01;05

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ И ПОГОННОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ

О.Г.Вендик, А.Ю.Попов

Получены простые модельные формулы для расчета распределения тока в поперечном сечении полосковой линии из тонкой сверхпроводящей пленки, а также для ее погонного сопротивления. Демонстрируется хорошее количественное соответствие расчета по предложенным формулам и точного машинного расчета. Определены условия, при которых распределение тока в поперечном сечении полосковой линии можно считать равномерным. Обсуждается применение полученных соотношений в системах автоматического проектирования (САПР) СВЧ элементов и в исследованиях, связанных с измерением поверхностного импеданса сверхпроводящих пленок.

Введение

Распределение тока в поперечном сечении тонкой сверхпроводящей пленки впервые рассмотрено более 30 лет назад. Вначале оно изучалось применительно к проблеме критического тока тонкой широкой пленки [1–3], затем в связи с расчетом кинетической индуктивности и сил пиннинга [4,5]. В последнее время интерес к проблемам, связанным со сверхпроводящими пленками, возрос в связи с практическим использованием высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП). Численные компьютерные расчеты [6,7] дают надежные результаты применительно к распределению тока и погонному сопротивлению ВТСП пленок. Однако аналитическое описание распределения тока в поперечном сечении также представляет интерес в связи с разработкой простого математического обеспечения САПР СВЧ интегральных схем, использующих ВТСП пленки, исследованием кинетики разрушения сверхпроводящего состояния в широкой тонкой сверхпроводящей пленке [8], дисперсии весьма коротких импульсов, распространяющихся в цепях межсоединений в сверхскоростных БИС [9].

Интегральное уравнение

На рис. 1,*а* показано поперечное сечение сверхпроводящей пленки, однородной и неограниченной вдоль оси z. Проекция вектора магнитного поля на ось y может быть представлена в следующем виде [1,3,10]:

$$H_y(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-d/2}^{d/2} \int\limits_{-w/2}^{w/2} \frac{j_{vol}(\xi, n)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta, \tag{1}$$

где j_{vol} — объемная плотность тока.

Введем поверхностную плотность тока

$$j_{sur}(\xi) = \int\limits_{-d/2}^{d/2} j_{vol}(\xi, \eta) d\eta. \tag{2}$$

Используем уравнение Лондонов в виде

$$j_{vol} = -(1/\lambda_L^2)\mathbf{A},$$

где λ_L — лондоновская глубина проникновения.

Положим, что $d < \lambda_L$. Тогда с учетом (2) получим

$$j_{sur} = -(d/\lambda_L^2)A_z.$$

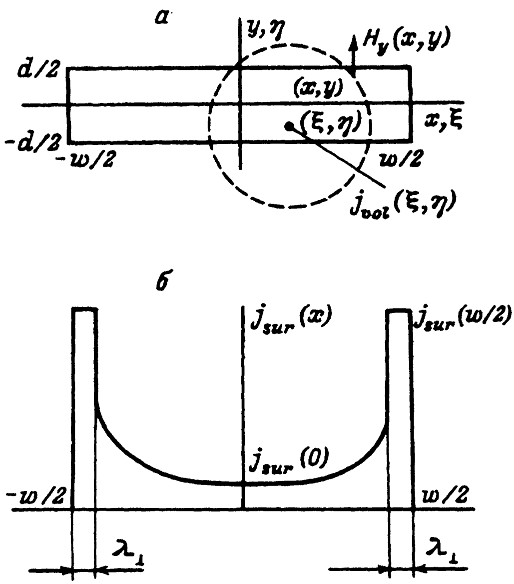

Рис. 1. Поперечное сечение сверхпроводящей пленки.
а — координаты, соответствующие формуле (1);
б — модельное представление распределения тока на поперечном сечении пленки.

Учтем также, что $H_y = -\partial A_z/\partial x$ и преобразуем (1) в следующее интегральное уравнение:

$$\frac{\partial j_{sur}(x)}{\partial x} = \frac{d}{2\pi\lambda_L^2}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\frac{j_{sur}(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2+\Delta^2}d\xi, \tag{3}$$

в котором интегрирование по η заменено переходом от объемной плотности тока к поверхностной, а также проведена замена члена $(y-\eta)^2$ на Δ^2. При этом должны выполняться условия $d \ll \lambda_L < \Delta \ll w$. Параметр Δ в физическом смысле отражает наличие конечной толщины пленки. Математически при переходе к одномерной задаче он приобретает смысл собственного числа уравнения. Известно [1,10], что, используя преобразование Гильберта, после некоторых упрощений можно получить приближенное решение уравнения (3)

$$j_{sur}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{I}{w}\left[1-(2x/w)^2\right]^{-1/2}, \tag{4}$$

а также

$$\Delta = \frac{2\lambda_L^2}{d}, \tag{5}$$

где I — полный ток, текущий вдоль пленки.

