01;10

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА В ТРУБЧАТОМ РЭП

В.Г.Дорофеенко, В.Б.Красовицкий

Рассмотрена пространственная эволюция тонкого трубчатого РЭП в фольгированном волноводе с проводящими стенками на расстояниях, значительно превышающих радиус волновода. Показано, что учет радиационного трения приводит к переходу пучка из обычно наблюдаемого на эксперименте режима транспортировки в состояние с меньшей кинетической энергией (второе токовое состояние). Эффект связан с возникновением пространственного усиления стационарных волн плотности заряда в пучке из-за радиационного уменьшения плотности потока импульса и образования структуры типа ударной волны.

Введение

Известно, что ток трубчатого релятивистского электронного пучка (РЭП), инжектируемого в волновод с проводящими стенками вдоль бесконечно сильного магнитного поля, не может превышать некоторое предельное значение I_L [1–4]. Обычно вывод формулы для предельного тока основывается на предположении, что вдали от плоскости инжекции $z = 0$, $\varphi_{z=0} = 0$, (φ — потенциал электрического поля) параметры пучка достигают асимптотических значений, а электрическое поле является чисто радиальным

$$\varphi(r_b) = 2eI/v \cdot \ln(R/r_0), \quad I = -eNv, \quad v = c\left[1 - (\gamma_0 - \Phi)^{-2}\right]^{1/2}, \tag{1}$$

где $mc^2\gamma_0$ — энергия инжекции; I, N, v — ток, погонная плотность и скорость пучка; $\Phi = e\varphi(r_b)/mc^2$; $e > 0$ — заряд электрона; R и r_b — радиусы волновода и пучка соответственно.

Согласно (1), зависимость тока пучка от энергии его электронов имеет вид, показанный на рис. 1,*a*, так что решение существует при $I \leqslant I_L$, где I_L — предельный ток пучка,

$$I = I_0\beta(\gamma_0 - \gamma) \leqslant I_L, \quad I_L = I_0(\gamma_0^{2/3} - 1)^{3/2},$$
$$I_0 = mc^3/[2e \cdot \ln(R/r_b)]. \tag{2}$$

При этом точке *1* соответствует бо́льшая кинетическая энергия электронов и меньший потенциал, чем точке *2*.

