z') \cos[\hat{\varphi}(z, z')];$$

$$A_3(z) = 2 \int_0^z dz' A_2(z'); \quad A_4(z) = \int_0^z dz' A_1(z') \sin[\hat{\varphi}(z, z')];$$

$$D^2 = A_1 A_3 - A_2^2 - A_4^2 = 2 \int_0^z \frac{dz'}{l_{tr}(z')} A_3(z'); \quad \hat{\varphi}(z, z') = \int_{z'}^z \frac{dS}{r_H(S)}.$$

Наличие в распределении (16) δ -функции отражает тот факт, что в стандартном малоугловом приближении (14) пройденный путь S равен глубине z .

Нетрудно показать, что величина D^2 в (16) всегда положительна. Подставляя в выражение для D^2 явный вид функций $A_i(z)$ ($i = 1, \dots, 4$), после простых преобразований находим

$$D^2(z) = 2 \int_0^z \frac{dz'}{l_{tr}(z')} \int_0^z \frac{dz''}{l_{tr}(z'')} \left[\left(\int_{z''}^{z'} dz''' \cos \hat{\varphi}(z''', 0) \right)^2 + \left(\int_{z''}^{z'} dz''' \sin \hat{\varphi}(z''', 0) \right)^2 \right] \geq 0.$$

Коэффициенты $A_i(z)$ определяют моменты распределения по углам и координатам на глубине z

$$\langle \theta^2 \rangle_z = A_1(z); \quad \langle \theta \rho \rangle_z = A_2(z); \quad \langle \rho^2 \rangle_z = A_3(z);$$

$$\langle \mathbf{h}[\theta \rho] \rangle_z = \langle \mathbf{h} \theta \rho \rangle_z = A_4(z). \quad (17)$$

В (16) $\hat{\varphi}(z, z')$ — значение азимутального угла поворота частицы вокруг силовой линии магнитного поля при прохождении отрезка пути от z' до z .

Из (16), (17) следует, что наличие магнитного поля не меняет значение среднего квадрата угла рассеяния $\langle \theta^2 \rangle_z$. Подставляя (9) в (16) и пренебрегая зависимостью L_{ion} и L_c от энергии, находим

$$\langle \theta^2 \rangle_z = 2\gamma L(z); \quad L(z) = \ln \left[\frac{1 - (E_0/E_0 + 2)^2 (z/R_0)}{1 - (z/R_0)} \right], \quad (18)$$

где параметр γ определяется соотношением (10).

Остальные коэффициенты A_i ($i = 2, 3, 4$) сильно зависят от напряженности магнитного поля. Если напряженность магнитного поля H велика

($r_H(T_0) \ll R_0$), то, проходя путь $S \approx z \gg r_H(T_0)$, частица успевает совершить большое число оборотов вокруг направления магнитного поля и

$$\dot{\varphi} \sim z/r_H(T_0) \gg 1. \quad (19)$$

В этом случае, интегрируя (16) по частям и пренебрегая осциллирующими слагаемыми, находим

$$\begin{aligned} \langle \rho^2 \rangle_z &\approx r_H^2(z) A_1(z) + 2 \int_0^z dS \frac{r_H^2(S)}{l_{tr}(S)}, \\ \langle \theta \rho \rangle_z &\approx 2 \frac{r_H^2(z)}{l_{tr}(z)} \left[1 + \frac{1}{2} l_{tr}(z) A_1(z) \frac{d}{dz} \ln r_H(z) \right], \\ \langle \mathbf{h}[\theta \rho] \rangle_z &\approx r_H(z) A_1(z); \quad D^2(z) \approx 2 A_1(z) \int_0^z dS \frac{r_H^2(S)}{l_{tr}(S)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Если теперь подставить (4), (5), (9) в (20) и пренебречь зависимостью L_{ion} и L_c от энергии, то нетрудно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle \rho^2 \rangle_z &\approx 8\gamma \frac{r_H^2}{E_0(E_0+2)} \left[E_0 - E_z + \frac{1}{4} E_z(E_z+2) L(z) \right], \\ \langle \theta \rho \rangle_z &\approx 8\gamma \frac{r_H^2}{R_0} \frac{E_0(E_z+1)^2}{(E_0+1)(E_0+2)E_z(E_z+2)} \left[1 - \frac{1}{4} (E_z+1) L(z) \right], \\ \langle \mathbf{h}[\theta \rho] \rangle_z &\approx 2\gamma r_H \left[\frac{E_z(E_z+2)}{E_0(E_0+2)} \right]^{1/2} L(z), \\ D^2(z) &\approx 16\gamma r_H^2 \frac{E_0 - E_z}{E_0(E_0+2)} L(z), \end{aligned} \quad (21)$$

где E_z — энергия частицы на глубине z [14],

$$E_z = \frac{1}{2} E_0^2 \frac{\sqrt{1-z/R_0}}{E_0+1} \left(\sqrt{1-z/R_0} + \sqrt{(E_0+2)^2/E_0^2 - z/R_0} \right) \quad (22)$$

$r_H \equiv r_H(T_0)$, $L(z)$ определяется выражением (18).

В заключение этого раздела сопоставим полученные результаты с [8–10], справедливыми при дополнительных ограничениях на энергию частиц.

Если путь, пройденный частицей, мал по сравнению с полным пробегом ($S \ll R_0$), то в (16) можно пренебречь зависимостью l_{tr} от энергии и, полагая $r_H(T) \approx r_H(T_0)$, найти

$$\langle \rho^2 \rangle_z \approx 4 \frac{r_H^2}{l_{tr}} z \left(1 - \frac{r_H}{z} \sin \frac{z}{r_H} \right). \quad (23)$$

Результат (23) получен различными способами в [3,8,10].