Плотность тока на краях пленки

Полученное решение (4) не отвечает на главный вопрос задачи — какова плотность тока на краях пленки. Действительно, при $|x| \to w/2$ выражение расходится, хотя интеграл от него имеет конечную величину и равняется полному току. Расходимость является следствием сделанных приближений. Точное решение аналитически получить не удается. Имеется несколько подходов, позволяющих получить обоснованное значение поверхностной плотности тока на краю пленки [1–5,10]. В настоящей работе мы предлагаем следующее описание поверхностной плотности тока в поперечном сечении пленки:

$$j_{sur}(x) = \frac{I}{w}\frac{2}{\pi}\begin{cases}(w/\lambda_\perp)^{1/2}, & w/2-\lambda_\perp < x \leqslant w/2,\\ \left[1-(2x/w)^2\right]^{1/2}, & |x| < w/2-\lambda_\perp,\\ (w/\lambda_\perp)^{1/2}, & -w/2 < x < -(w/2-\lambda_\perp).\end{cases} \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении условия $\lambda_\perp \ll w$ обеспечивается равенство [1]

$$\int\limits_{-w/2}^{w/2} j_{sur}(x)dx = I.$$

[1] Выполняя интегрирование, следует учесть, что при $x \ll I$: $\arcsin(1-x) \cong \pi/2 - \sqrt{2x}$.

Рис. 1,*б* иллюстрирует распределение тока, описываемое соотношением (6). В принятом распределении тока принципиальное значение имеет выбор величины $\lambda_\perp$. Учтем, что характерный размер задачи Δ был получен в результате решения интегрального уравнения. Поэтому положим $\lambda_{\perp=\Delta}$, это приводит к следующему определению:

$$\lambda_\perp = 2\lambda_L^2/d. \tag{7}$$

Запишем плотность тока на краях пленки в виде

$$j_{sur}(w/2) = I\varkappa(w\lambda_\perp)^{-1/2}.$$

Различные модели распределения тока в поперечном сечении приводят к различным значениям $\varkappa$. Сравним их. В нашем случае, как следует из (6), $\varkappa = 2/\pi = 0.637$. В модели Родерика–Уилсона [2] [1–3,10] $\varkappa = (1/\pi)(2e)^{1/2} = 0.742$ и в модели Ларкина–Овчинникова $\varkappa = (\pi)^{-1/2} = 0.564$.

Недавно Д.М.Шин с соавторами [6] нашел распределение тока в сверхпроводящей линии на основе численных расчетов, используя представление полосковой линии в виде N связанных между собой линий передачи. Численные результаты в [6] получены для объемной плотности тока.

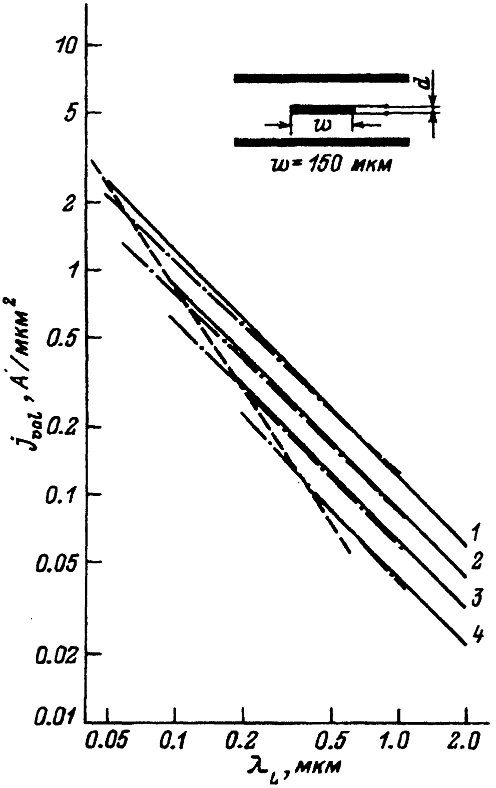

Рис. 2. Зависимость объемной плотности тока на краях пленки от глубины проникновения для различных толщин пленки $d = 0.1$ (*1*), 0.2 (*2*), 0.3 (*3*), 0.4 (*4*) мкм. Сопоставление модельного и точного численного расчета.