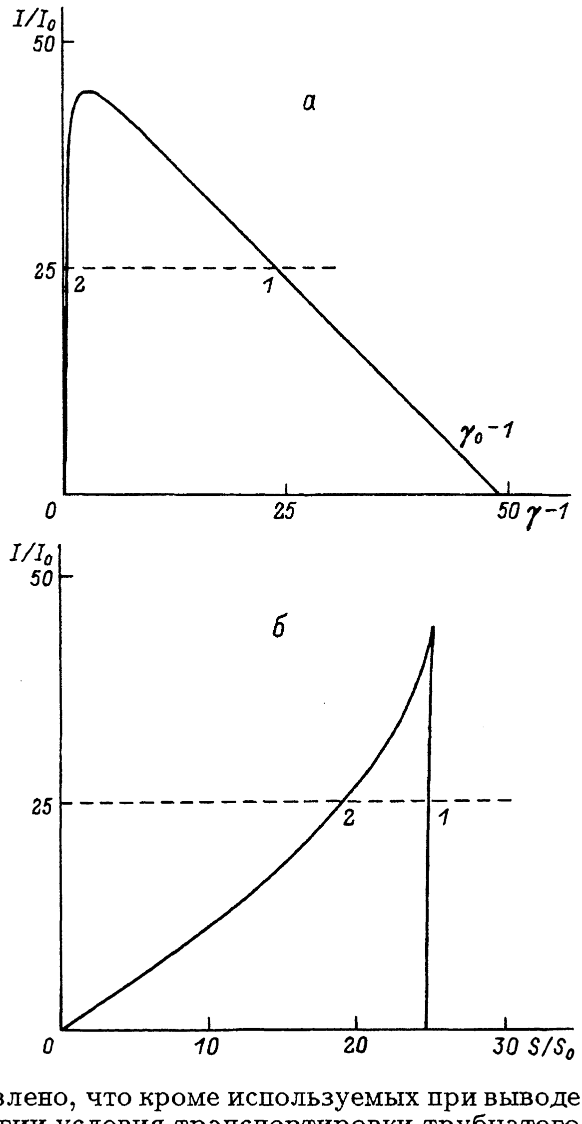

Рис. 1. Зависимость тока пучка I от энергии его электронов γ (a) и от потока импульса S (*б*).
Энергия инжекции $\gamma_0 = 50$;
1 — первое токовое состояние пучка,
2 — второе (при заданном токе I);
$S_0 = \gamma_0 mcI_0/e$.

В настоящей работе установлено, что кроме используемых при выводе (1), (2) интегралов тока и энергии условия транспортировки трубчатого РЭП в цилиндрическом вакуумном волноводе определяются также нелокальным интегралом потока импульса [5]

$$mc^2N\gamma\beta^2 + \frac{1}{4}\int\limits_0^R \left[(\partial\varphi/\partial r)^2 - (\partial\varphi/\partial z)^2\right] rdr = S, \tag{3}$$

который определяет "тонкую" энергетическую структуру системы. В отсутствие продольной компоненты электрического поля величина S определяется формулой (Приложение 1)

$$S = \frac{mc}{e} I_0(\gamma_0 - \gamma)[\gamma\beta^2 + (\gamma_0 - \gamma)/2]$$

(учтено, что ток пучка I зависит от его энергии γ в соответствии с (2)). Эта формула совместно с (2) задает в параметрическом виде зависимость $I(S)$, представленную на рис. 1,*б*. Как видно, первому токовому состоянию (помеченному цифрой *1* на рис. 1,*б*) соответствует большее значение потока импульса, чем второму $S_1 > S_2$ (строгое доказательство см. в Приложении 2). В то же время эти состояния пучка не являются единственными, так как в области $S_2 < S < S_1$ существует семейство периодических решений (стоячих волн плотности заряда), непрерывно заполняющих промежуток между ними. Очевидно, что переходы между этими состояниями запрещены в силу закона сохранения потока импульса (3).

Реальная физическая система не является консервативной, и наличие разного рода диссипативных процессов сопровождается уменьшением величины S (3), что соответствует переходу пучка $1 \to 2$ через все промежуточные состояния. Примером такого процесса, рассмотренного в работе [5], является коллективное рассеяние РЭП на фоновых ионах.

В настоящей работе в качестве конкретного механизма диссипации, приводящего к переходу $1 \to 2$, учитывается сила торможения излучением [6], действующая на электрон пучка при его движении в неоднородном электрическом поле.[1] В результате пучок переходит в состояние *2*, которое, как показывает эксперимент [4], является неустойчивым. Поэтому наше рассмотрение указывает на возможность срыва стационарных токов, близких к критическому значению.

Периодические волны плотности заряда в РЭП

Как показано в [3], для полуограниченного волновода уравнение Пуассона сводится к интегральному уравнению

$$\varphi = -e \int_0^\infty G(z, z') N(z') dz', \tag{4}$$

где функция Грина $G(z, z')$ может быть представлена в виде ряда [4] или в интегральном виде

$$G(z, z') = 4\pi^{-1} \int_0^\infty dk [I_0(kr_0) K_0(kr_b) -$$

$$- K_0(kR) I_0^2(kr_b)/I_0(kR)] \sin(kz) \sin(kz'), \tag{5}$$

где $I_0(x)$; $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго родов.

При этом зависимость потенциала φ от параметров пучка является нелокальной и определяется поведением функции $N(z)$ на полуоси $z > 0$.