В области ультрарелятивистских энергий ($E_0 \gg 1$) в соответствии с (16) выражение для $\langle \rho^2 \rangle_z$ можно приближенно ($L_{ion}, L_c = \text{const}$) представить в виде

$$\langle \rho^2 \rangle_z \approx 4 \frac{r_H^2}{l_{tr}} \left(1 + \frac{r_H^2}{R_0^2} \right)^{-1} \left[z - \frac{z^2}{2R_0} + r_H \left(1 - \frac{z}{R_0} \right) \sin \left(\frac{R_0}{r_H} \ln \left(1 - \frac{z}{R_0} \right) \right) \right]. \quad (24)$$

Это соотношение совпадает с результатом работы [9]. Тем самым устанавливается область применимости используемых в [9] приближений (в самой работе соответствующие ограничения на энергию падающих частиц не указаны).

Как следует из соотношений (20), (21), (23), (24), рост $\langle \rho^2 \rangle_z$ с глубиной z в магнитном поле происходит существенно медленнее, чем в случае $\mathbf{H} = 0$. Природа явления "фокусировки" хорошо известна [3,15] и связана с вращением частиц вокруг силовых линий поля между последовательными актами соударений с атомами среды.

3. Решение уравнения переноса в малоугловом приближении с учетом искривления траекторий частиц

Для того чтобы учесть тот факт, что в слое вещества толщиной z частицы проходят различные пути S , перейдем в уравнении (6) к новой переменной ($S - z$) и при разложении по малому углу θ удержим слагаемое

$$\frac{\theta^2}{2} \frac{\partial N}{\partial (S - z)}.$$

Решая затем полученное уравнение с помощью преобразования Фурье по переменным ρ и θ (в случае $\mathbf{H} = 0$ аналогичные вычисления приведены в [13,14]), находим

$$N(z, \rho, \theta, S - z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dq}{\pi^2 A_0 D^2} \exp \left[q(S - z) - \frac{\rho^2 A_1 - 2\rho\theta A_2 + \theta^2 A_3 + 2h[\rho\theta] A_4}{D^2} \right],$$

$$D^2(z, q) = A_1 A_3 - A_2^2 - A_4^2. \quad (25)$$

Теперь в отличие от (16) коэффициенты $A_i(z, q)$ ($i = 1, \dots, 4$) зависят от дополнительного параметра q и определяются соотношениями

$$A_1(z, q) = \frac{2}{q} \frac{d}{dz} \ln A_0(z, q),$$

$$A_2(z, q) = \frac{2}{q} \left[1 - \frac{\cos \hat{\varphi}(z, 0)}{A_0(z, q)} - \frac{1}{A_0(z, q)} \int_0^z \frac{dz'}{r_H(z')} A_0(z', q) \sin \hat{\varphi}(z, z') \right],$$

$$A_3(z, q) = \frac{2}{q} \int_0^z dz' \left[1 - \frac{1}{A_0^2(z', q)} + \frac{2}{A_0^2(z', q)} \int_0^{z'} \frac{dz''}{r_H(z'')} A_0(z'', q) \sin \hat{\varphi}(z'', 0) - \right. \\ \left. - \frac{1}{A_0^2(z', q)} \int_0^{z'} \frac{dz''}{r_H(z'')} A_0(z'', q) \int_0^{z'} \frac{dz'''}{r_H(z''')} A_0(z''', q) \cos \hat{\varphi}(z'', z''') \right], \\ A_4(z, q) = \frac{2}{q A_0(z, q)} \left[\int_0^z \frac{dz'}{r_H(z')} A_0(z', q) \cos \hat{\varphi}(z, z') - \sin \hat{\varphi}(z, 0) \right]. \quad (26)$$

Величина $\hat{\varphi}(z, z')$ в (26) та же, что и в (16). Коэффициент A_0 не зависит от напряженности магнитного поля и удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2}{dz^2} A_0(z, q) = \frac{q}{l_{tr}(z)} A_0(z, q) \quad (27)$$

с граничными условиями

$$A_0(z=0, q) = 1; \quad A'_0(z=0, q) = 0. \quad (28)$$

Уравнения (27), (28) для различных начальных энергий частиц подробно рассмотрены в [13,14].

Рассмотрим решение (25), (26) в различных предельных случаях. В случае $r_H \rightarrow \infty$ (магнитное поле отсутствует) мы возвращаемся к результатам работы [13].

Если в (26), (27) положить $q = 0$, то $A_0 \equiv 1$ и выражения (26) для коэффициентов A_i ($i = 1, \dots, 4$) переходят в найденные выше соотношения (16). Этот переход отражает связь (25) с (16), т.е. (тот факт, что после интегрирования по всем возможным значениям пройденного пути S (25) переходит в распределение (16) (без δ -функции).

Интегрируя соотношение (25) по поперечному смещению ρ или по углу θ , получаем в дополнение к полному распределению (25) выражения для распределений, прошедших через слой вещества частиц по углу рассеяния

$$N(z, \theta, S - z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dq \frac{\exp \left[q(S - z) - \frac{\theta^2}{A_1(z, q)} \right]}{\pi A_0(z, q) A_1(z, q)} \quad (29)$$

или по поперечному смещению относительно оси пучка

$$N(z, \rho, S - z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} dq \frac{\exp \left[q(S - z) - \frac{\rho^2}{A_3(z, q)} \right]}{\pi A_0(z, q) A_3(z, q)}. \quad (30)$$

В связи с тем что коэффициенты A_0, A_1 не зависят от магнитного поля, распределение (29) совпадает с результатом [13,14].

Напротив, зависимость коэффициентов A_i ($i = 2, 3, 4$) от напряженности магнитного поля H существенным образом сказывается на пространственном распределении частиц.

Используя соотношения (26), можно аналогично [13,14] провести полный анализ распределений (25) и (30). Однако это трудоемкая процедура, а получающиеся результаты весьма громоздки. В данной работе мы ограничимся лишь вычислением моментов распределения (30). Умножая (30) на $(S - z)$ и интегрируя по всем возможным значениям S , найдем зависимость среднего пути частиц от поперечного смещения относительно оси пучка

$$\begin{aligned} \langle S \rangle_{z,\rho} &= z + \int_0^z dz' \frac{(z - z')}{l_{tr}(z')} + \frac{\rho^2 - \langle \rho^2 \rangle_z}{(\langle \rho^2 \rangle_z)^2} B(z), \\ B(z) &= - \left. \frac{\partial A_3(z, q)}{\partial q} \right|_{q=0} = \langle \rho^2 S \rangle_z - \langle \rho^2 \rangle_z \langle S \rangle_z = \\ &= 2 \int_0^z dz' \left[\left(\int_0^{z'} \frac{dz''}{l_{tr}(z'')} \int_{z''}^z dz''' \cos \hat{\varphi}(z, z''') \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^{z'} \frac{dz''}{l_{tr}(z'')} \int_{z''}^z dz''' \sin \hat{\varphi}(z, z''') \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (31)$$

где $\langle \rho^2 \rangle_z$ — средний квадрат поперечного смещения частиц (16), (17).