[2] В оригинальной работе [1] $\lambda_\perp = \lambda_L^2/d$; представленная здесь величина $\varkappa$ рассчитана по модели Родерика-Уилсона, но для $\lambda_\perp = 2\lambda_L^2/d$.

Чтобы произвести сравнение, найдем $j_{vol}(w/2)$ умножив $j_{sur}(w/2)$ на толщину пленки d. Тогда из (6) с учетом (5) получим

$$j_{vol}(w/2) = \frac{I}{\lambda_L \sqrt{wd}} \frac{\sqrt{2}}{\pi}. \qquad (8)$$

На рис. 2 сплошные линии соответствуют соотношению (8) для $I = 1$А, штриховые определяют пределы применимости полученных соотношений ($d \leqslant 2\lambda_L$), штрихпунктир представляет результаты расчета, заимствованные из [6]. Вставка к рис. 2 показывает размеры полосковой линии, для которой были проведены расчеты в [6]. Хорошее количественное совпадение подтверждает приемлемость предложенного в настоящей работе модельного распределения тока в поперечном сечении тонкой сверхпроводящей пленки.

Рассмотренная модель получена в квазистатическом приближении (магнитостатика). Полученные результаты справедливы и на высоких частотах, если выполнено условие $\lambda_L \ll \delta_{sk}$, где δ_{sk} — скиновая глубина проникновения, определяемая нормальной проводимостью, вызванной квазичастичными возбуждениями в сверхпроводнике. Для ВТСП материалов рассмотренное приближение справедливо до частот 200–500 ГГц.

Погонное сопротивление сверхпроводниковой полосковой линии

Зная распределение тока в поперечном сечении полосковой линии и поверхностное сопротивление материала пленки, из которого сделана линия, можно рассчитать погонное сопротивление линии. Легко получить следующее соотношение:

$$R_1 = R_{sur} \frac{\int\limits_{-w/2}^{w/2} [j_{sur}(x)]^2 \, dx}{\left[\int\limits_{-w/2}^{w/2} j_{sur}(x) dx\right]^2}, \qquad (9)$$

где R_1 — погонное сопротивление линии, R_{sur} — поверхностное сопротивление пленки.

Подстановка (6) в (9) дает

$$R_1 = \frac{R_{sur}}{w} \frac{8}{\pi^2} \left[1 + \frac{1}{2} \ln(\frac{w}{\lambda_\perp} - 1)\right]. \qquad (10)$$

Поверхностное сопротивление тонкой пленки ($d < \lambda_L$) определяется как [11]

$$R_{sur} = (\omega\mu_0)^2 \frac{\lambda_L^4}{d} \sigma, \qquad (11)$$

где σ — проводимость, связанная с квазичастичными возбуждениями при $T < T_c$ и проводящими включениями, ответственными за остаточное сопротивление.

Рис. 3 иллюстрирует результат расчета по формулам (10) и (11) для частоты 1 ГГц при $\sigma = 10^6 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$. Сравнение с численными расчетами [6] для той же частоты и нормальной проводимости показывают хорошее совпадение с расчетом по формулам (10), (11).

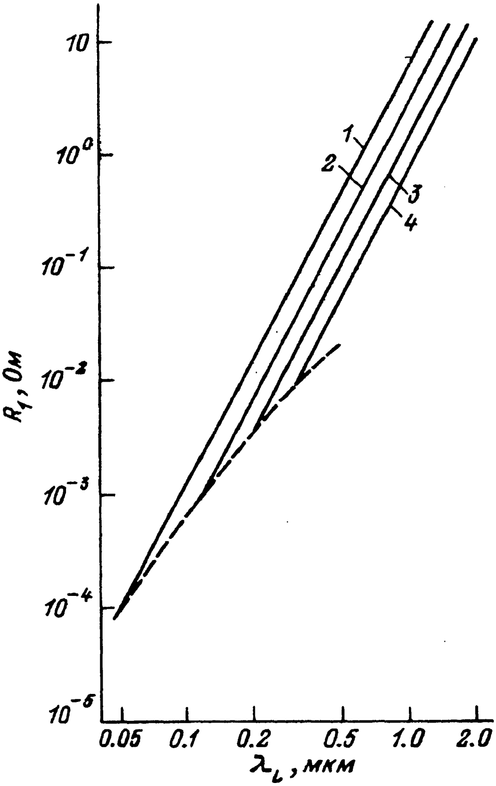

Рис. 3. Зависимость погонного сопротивления полосковой линии от глубины проникновения для различных толщин пленки.