Так как аналитическое решение уравнения (4) в общем виде найти не удается, то ниже получено асимптотическое решение, соответствующее

---

[1] Заметим, что электростатическая неустойчивость [4] возникает на входе пучка в волновод и формально отсутствует в случае неограниченной трубы, для которой дисперсионное уравнение не имеет комплексных корней

$z \to \infty$ ($z \gg R$). Фактически это исключает из рассмотрения узкий пограничный слой $\delta z \sim R$ [3], так что полученные ниже решения описывают распространение РЭП в неограниченном цилиндрическом волноводе, а роль плоскости инжекции сводится к определению тока и невозмущенной энергии пучка $mc^2\gamma_0$. Наличие быстро осциллирующих функций в интеграле (4) приводит к тому, что основной вклад дает область интегрирования $k \sim z^{-1}$ и функции Бесселя могут быть разложены в ряды при условии $kR \ll 1$, $kr_b \ll 1$. В этом случае функцию Грина можно представить в виде

$$G(z, z') = 2\ln(R/r_0) \cdot (1 + L^2 \cdot d^2/dz^2)\delta(z - z'),$$

$$L^2 = \left[R^2 - r_b^2 - r_b^2 \ln(R^2/r_b^2)\right] /4\ln(R/r_b). \tag{6}$$

После подстановки (6) в (4) с учетом (1) получаем нелинейное дифференциальное уравнение для плотности пучка

$$y'' = -y + \frac{I_0}{I}\left[\gamma_0 - y/(y^2 - 1)^{1/2}\right] = F(y), \tag{7}$$

где $y = eNc/I$, штрихом обозначена производная по $\xi = z/L$.

Проведенное выше асимптотическое разложение справедливо, если величина $|y''|$ мала по сравнению с каждым из слагаемых правой части уравнения (7). Поэтому область его применимости совпадает с областью значений параметров I и γ_0, где функция $|F(y)| \ll 1$. Кроме того, опущенные старшие производные $y^{(2n)}(z)(n \geqslant 1)$ будут малы лишь при условии достаточно медленного изменения функции $y(\xi)$: $|y''| \ll |y|/L^2$. Учитывая эти значения, разложим правую часть (7) в ряд в точке $y = y_{\min}$, $F'(y_{\min}) = 0$

$$F(y) = F(y_{\min}) + \frac{1}{2}F''(y_{\min}) \cdot (y - y_{\min})^2, \quad y_{\min} = \left[1 + (I_0/I)^{2/3}\right]^{1/2}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7) и учитывая формулу (2) для предельного тока пучка, получаем

$$y'' = \gamma_0^{1/3}(\gamma_0^{2/3} - 1)^{-1/2}(I_L/I - 1) - \frac{3}{2}\gamma_0^{1/3}(\gamma_0^{2/3} - 1)^{1/2}(y - y_{\min})^2. \tag{9}$$