При выполнении неравенства (19) выражение для $B(z)$ принимает вид

$$B(z) \approx 2r_H^2(z) \int_0^z dz' \left(\int_0^{z'} \frac{dz''}{l_{tr}(z'')} \right)^2 = \frac{1}{2} r_H^2(z) \int_0^z dz' (\langle \theta^2 \rangle_{z'})^2 \quad (R_0 - z \gg \gamma R_0), \quad (32)$$

где $\langle \theta^2 \rangle_z$ — средний квадрат угла рассеяния частиц (16), (17).

Из соотношений (31), (32) следует, что с ростом напряженности магнитного поля зависимость $\langle S - z \rangle$ от ρ становится все более резкой. С увеличением H значение $B/(\langle \rho^2 \rangle_z)^2$ растет пропорционально H^2 . Это есть проявление отмеченной выше “фокусировки” пучка частиц в продольном магнитном поле.

Необычно, на первый взгляд, ведет себя зависимость $\langle S \rangle_{z,\rho}$ от ρ на различных глубинах. При $z \ll R_0$

$$\langle \rho^2 \rangle_z \approx 4r_H^2 \left(\frac{z}{l_{tr}} \right), \quad B(z) \approx \frac{2}{3} r_H^2 \frac{z^3}{l_{tr}} \quad (33)$$

и

$$\langle S \rangle_{z,\rho} \approx z + \frac{z^2}{2l_{tr}} + \frac{\rho^2}{24r_H^2} z,$$

т.е. с ростом глубины зависимость $\langle S \rangle_{z,\rho}$ от ρ становится все более резкой. Напротив, на больших глубинах ($R_0 - z \ll R_0$) при нерелятивистских начальных энергиях частиц

$$\langle \rho^2 \rangle_z \approx 4r_H^2 \gamma, \quad B(z) \approx 4r_H^2 \gamma^2 \cdot (R_0 - z)$$

и

$$\langle S \rangle_{z,\rho} \approx R_0(1 + \gamma) + \frac{\rho^2}{4r_H^2} (R_0 - z),$$

где $r_H^2 \equiv r_H^2(T_0)$, $l_{tr} \equiv l_{tr}(T_0)$, $\gamma = R_0/l_{tr} \ll 1$.

В соответствии с (36) при $R_0 - z \ll R_0$ зависимость $\langle S \rangle_{z,\rho}$ от ρ становится слабой и при $R_0 - z \lesssim \gamma R_0$ практически исчезает: при увеличении ρ от нуля до $\sqrt{\langle \rho^2 \rangle_{R_0}} \approx 2r_H \gamma^{1/2}$ значение $\langle S \rangle_{z,\rho}$ изменяется на величину, по порядку не превышающую $\gamma^2 R_0$. Последнее означает, что средняя глубина проникновения частиц в вещество $\langle z \rangle_\rho$ [13,14] практически не зависит от их поперечного смещения относительно оси пучка.

Причина такого необычного поведения $\langle S \rangle_{z,\rho}$ связана с "фокусирующим" действием магнитного поля. Вращение в поле не позволяет частицам, рассеянным на относительно большие углы, уйти далеко от оси пучка. В результате вблизи оси оказываются частицы, прошедшие в слое вещества толщиной z пути различной длины, т.е. магнитное поле существенно ослабляет имевшую место в случае $H = 0$ [14] корреляцию между значением пройденного частицей пути и смещением относительно оси пучка.

4. Вычисление моментов распределения частиц в магнитном поле. Выход за рамки малоуглового приближения

Полученные выше результаты справедливы при условии $\langle \theta^2 \rangle_z \ll 1$. Для тяжелых частиц оно выполнено практически всегда. Однако для нерелятивистских электронов ($T_0 \ll m_e c^2$) ситуация иная. Средний пробег R_0 таких электронов в среде больше или порядка их транспортной длины рассеяния $l_{tr}(T_0)$ ($R_0 \gtrsim l_{tr}$). Поэтому при $z \gtrsim l_{tr}$ предположение $\langle \theta^2 \rangle_z \ll 1$ нарушается и малоугловое приближение использовать нельзя.

Вместе с тем при прохождении электронов через среды с небольшими Z ($Z \lesssim 20$), несмотря на то, что средний квадрат угла рассеяния на всем пробеге не мал, число обратнорассеянных электронов, которые покидают среду, невелико $W_{обр} \ll 1$, $W_{обр}$ — полный коэффициент отражения [16]. Это обстоятельство позволяет при анализе распространения электронов в легких средах считать среду неограниченной. Погрешность такого приближения определяется вкладом процессов двукратного пересечения плоскости $z = 0$ в бесконечной среде и имеет порядок $W_{обр}^2$.¹

При распространении частиц в бесконечной среде плотность потока частиц $\bar{N}(\mathbf{r}, \Omega, S)$ удовлетворяет уравнению переноса (6), (7). Условие (7) теперь, строго говоря, не является "граничным". Оно отражает тот факт, что в начале координат расположен источник, который испускает

¹ Более точная оценка погрешности — $W_{обр} \cdot \bar{W}_{обр}$, где $\bar{W}_{обр}$ — полный коэффициент отражения электронов при изотропном облучении поверхности.

частицы с энергией T_0 в направлении магнитного поля H . Настоящее "граничное" условие к уравнению (6) имеет вид

$$N(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \Omega, S) = 0 \quad (33a)$$

Условие (33a) позволяет найти пространственные моменты плотности потока частиц $N(\mathbf{r}, \Omega, S)$ непосредственно из уравнения переноса. В отсутствие магнитного поля вычисление моментов $N(\mathbf{r}, \Omega, S)$ впервые рассмотрено Льюисом [17].