Обозначения те же, что и на рис. 2. Различие результатов модельного и точного численного расчета не выходит за пределы толщины линии на графиках.

Распределение тока в поперечном сечении симметричной полосковой линии, проводники которой мало удалены один от другого

Рассмотренные в предыдущих разделах задачи относились к свободной пленочной линии, которая находится в окружении удаленного экрана, несущего ток обратного направления. Расстояние до экрана превосходит все поперечные размеры линии. На рис. 4,*a* показан случай, когда полосковая линия образована двумя проводниками, расстояние между которыми много меньше их ширины. В этом случае для поверхностной плотности тока в нижнем проводнике получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial j_{sur}(x)}{\partial x}d = \frac{d}{2\pi\lambda_L^2}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\left[\frac{(x-\xi)j_{sur}(\xi)}{(x-\xi)^2+\Delta^2} - \frac{(x-\xi)j_{sur}(\xi)}{(x-\xi)^2+\Delta^2+h^2}\right]d\xi. \qquad (12)$$

При этом принято, что плотность тока в верхнем проводнике имеет такое же поперечное распределение как и в нижнем, а ток, естественно, имеет противоположное направление. Интегрирование по x дает

$$j_{sur}(x) = j_0 + \frac{d}{2\pi\lambda_L^2}\int\limits_{-w/2}^{w/2}\ln\left[\frac{(x-\xi)^2+\Delta^2}{(x-\xi)^2+\Delta^2+h^2}\right]j(\xi)d\xi, \qquad (13)$$

где j_0 — постоянная интегрирования.

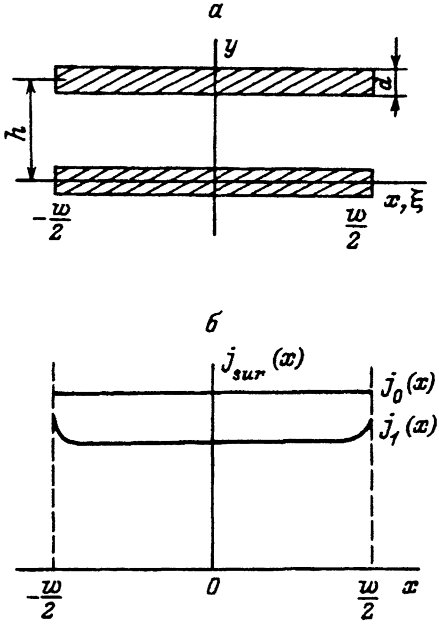

Рис. 4. Симметричная полосковая линия.
а — поперечное сечение и система координат, *б* — распределение тока на поперечном сечении проводников полосковой линии в нулевом и первом приближении процесса итерации.

Используем процесс итерации. Примем за нулевое приближение $j_{sur}(x) = j_0$. Тогда первое приближение в безразмерных координатах

$$j_1(x') = j_0 + \frac{1}{2\pi\Delta'}\int\limits_{-1}^{1} \ln\left[\frac{(x'-\xi')^2+\Delta'^2}{(x'-\xi')^2+\Delta'^2+h'^2}\right] j_0 d\xi', \tag{14}$$

где $x' = x/(w/2)$, $\Delta' = \Delta/(w/2)$, $\xi' = \xi/(w/2)$.