Вводя безразмерные величины

$$w = \frac{\gamma_0^{1/3}}{(2|\delta|)^{1/2}}(y/y_{\min} - 1),$$

$$x = \gamma_0^{1/6}(|\delta|/2)^{1/4}\xi, \quad \delta = I_L/I - 1, \tag{10}$$

приводим (9) к виду

$$w'' = \sigma - 3w^2, \qquad \sigma = \mathrm{sgn}(\delta). \tag{11}$$

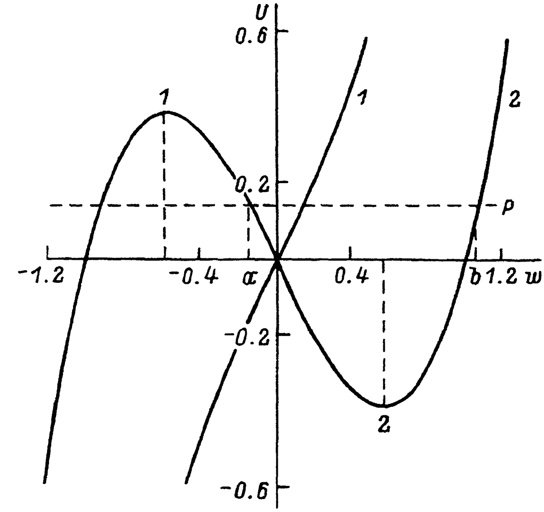

Рис. 2. Зависимость потенциальной энергии U материальной точки от координаты w.
1 — при $I > I_L$ $(\sigma = -1)$,
2 — при $I < I_L$ $(\sigma = 1)$;
на графике *2* отмечены первое (*1*) и второе (*2*) токовые состояния; a и b — корни уравнения $U(w) = P$.

Из (10) и (11) следует, что используемое приближение $|y''| \ll |y|/L^2$ и $|y - y_{\min}| \ll |y_{\min}|$ выполняется при токе, близком к критическому $|\delta| = |I_L/I - 1| \ll 1$.

Первый интеграл (11) имеет вид

$$w'^2/2 + U(w) = P, \quad U(w) = w^3 - \sigma w. \tag{12}$$

Для дальнейшего исследования решений (12) воспользуемся аналогией с механикой, считая w координатой точечной частицы с энергией P и потенциальной энергией $U(w)$. График функции $U(w)$ представлен на рис. 2. Для тока больше предельного $(\sigma = -1)$ потенциал не имеет экстремальных точек (кривая *1*) и движение частицы является инфинитным. При токе меньше предельного $(\sigma = 1)$ форма кривой изменяется (кривая *2*) и движение частицы может оказаться финитным. При этом точки *1* и *2* кривой $U(w)$ соответствуют двум равновесным состояниям пучка, представленным на рис. 1,*а*. При токе, равном предельному, точки *1* и *2* сливаются.

Следует отметить, что наше приближение, ограниченное неравенством $|w| \leqslant 1$, применимо только для финитных движений частицы, захваченной в потенциальную яму, что соответствует возникновению нелинейных пространственных осцилляций плотности пучка вблизи равновесного значения:[2]

$$w = a + Acn^2(\varkappa(x - x_0), k), \quad A = (1 - 2a^2/4)^{1/2} - 3a/2,$$

$$\varkappa = (1 - 3a^2/4)^{1/4}, \quad k = (A/2)^{1/2}/\varkappa, \tag{13}$$

где a — корень уравнения $w - w^3 + P = 0$ $(-1/3^{1/2} \leqslant a \leqslant 1/3^{1/2}$, рис. 2), x_0 — постоянная интегрирования.

[2] Качественное исследование пространственных осцилляций трубчатого пучка в вакуумном волноводе при произвольном значении параметра I/I_L проведено Л.А.Юдиным, И.Л.Кореневым.

При $P \to 2/3^{3/2}$ $(a \to 1/3^{1/2})$ период нелинейных колебаний

$$T(P) = 2^{1/2} \int_a^b (w - w^3 + P)^{-1/2} dw = 2K(k)/\varkappa \tag{14}$$

(b — максимальный корень подинтегральной функции, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода) обращается в бесконечность и существует солитонное решение

$$w = -1/3^{1/2} + \tilde{w}, \quad \tilde{w} = 3^{1/2}\,\mathrm{ch}^{-2}\left[\mathrm{arch}(3^{1/4}\tilde{w}_0^{1/2}) - 3^{1/4}x/2^{1/2}\right]. \tag{15}$$

Таким образом, в отсутствие диссипации энергии ток трубчатого пучка при $z/R \to \infty$ выходит на одно из равновесных состояний *1* и *2* или на периодическую асимптотику (см. формулу (13)), имеющую в качестве предельного случая солитонное решение (15).

Можно показать, что интеграл (12) соответствует закону сохранения потока импульса (3) через сечение волновода [5] (см. Приложение 1).