Умножая уравнение (6), (7) на $x^j y^k z^n$ и интегрируя по всему объему, с учетом (33) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} \langle x^j y^k z^n \rangle_{S, \Omega} &= \frac{1}{r_H(S)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \langle x^j y^k z^n \rangle_{S, \Omega} + \\ + n_0 \int d\Omega' \frac{d\sigma}{d\Omega'}(S|\Omega', \Omega) (\langle x^j y^k z^n \rangle_{S, \Omega'} - \langle x^j y^k z^n \rangle_{S, \Omega}) &+ \\ + C(j, k, n|S, \Omega) + \delta_{j0} \delta_{k0} \delta_{n0} \frac{1}{2\pi} \delta(1 - \cos \theta) \delta(S), & \end{aligned} \quad (34)$$

где δ_{jk} — символ Кронекера и введены обозначения

$$\langle x^j y^k z^n \rangle_{S, \Omega} = \int d^3 r (x^j y^k z^n) N(\mathbf{r}, \Omega, S),$$

$$C(j, k, n|S, \Omega) = j\Omega_x \langle x^{j-1} y^k z^n \rangle_{S, \Omega} + k\Omega_y \langle x^j y^{k-1} z^n \rangle_{S, \Omega} + n\Omega_z \langle x^j y^k z^{n-1} \rangle_{S, \Omega}. \quad (35)$$

Решение уравнения (34) можно искать с помощью разложения по сферическим функциям $Y_{e,m}(\Omega)$

$$\langle x^j y^k z^n \rangle_{S, \Omega} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \sum_{m=-l}^l \langle x^j y^k z^n \rangle_{S,l,m} Y_{l,m}(\Omega). \quad (36)$$

Подставляя (36) в (34) для коэффициентов $\langle x^j y^k z^n \rangle_{S,l,m}$, находим систему рекуррентных соотношений

$$\langle x^0 y^0 z^0 \rangle_{S,l,m} = \delta_{m,0} \exp[-k_l(S, 0)], \quad (37)$$

$$\langle x^j y^k z^n \rangle_{S,l,m} = \int_0^S dS' \exp[im\hat{\varphi}(S, S') - K_l(S, S')] \cdot C(j, k, n|S, l, m), \quad (38)$$

$$\begin{aligned} C(j, k, n|S, l, m) &= \frac{1}{2l+1} \left\{ n \left[\sqrt{(l+m+1)(l-m+1)} \langle x^j y^k z^{n-1} \rangle_{S, l+1, m} + \right. \right. \\ &+ \sqrt{(l+m)(l-m)} \langle x^j y^k z^{n-1} \rangle_{S, l-1, m} \left. \right] + \frac{1}{2} j \left[\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)} \times \right. \\ &\times \langle x^{j-1} y^k z^n \rangle_{S, l+1, m+1} - \sqrt{(l-m+1)(l-m+2)} \langle x^{j-1} y^k z^n \rangle_{S, l+1, m-1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{(l+m-1)(l+m)} \langle x^{j-1} y^k z^n \rangle_{S, l-1, m-1} - \sqrt{(l-m-1)(l-m)} \times \\
& \times \langle x^{j-1} y^k z^n \rangle_{S, l-1, m+1} \Big] + \frac{i}{2} k \Big[\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)} \langle x^j y^{k-1} z^n \rangle_{S, l+1, m+1} + \\
& + \sqrt{(l-m+1)(l-m+2)} \langle x^j y^{k-1} z^n \rangle_{S, l+1, m-1} - \sqrt{(l+m-1)(l+m)} \times \\
& \times \langle x^j y^{k-1} z^n \rangle_{S, l-1, m-1} - \sqrt{(l-m-1)(l-m)} \langle x^j y^{k-1} z^n \rangle_{S, l-1, m+1} \Big] \Big\}. \quad (39)
\end{aligned}$$

В (36)–(38) использованы обозначения

$$Y_{l,m}(\Omega) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (40)$$

$$K_l(S, S') = \int_{S'}^S dS'' 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta (1 - P_l(\cos \theta)) n_0 \frac{d\sigma}{d\Omega}(S'' | \cos \theta), \quad (41)$$

$$\hat{\varphi}(S, S') = \int_{S'}^S \frac{dS''}{r_H(S'')}, \quad (42)$$

где $P_l^{|m|}$ — присоединенные полиномы Лежандра [18], $P_l \equiv P_l^0$ — обычные полиномы Лежандра [18].

Используя рекуррентные соотношения (37)–(39), можно в принципе вычислить коэффициенты $\langle x^j y^k z^n \rangle_{S, l, m}$ для любых значений j, k, n . Ограничимся расчетом только пространственных моментов функции распределения $\langle x^j y^k z^n \rangle_S$. Интегрируя (36) по Ω , получаем

$$\langle x^j y^k z^n \rangle_S = \int d^3 r \int d\Omega (x^j y^k z^n) N(\mathbf{r}, \Omega, S) = \langle x^j y^k z^n \rangle_{S, l=0, m=0}. \quad (43)$$

Затем для вычисления $\langle x^j y^k z^n \rangle_{S, l=0, m=0}$ воспользуемся рекуррентными соотношениями (37)–(39). Приведем явные выражения для нескольких первых моментов распределения

$$\langle z \rangle_S = \int_0^S dS' \langle \cos \theta \rangle_{S'}, \quad (44)$$

$$\langle z^2 \rangle_S = \frac{2}{3} \int_0^S dS' \int_0^{S'} dS'' \frac{\langle \cos \theta \rangle_{S'}}{\langle \cos \theta \rangle_{S''}} (1 + 2 \langle \cos \theta \rangle_{S''}^3), \quad (45)$$