Функция $j_1(x')$ находится как табличный интеграл [12]. После некоторых упрощений получаем

$$j_1(0) \cong j_0(1-\frac{h'}{\Delta'}) = j_0\left(1-\frac{dh}{2\lambda_L^2}\right),$$

$$j_1(1) \cong j_0(1-\frac{h'}{2\Delta'}) = j_0\left(1-\frac{dh}{4\lambda_L^2}\right). \tag{15}$$

Решение уравнения (13) в нулевом и первом приближении показаны на рис. 4,*б*. Соотношения (15) позволяют заключить, что ток в поперечном сечении симметричной полосковой линии можно считать однородным в поперечном сечении, если выполнено условие

$$dh \ll 2\lambda_L^2. \tag{16}$$

При выполнении обратного неравенства следует пользоваться результатами предыдущих разделов настоящей работы. Условие, выраженное неравенством (16), совпадает с известным результатом для тонкой сверхпроводящей пленки над экраном [13], задающим условия, при которых распределение тока в пленке может считаться однородным.

Заключение

Получены формулы для описания распределения плотности тока в поперечном сечении тонкой сверхпроводящей пленки. Расходимость на краях пленки устранена представлением распределения тока в форме, удобной для количественных расчетов в задачах о критическом токе, кинетике разрушения сверхпроводящего состояния и в математическом обеспечении САПР СВЧ интегральных схем, в которых используются сверхпроводниковые пленки.

Распределение тока на поперечном сечении сверхпроводниковой линии передачи следует учитывать в задачах, связанных с измерением поверхностного импеданса сверхпроводящих пленок. Так, в [14] используется полосковый резонатор, в котором (в наших обозначениях) $w = 9$ мм, $h = 10 - 100$ мкм, $d = 0.5$ мкм. Очевидно, что неравенство (16) выполняется как обратное. Расчет по формуле (10) показывает, что поправка по отношению к расчету, основанному на равномерном распределении тока, составляет почти порядок, что не учитывается автором [15]. В [15] используется трехслойная структура с весьма тонким слоем диэлектрика между двумя слоями ВТСП, при этом $w = 25$ мкм, $h = t = 0.2$ мкм, при изменении температуры глубина проникновения оказывается в пределах $0.13 \leqslant \lambda_L \leqslant 1$ мкм. В этом случае неравенство (16) выполняется почти во всем интервале изменения λ_L. Поэтому результаты измерения λ_L и R_{sur} в [15] можно считать надежными, хотя при $\lambda_L \to 0.13$ мкм следовало бы провести уточнение, что может быть сделано путем более полного использования итерационного процесса, представленного в последнем разделе работы.

Настоящая работа включена в программу "Высокотемпературная сверхпроводимость" (проект № 90425). Авторы признательны Э.Кольбергу (Гетеборг), А.А.Андронову и А.Я.Басовичу (Нижний Новгород) за обсуждение постановки задачи и полученных результатов.

Список литературы

[1] *Rhoderick T.H., Wilson E.M.* // Nature. 1962. Vol. 194. P. 1167–1168.
[2] *Broom R.F., Rhoderick E.H.* // Proc. Phys. Soc. 1962 Vol .79. P. 586–593.
[3] *Glover R.E., Coffey H.T.* // Rev. Mod. Phys. 1964. Vol. 36. P. 299—301.
[4] *Лихарев К.К.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. С. 909- 917.
[5] *Ларкин А.И., Овчинников Ю.Н.* // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 1221–1229.
[6] *Sheen D.M., Ali S.M., Oates D.E. et al.* // IEEE Trans. on Appl. Superconductivity. 1991. Vol. 1. P. 108–115.
[7] *El-Ghazaly S.M.* // IEEE Microwave and Guided Wave Lett. 1991. Vol. 1. P. 252–254, 255-257.
[8] High-T_c superconductors: Physical Principles of Microwave Applications / Ed. O.G. Vendik. Leningrad, 1991.
[9] *Choshal U.* // IEEE Electr. Device Lett. 1989. Vol. 10. P. 373–376.
[10] *Ван Дузер Т., Тернер Ч.У.* Физические основы сверхпроводниковых устройств и цепей. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1984. 344 с.
[11] *Klein N., Chaloupka H., Muller G. et al.* // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 67. P. 6940–6945.
[12] *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1964. 228 с.

[13] *Muchowski E., Schmidt A.* // Z. Physik. 1972. Vol. 255. P. 187– 195.
[14] *Tabor R.C.* // Rev. Sci. Instr. 1990. Vol. 61. P. 2200– 2206.
[15] *Pond J.M., Carroll K.R., Horwitz J.S. et al.* // Appl. Phys. Lett. 1991. Vol. 59. P. 3033–3035.

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет

Поступило в Редакцию
10 июля 1992 г.