Влияние радиационного трения

В рассматриваемом случае моноскоростного пучка в бесконечно сильном магнитном поле, когда движение является одномерным, радиационная поправка к силе Лоренца (сила торможения излучением) может быть получена из общей формулы [6]

$$f_z = -\frac{2}{3} r_0 e \gamma \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \tag{16}$$

где $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона.

Учет силы (16) в уравнении движения электрона пучка приводит к появлению в уравнении (11) диссипативного слагаемого

$$w' + \nu w' = 1 - 3w^2, \qquad \nu = \frac{2^{5/4}}{3} \frac{r_0}{|\delta|^{1/4} L} \gamma_0^{5/6} \beta_0. \tag{17}$$

Для качественного анализа (17), как и раньше, считаем w координатой точечной частицы в потенциале $U(w)$ (рис. 2). Новое по сравнению с (11) слагаемое νw играет роль демпфирующей силы и приводит к опусканию колеблющейся частицы на дно потенциальной ямы. В результате солитонное решение уравнения (11) трансформируется в ударную волну, соответствующую переходу системы из состояния *1* в *2*. С ростом ν демпфирование колебаний увеличивается, при $\nu \geqslant \nu_c$ решение, соответствующее ударной волне, становится монотонным. Графики численных расчетов зависимости $w(x)$ при разных ν представлены на рис. 3,*а*–*в* и находятся в согласии со сказанным выше.

Величину ν_c находим, линеаризуя (17) вблизи равновесного значения $w = -3^{-1/2} + \tilde{w}\exp(ikx)$. Из решения соответствующего дисперсионного уравнения