$$\langle \rho^2 \rangle_S = 2 \langle x^2 \rangle_S = 2 \langle y^2 \rangle_S =$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^S dS' \int_0^{S'} dS'' \frac{\langle \cos \theta \rangle_{S'}}{\langle \cos \theta \rangle_{S''}} (1 - \langle \cos \theta \rangle_{S''}^3) \cos \hat{\varphi}(S', S''), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \langle \rho^2 z \rangle_S &= \frac{4}{5} \int_0^S dS' \langle \cos \theta \rangle_{S'} \int_0^{S'} dS'' \langle \cos \theta \rangle_{S''}^2 \times \\ &\times \int_0^{S''} dS''' \frac{1}{\langle \cos \theta \rangle_{S''}^2} \left[(1 - \langle \cos \theta \rangle_{S''}^5) (\cos \hat{\varphi}(S', S''') + \cos \hat{\varphi}(S'', S''')) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} \left(2 + 3 \langle \cos \theta \rangle_{S''}^5 - 5 \frac{\langle \cos \theta \rangle_{S''}^3}{\langle \cos \theta \rangle_{S''}^3} \right) \cos \hat{\varphi}(S', S'') \right], \quad (47) \end{aligned}$$

где значение среднего косинуса угла многократного рассеяния частиц, прошедших путь S , определяется выражением [14]

$$\langle \cos \theta \rangle_S = \exp[-K_1(S, 0)], \quad K_1(S, 0) = \int_0^S \frac{dS'}{l_{tr}(S')}. \quad (48)$$

В равенствах (45)–(47) мы учли, что при резко анизотропном однократном рассеянии на атомах справедливы соотношения $K_2 \approx 3K_1$ и $K_3 \approx 6K_1$ [14].

Объединяя результаты (44), (46) и (47), получим для корреляционной функции $B(S) = \langle \rho^2 z \rangle_S - \langle \rho^2 \rangle_S \langle z \rangle_S$ (аналога (31))² следующее выражение:

$$\begin{aligned} B(S) &= -\frac{4}{15} \int_0^S dS' \langle \cos \theta \rangle_{S'} \int_0^{S'} dS'' \langle \cos \theta \rangle_{S''}^2 \int_0^{S''} dS''' \frac{1}{\langle \cos \theta \rangle_{S''}^2} \times \\ &\times \left[(2 + 3 \langle \cos \theta \rangle_{S''}^5 - 5 \langle \cos \theta \rangle_{S''}^3) (\cos \hat{\varphi}(S', S''') + \cos \hat{\varphi}(S'', S''')) + \cos \hat{\varphi}(S', S'') \right] + \\ &+ 5 (1 - \langle \cos \theta \rangle_{S''}^3) \left(\frac{\langle \cos \theta \rangle_{S''}^3}{\langle \cos \theta \rangle_{S''}} - 1 \right) (\cos \hat{\varphi}(S', S''') + \cos \hat{\varphi}(S'', S''')). \quad (49) \end{aligned}$$

При достаточно сильном магнитном поле, когда каждая частица успевает совершить много оборотов вокруг силовой линии (см. неравенство (19)), интегрируя (46), (47) по частям, для моментов $\langle \rho^2 \rangle_S$ и $\langle \rho^2 z \rangle_S$ нетрудно получить следующие выражения:

$$\langle \rho^2 \rangle_S \approx \frac{2}{3} r_H^2(S) (1 - \langle \cos \theta \rangle_S^3) + \frac{4}{3} \int_0^S dS' \frac{r_H^2(S')}{l_{tr}(S')} +$$

² При рассеянии на малые углы ($S - z \ll S, z$) и функции $B(S)$ и $B(z)$ связаны соотношением $B(S) = \langle \rho^2 z \rangle_S - \langle \rho^2 \rangle_S \langle z \rangle_S = \langle (\rho^2 - \langle \rho^2 \rangle_S)(z - S - \langle (z - S) \rangle_S) \rangle_S \approx \langle (\rho^2 - \langle \rho^2 \rangle_S)(z - S - \langle (z - S) \rangle_S) \rangle_z = -\langle \rho^2 S \rangle_z + \langle \rho^2 \rangle_z \langle S \rangle_z = -B(z)$.

$$+ \frac{2}{3} \int_0^S dS' \frac{r_H^2(S')}{l_{tr}(S')} \langle \cos \theta \rangle_{S'}^3, \quad (50)$$

$$\langle \rho^2 z \rangle_S \approx -\frac{4}{5} \int_0^S dS' \langle \cos \theta \rangle_{S'} \left\{ \int_0^{S'} dS'' \frac{(1 - \langle \cos \theta \rangle_{S''}^5)}{\langle \cos \theta \rangle_{S''}^2} r_H(S'') \frac{d}{dS''} (r_H(S'') \langle \cos \theta \rangle_{S''}^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} r_H(S') \frac{d}{dS'} \left[r_H(S') \left(\langle \cos \theta \rangle_{S'}^2 \int_0^{S'} dS'' \frac{2 + 3 \langle \cos \theta \rangle_{S''}^5}{\langle \cos \theta \rangle_{S''}^2} - 5 \int_0^{S'} dS'' \frac{\langle \cos \theta \rangle_{S''}}{\langle \cos \theta \rangle_{S'}} \right) \right] \right\}. \quad (51)$$

Аналогичную (50), (51) формулу можно записать и для коррелятора “глубина-квадрат поперечного смещения частицы” — $B(S)$

$$B(S) = \langle \rho^2 z \rangle_S - \langle \rho^2 \rangle_S \langle z \rangle_S \approx \\ \approx \frac{2}{15} \left[\int_0^S dS' \int_0^{S'} dS'' \frac{\langle \cos \theta \rangle_{S'}}{\langle \cos \theta \rangle_{S''}^2} \left(\langle \cos \theta \rangle_{S'}^2 \frac{r_H^2(S')}{l_{tr}(S')} + \langle \cos \theta \rangle_{S''}^2 \frac{r_H^2(S'')}{l_{tr}(S'')} \right) \times \right. \\ \left. \times (2 + 3 \langle \cos \theta \rangle_{S''}^5 - 5 \langle \cos \theta \rangle_{S''}^3) - r_H^2(S) \langle \cos \theta \rangle_S^3 \int_0^S dS' \frac{(2 + 3 \langle \cos \theta \rangle_{S'}^5 - 5 \langle \cos \theta \rangle_{S'}^3)}{\langle \cos \theta \rangle_{S'}^2} \right]. \quad (52)$$

Формулы (44)–(52) можно рассматривать как обобщение соответствующих результатов малоугловой теории — (16)–(20) и (31)–(32). Если средний косинус угла многократного рассеяния (44) близок к единице (т.е. $1 - \langle \cos \theta \rangle_S \ll 1$, $S \approx z$ и применимо приближение малых углов), то, разлагая в соотношениях (46), (49), (50)–(52) $\cos \theta$ в ряд по θ , придем к результатам, приведенным в разделах 2,3.

По мере уменьшения $\langle \cos \theta \rangle_S$ отличие полученных методом моментов выражений от формул малоугловой теории приобретает качественный характер. Наиболее ярко различия проявляются, когда пройденный частицами путь S становится порядка длины изотропизации l_i ((8)–(10)). В этом случае, как следует из выражения (52), коррелятор $B(S)$ меняет знак. Причину столь неожиданного поведения коррелятора значений глубины проникновения и квадрата поперечного смещения частиц в магнитном поле можно понять на основе следующих рассуждений.

Вспоминая, что угловые скобки (...) в записанных выше соотношениях означают усреднение как по глубине z , так и по поперечным координатам ρ (см. определение (43)), представим корреляционную функцию $B(S)$ в виде

$$B(S) = \langle (\rho^2 - \langle \rho^2 \rangle_S)(z - \langle z \rangle_S) \rangle_S = \langle (\overline{\rho^2})_{z,S} - \langle \rho^2 \rangle_S \rangle_S (z - \langle z \rangle_S), \quad (53)$$

где $\overline{\rho^2}_{z,S}$ — значение среднего квадрата поперечного смещения прошедших путь S частиц на глубине z ,

$$\overline{\rho^2}_{z,S} = \int \rho^2 d^2 \rho N(z, \rho, S). \quad (54)$$

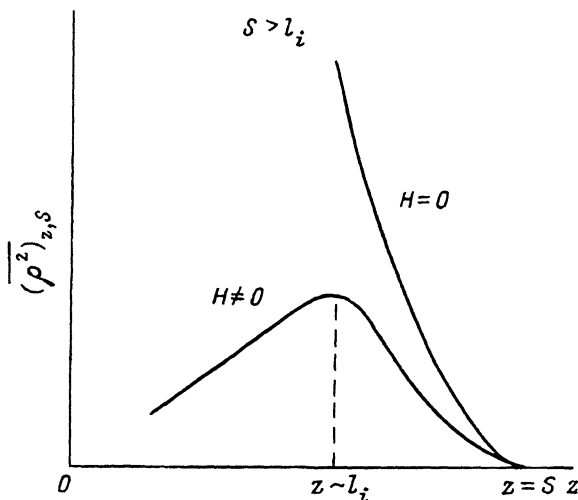


Рис. 1.

Представление (53) позволяет достаточно легко понять, о какой необычной особенности распределения частиц в магнитном поле говорит изменение знака $B(S)$ при $S \gtrsim l_i$.

В отсутствие поля $\mathbf{H} = 0$ отрицательная величина коррелятора $B(S)$ при любых S свидетельствует об антикорреляции значений z и $\overline{(\rho^2)}_{z,S}$ и монотонной зависимости $\overline{(\rho^2)}_{z,S}$ от глубины [14]. В магнитном поле ситуация существенно иная. Изменение знака $B(S)$ при $S \gtrsim l_i$ означает возникновение немонотонной зависимости квадрата поперечного смещения $\overline{(\rho^2)}_{z,S}$ от глубины (рис. 1). Природа указанного эффекта непосредственно связана с появлением при $S \gtrsim l_i$ обратнорассеянных, движущихся назад под малыми углами к \mathbf{H} частиц, которые характеризуются относительно небольшими значениями поперечного смещения от оси пучка. Именно эта группа частиц определяет значение $\overline{(\rho^2)}_{z,S}$ при малых значениях z и ответственна за немонотонное поведение зависимости $\overline{(\rho^2)}_{z,S}$ от глубины.

Косвенным подтверждением обнаруженной особенности распределения частиц в магнитном поле могут служить данные статистического моделирования [5]. Приведенные в [5] кривые энерговыделения в пучке электронов свидетельствуют о резком сужении поперечных размеров области энерговыделения на малых глубинах z , которая сформирована обратнорассеянными частицами.

В заключение этого раздела приведем результаты вычислений $\langle \rho^2 \rangle_S$ и $B(S)$ по формулам (50) и (52) для частиц нерелятивистских энергий.

При $S \ll R_0$, l_{tr} имеем (L_{ion} , $L_c = \text{const}$)

$$\langle \rho^2 \rangle_S \approx 4r_H^2 \frac{S}{l_{tr}} \left[1 - \left(\gamma - \frac{1}{8} \right) \frac{S}{R_0} + \dots \right], \quad (55)$$

$$B(S) \approx -\frac{2}{3} r_H^2 \frac{S^3}{l_{tr}}. \quad (56)$$

В случае тяжелых частиц ($\gamma \ll 1$) выражения (55), (56) находятся в полном соответствии с формулами (33) малоугловой теории.

Значения моментов распределения остановившихся частиц ($S = R_0$) определяются выражениями

$$\langle \rho^2 \rangle_{R_0} = 4r_H^2 \gamma \frac{4\gamma + 1}{6\gamma + 1}, \quad (57)$$

$$B(R_0) = \frac{32}{3} r_H^2 R_0 \frac{\gamma^3}{(6\gamma + 1)(4\gamma + 1)(2\gamma + 3)(\gamma + 1)}. \quad (58)$$

То обстоятельство, что значение $B(R_0)$ всегда положительно, отражает изотропизацию углового распределения частиц (протонов, электронов) в области больших потерь энергии.