$$k = \pm(2 \cdot 3^{1/2} - \nu^2/4)^{1/2} + i\nu/2 \tag{18}$$

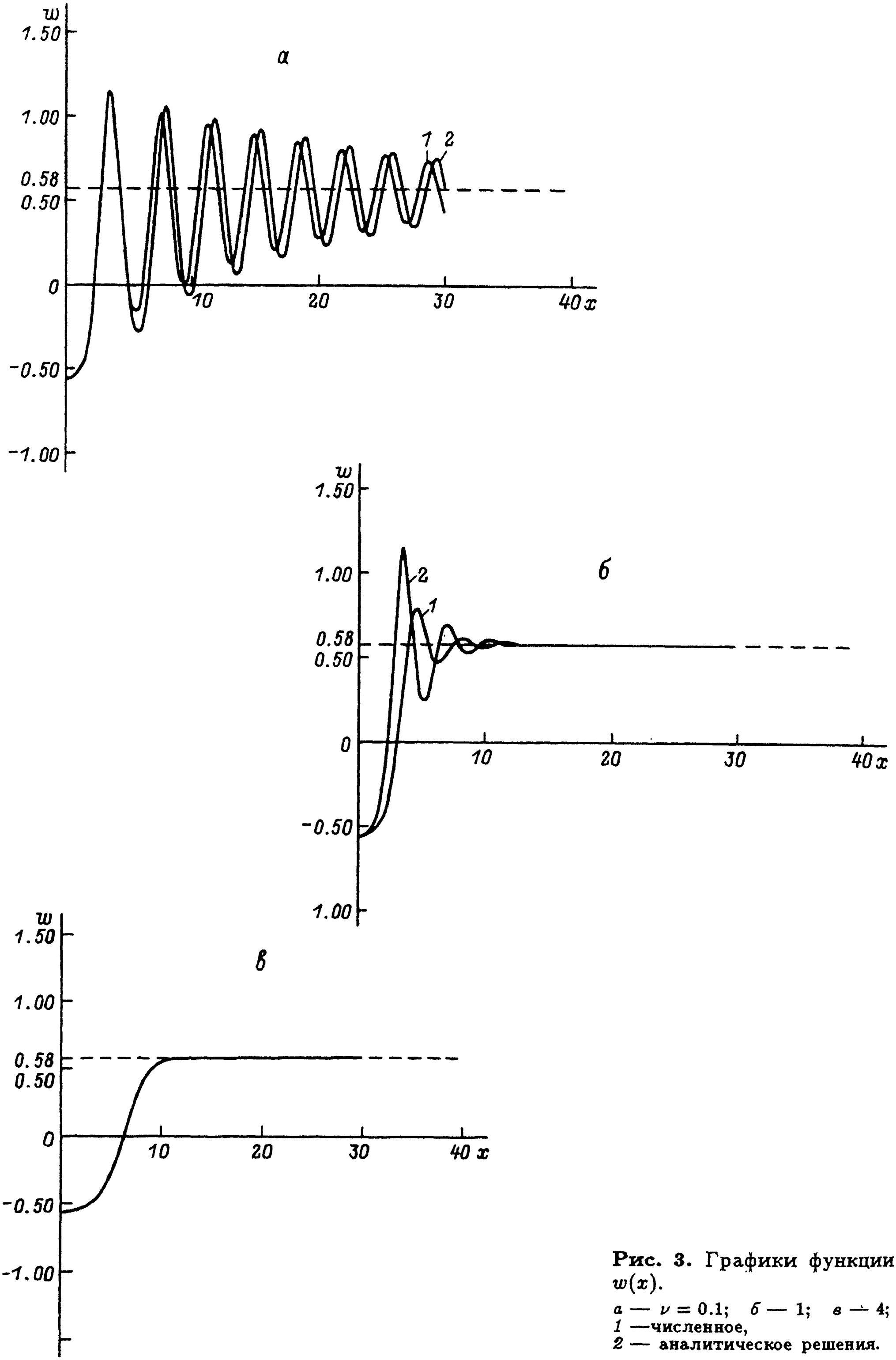

Рис. 3. Графики функции $w(x)$.
а — $\nu = 0.1$; б — 1; в — 4;
1 — численное,
2 — аналитическое решения.

следует $\nu_c = 2^{3/2} \cdot 3^{1/4}$.

Ввиду малости r_0 условие $\nu \ll 1$ является наиболее реалистичным. В этом случае можно найти асимптотическое по параметру ν аналитическое решение (17). Для этого усредним по периоду нелинейных колебаний T производную величины P (12) по x с учетом затухания (т.е. при выполнении уравнения (17)). В результате получим уравнение, определяющее медленное изменение амплитуды стоячей волны с координатой,

$$\frac{dP}{dx} = -\nu T^{-1} \int_0^T \left[\frac{dw_0(x,P)}{dx}\right]^2 dx, \tag{19}$$

где функция $w_0(x,P)$ задана в (13)

Вводя величину

$$I(P) = \int_0^T w_0'^2(x,P)dx = 2^{3/2} \int_a^b (w - w^2 + P)^{1/2} dw \tag{20}$$

и учитывая, что в силу (14) $T(P) = dI/dP$, приведем (19) к виду $I' + \nu I = 0$, откуда $I(P) = I(P_0)\exp(-\nu x)$, где $P_0 = 2/3^{3/2}$ соответствует солитонному решению (11). Подставляя (13) в (20) и вычисляя интеграл $I(P)$ (см. Приложение 3), получаем соотношение

$$2^{3/2} \cdot 3^{-5/4} \varkappa^5 \left[2(k^4 - k^2 + 1)E(k) - (1-k^2)(2-k^2)K(k)\right] = \exp(-\nu(x - x_0)), \tag{21}$$

задающее зависимость $a(\nu x)$ и $P(\nu x) = a^3 - a$ ($K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; A, $\varkappa$, k и a определены формулой (13)). Заметим, что более строгий математический подход [7,8] приводит к изменению не только амплитуды, но и фазы колебаний по сравнению с (13), так что асимптотическое решение (17) имеет вид

$$w(x) = a + Acn^2(\varphi, k), \quad \varphi = \varkappa T \int_{x_0}^{x} T^{-1} dx = K(k) \int_{x_0}^{x} \varkappa [K(k)]^{-1} dx. \tag{22}$$