Моменты распределения (57), (58) для тяжелых частиц ($\gamma \ll 1$) равны

$$\langle \rho^2 \rangle_{R_0} \approx 4r_H^2 \gamma (1 - 2\gamma + \dots); \quad B(R_0) \approx \frac{32}{9} r_H^2 R_0 \gamma^3. \quad (59)$$

В соответствии с (59) коррелятор $B(R_0)$ является величиной третьего порядка малости по параметру γ , что согласуется с качественными выводами, сделанными в разделе 3.

В обратном предельном случае $\gamma \gg 1$, который реализуется при прохождении электронов через тяжелые среды, формулы (57), (58) приобретают вид

$$\langle \rho^2 \rangle_{R_0} \approx \frac{8}{3} r_H^2 \left(\gamma + \frac{1}{12} + \dots \right), \quad B(R_0) \approx \frac{2}{9} r_H^2 R_0 \frac{1}{\gamma}. \quad (60)$$

Таким образом, зависимость $\langle \rho^2 \rangle_{R_0}$ от параметра γ оказывается практически линейной, причем коэффициент пропорциональности в указанной зависимости меняется с ростом γ всего в полтора раза. Что касается поведения коррелятора $B(R_0)$ как функции γ , то оно характеризуется следующими чертами: значение $B(R_0)$ достигает своего максимума при $\gamma \sim 1$ и стремится к нулю при малых и больших γ .

5. Обсуждение результатов и выводы

Полученные выше на основе малоуглового приближения и метода моментов соотношения для главных характеристик пучка заряженных частиц справедливы во всем диапазоне энергий, где основными процессами взаимодействия с веществом являются потери энергии при неупругих столкновениях с атомами и упругое рассеяние частиц.

Для тяжелых ($m \gg m_e$) частиц параметр γ (10) оказывается малым $\gamma \ll 1$ и оба подхода приводят к совпадающим в первом неисчезающем по γ приближении результатам (ср., например, (33), (35) и (55), (56), (59)).

Что касается легких частиц (электронов, позитронов), то для них $\gamma \gtrsim 1$ и соотношения, найденные в малоугловом приближении и методом моментов, совпадают с указанной выше точностью только в области малых потерь энергии $E_0 - E \ll \gamma^{-1} E_0$. При больших потерях энергии результаты малоуглового подхода, вообще говоря, неприменимы. Однако,

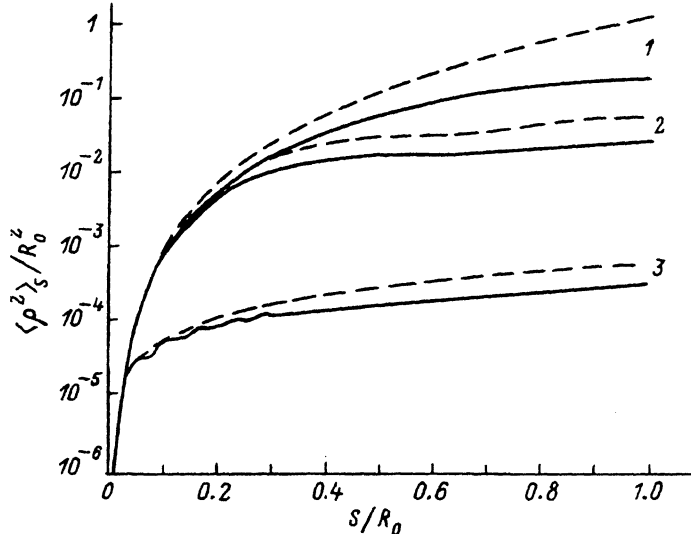


Рис. 2. Зависимость квадрата поперечного смещения электронов от пройденного в веществе пути при различных значениях напряженности магнитного поля. Сплошные кривые — расчет методом моментов, пунктир — малоугловое приближение. $T_0 = 75$ кэВ, вещество — азот (нормальные условия). R_0/r_H : 1 — 0, 2 — 10, 3 — 100.

как показывает сравнение данных численных расчетов пространственных характеристик пучка, выполненных по формулам малоугловой теории и методом моментов, различия полученных результатов оказываются намного меньше, чем в отсутствие магнитного поля (рис. 2). В частности, при нерелятивистских энергиях электронов отношение (20) и (50), хотя и растет с увеличением Z (см. таблицу), не превышает $\langle \rho^2 \rangle_{R_0}^{MT} / \langle \rho^2 \rangle_{R_0}^{MM} \lesssim 2$. Причина, приводящая к отмеченной особенности, связана с процессом вращения частиц вокруг силовых линий поля, который ослабляет зависимость $\langle \rho^2 \rangle$ от распределения частиц по углам.

При распространении потока электронов в тяжелых средах, когда значение параметра γ велико, полученные методом моментов соотношения интересно сопоставить с известными результатами дрейфового приближения [15], которые справедливы для описания пространственной диффузии поперек силовых линий поля при $\langle \rho^2 \rangle_S \gg r_H^2$. Согласно формуле (50),

Поперечные размеры пучка электронов ($T_0 = 75$ кэВ) при прохождении через вещество в магнитном поле

Вещество	Малоугловая теория $\langle \rho^2 \rangle_{R_0} / R_0^2$		Метод моментов $\langle \rho^2 \rangle_{R_0} / R_0^2$		$\frac{\langle \rho^2 \rangle^{MT}}{\langle \rho^2 \rangle^{MM}}$		γ
	$r_H = 10^{-2} R_0$	$r_H = 10^{-3} R_0$	$r_H = 10^{-2} R_0$	$r_H = 10^{-3} R_0$	$r_H = 10^{-2} R_0$	$r_H = 10^{-3} R_0$	
Гелий	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	1.5	1.4	$4.8 \cdot 10^{-1}$
Аргон	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$7.2 \cdot 10^{-4}$	$7.9 \cdot 10^{-6}$	1.8	1.5	3.3
Ксенон	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$4.0 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	2.0	1.6	10

при $E_0 - E \gg \gamma^{-1} E_0$ ($S \gg l_{tr}$) для $\langle \rho^2 \rangle_S$ с точностью до слагаемых порядка r_H^2 можно получить выражение

$$\langle \rho^2 \rangle_S \approx \frac{4}{3} \int_0^S dS' \frac{r_H^2(S')}{l_{tr}(S')} + \frac{2}{9} r_H^2(S=0) + \frac{2}{3} r_H^2(S) + \dots \quad (61)$$

Первое слагаемое в (61) совпадает с результатом дрейфового приближения [15],³ а два следующих определяют поправки к нему.