При $\nu|x - x_0| \ll 1$ из (13) и (21) следует $k \to 1$, $a \to -1/3^{1/2}$, $A \to 3^{1/2}$ и формула (21) переходит в (15). При $x \to \infty$ с учетом (13) и (21) находим $k \to 0$, $A \to 0$, $w \to a \to 1/3^{1/2}$ (решение выходит на горизонтальную асимптоту,соответствующую второму токовому состоянию).

Результаты адиабатической теории иллюстрирует рис. 4,*а,б*. Графики двухмасштабных функций $w(x)$ при равных ν представлены на рис. 3,*а,б*. Как видно из графиков, аналитические расчеты с достаточной точностью аппроксимируют точное численное решение уравнений (17).

В заключение отметим, что длина релаксации пучка под действием силы радиационного трения (из (7), (10) и (17))

$$A \sim \frac{1}{\gamma_0 \beta_0} \frac{L^2}{r_0} \tag{23}$$

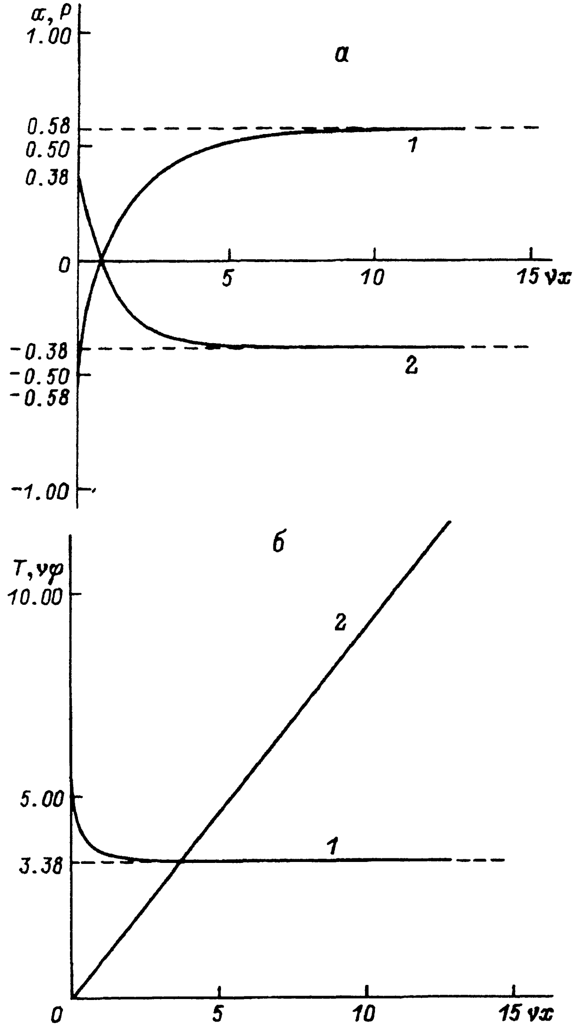

Рис. 4. Результаты адиабатической теории.
а — зависимость *a* (*1*) и *P* (*2*) от νx;
б — зависимость *T* (*1*) и $\nu\varphi$ (*2*) от νx.