Формулы малоугловой теории и метода моментов нетрудно обобщить с учетом начального разброса частиц по направлениям движения относительно \mathbf{H} и координатам. Начальная дисперсия $\langle \theta^2 \rangle_0 \ll 1$ углового распределения частиц в случае малоуглового рассеяния может быть учтена в формулах (16), (20) путем замены $A_1(z) \rightarrow A_1(z) + \langle \theta^2 \rangle_0$. Если исходный разброс по направлениям не мал, то соответствующие преобразования проще всего выполнить в формулах метода моментов. Все изменения касаются только значения $\langle \cos \theta \rangle_S$, которое теперь определяется выражением

$$\langle \cos \theta \rangle_S = \exp \left(- \int_0^S \frac{dS'}{l_{tr}(S')} \right) \langle \cos \theta \rangle_0, \quad (62)$$

где $\langle \cos \theta \rangle_0$ — средний косинус начального распределения по углам.

Интегрирование в (46) с учетом (62) приводит в случае нерелятивистских частиц к следующему соотношению для $\langle \rho^2 \rangle_{R_0}$:

$$\langle \rho^2 \rangle_{R_0} = 4r_H^2 \gamma \left[\frac{4\gamma + \frac{1}{3}(2 + \langle \cos \theta \rangle_0^3)}{6\gamma + 1} \right] + \frac{2}{3} r_H^2 (1 - \langle \cos \theta \rangle_0^3). \quad (63)$$

Если источник частиц изотропный $\langle \cos \theta \rangle_0 = 0$, то $\langle \rho^2 \rangle_{R_0} = \frac{2}{3} r_H^2 (4\gamma + 1)$. В случае мононаправленного пучка $\langle \cos \theta \rangle_0 = 1$ и (63) переходит в полученное ранее соотношение (57).

Отметим также, что если начальный разброс по углам отсутствует, а направление первоначального распространения пучка не совпадает с \mathbf{H} , то нетрудно получить соотношения типа (50)–(52) и (63), если учесть в (37), (38) дополнительные множители, которые обусловлены “наклонным” начальным распространением частиц и пропорциональны $Y_{l,m}(\Omega_0)$, где $\Omega_0 = (\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0)$; θ_0 — угол между исходным направлением движения и силовыми линиями магнитного поля; φ_0 — начальный азимутальный угол.

В заключение следует заметить, что, хотя полученные выше соотношения найдены в предположении об однородности вещества, они допускают достаточно простое приближенное обобщение на случай стратифицированной (слоисто-неоднородной вдоль оси z , $n_0 = n_0(z)$) среды. В формулах малоуглового приближения (разделы 2,3), когда $S \approx z$, стратификацию среды можно учесть введением зависящей от пройденного пути плотности $n_0 = n_0(S)$ в формулы для тормозной способности (4) и

³ В [15, с.319] допущена опечатка в значении численного множителя в выражении для коэффициента поперечной диффузии электронов.

транспортной длины упругого рассеяния (9). Связь пройденного пути с энергией в этом случае определяется не соотношением (5), а равенством

$$\int_0^S n_0(S') dS' = \int_T^{T_0} \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}_*(T')}, \quad (64)$$

где $\bar{\varepsilon}_* = \bar{\varepsilon}/n_0$ — тормозная способность в расчете на один атом.

Решения (16), (25), (26) и следующие из них общие соотношения (20) и (31), (32) при этом не меняются.

При $n_0 = n_0(S)$ остаются неизменными также и полученные методом моментов общие выражения (44)–(52). Точность найденных таким путем соотношений определяется только справедливостью приближенного равенства $n_0(z) \approx n_0(S)$.

Список литературы

- [1] *Карташов В.П., Котов В.И., Рзаев Р.А.* // ЖТФ. 1973. Т. 43. Вып. 6. С. 641–646.
- [2] *Кимель Л.Р.* Физические аспекты защиты протонных ускорителей высоких энергий. М.: Атомиздат, 1976.
- [3] *Андреев С.П.* // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. Вып. 3. С. 514.
- [4] *Андреев С.П., Кошелкин А.В.* // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. Вып. 4 С. 1161–1172.
- [5] *Berger M.J., Seltzer S.H., Maeda K.* // J. Atmospher. Terrestr. Phys. 1970. Vol. 32. P. 1015–1045.
- [6] *Боболев В.В., Стрелков А.С.* // Вторичное электронное излучение / Под ред. В.В.Смирнова. Л., 1977. С. 72–78.
- [7] *Ижовкина Н.И.* // Геомагнетизм и аэрономия. 1979. Т. 19. № 2. С. 371–373.
- [8] *Farley F.J.M., Fiorentini G., Stocks D.C.* // NIM. 1978. Vol. 152. P. 353.
- [9] *Артамонов А.С., Горбунов В.А.* // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 8. С. 1605–1608.
- [10] *Ремизович В.С., Тараскин С.Н.* // ЖТФ. 1991. Т. 51. Вып. 7. С. 1356–1363.
- [11] *Андреев С.П., Кошелкин А.В.* // ДАН СССР. 1986. Т. 289. № 3. С. 593–596.
- [12] *Рыжов В.В., Сапожников А.А., Турчановский И.Ю.* // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. Вып. 24. С. 76–79.
- [13] *Ремизович В.С., Rogozkin Д.Б., Рязанов М.И.* // ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. С. 929–981.
- [14] *Ремизович В.С., Rogozkin Д.Б., Рязанов М.И.* Флуктуации пробегов заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.
- [15] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
- [16] *Бронштейн И.М., Фрайман Б.С.* Вторичная электронная эмиссия. М.: Наука, 1969. 407 с.
- [17] *Lewis H.W.* // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 526–534.
- [18] *Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган.* М.: Наука, 1979.

Московский инженерно-физический институт

Поступило в Редакцию
6 июля 1992 г.
В окончательной редакции
3 марта 1993 г.