(L определяется формулой (6)) для реальных волноводов $R \sim 1{-}10$ см оказывается очень большой из-за наличия в знаменателе классического радиуса электрона $r_0 = 2.8 \cdot 10^{-13}$ см. Однако известно, что сечение рассеяния электромагнитной волны электроном возрастает в $(\lambda/r_0)^2$ раз (λ — длина волны) при переходе от свободной частицы к осциллятору [9]. Поэтому для конечного магнитного поля $\lambda \sim c/\omega_H$ (ω_H — гирочастота) в условиях резонанса с волной $c/\omega_H \sim L \sim R$ можно ожидать значительного уменьшения длины релаксации (23). Однако подобное рассмотрение этого вопроса выходит за рамки данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Покажем, что интеграл (12) соответствует закону сохранения потока импульса через сечение пучка (3). Интегрируя в (3) слагаемое $\sim (\partial\varphi/\partial r)^2$ по частям с учетом уравнения Пуассона

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(z\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=2eN\frac{\delta(r-r_b)}{r}$$

и закона сохранения энергии ($\gamma-\gamma_0=-e\varphi/mc^2$), преобразуем это выражение к виду

$$mc^2N\left[\gamma\beta^2+(\gamma_0-\gamma)/2\right]+\frac{1}{4}\int\limits_0^R\left[\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]rdr=S. \qquad (\Pi1.1)$$

Интеграл (П1.1) вычисляем в длинноволновом приближении

$$\varphi(r,z)\approx-2eN(z)\cdot\begin{cases}\ln(R/r), & r>r_b,\\ \ln(R/r_b), & r<r_b.\end{cases}$$

После обезразмеривания получаем

$$\frac{y'^2+y^2}{2}-\frac{I_0}{I}\left[\gamma_0y-(y^2-1)^{1/2}\right]-$$
$$-\frac{y}{2}\left\{y''+y-\frac{I_0}{I}\left[\gamma_0-\frac{y}{(y^2-1)^{1/2}}\right]\right\}=-\frac{c^2}{2I^2\ln(R/r_b)}S. \qquad (\Pi1.2)$$

Выражение в фигурных скобках левой части (П1.2) в силу (7) равно нулю, а оставшееся выражение совпадает с первым интегралом уравнения (7) (т.е. с формулой (12) при $y\to y_{\min}$).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Воспользовавшись формулами (1), (2), (П1.1), вычислим производную dT/dS

$$\frac{dI}{dS}=\frac{dI/d\beta}{dS/d\beta}=\frac{eI_0}{mc}\frac{1}{\gamma\beta}>0. \qquad (\Pi2.1)$$

Поскольку в точке $I=I_L$ значения потоков импульса первого и второго состояний совпадают $S_1=S_2=S_L$, а в силу (П1.1) $dI_2/dS_2>dI_1/dS_1$, то (так как $S_{1,2}<S_L$) $I_2(S_2)$ убывает при уменьшении S быстрее, чем $I_1(S_1)$, и $S_1>S_2$ при заданном I (рис. 1,*б*).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вычисление интеграла $I(P)$ (20) удобно провести, изменив переменную интегрирования x на a в соответствии с соотношением

$$cn(\varkappa(x-x_0),k)=\cos\alpha. \qquad (\Pi3.1)$$

Тогда

$$I(P)=4\varkappa A^2\int\limits_0^\pi\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1-k^2\sin^2\alpha)^{1/2}d\alpha. \qquad (\Pi3.2)$$

Вычисление (П3.2) [10] приводит к формуле (21).

Список литературы

[1] *Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* // УФН. 1971. Т. 103. № 4 С. 609–640.
[2] *Brejzman B.N., Ryutov D.D.* // Nucl. Fusion. 1974. Vol. 14. P. 873–907.
[3] *Рютов Д.Д.* // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 4. С. 709–715.
[4] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. С. 117, 346–356.
[5] *Красовицкий В.Б.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 11 С. 1400–1406.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. С. 273.
[7] *Красовицкий В.Б.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 6. С. 1090–1095.
[8] *Крускал М.* Адиабатические инварианты. М.: ИЛ, 1962.
[9] *Файнберг Я.Б., Курилко В.И.* // ЖТФ. 1959. Т. 29. Вып. 3. С. 939.
[10] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 205 с.

Ростовский университет
Институт общей физики
Москва

Поступило в Редакцию
13 января 1992 г.