01;06;09;11

ДИСПЕРСИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.Ю.Коровкин

Исследовано распространение поверхностной магнитостатической волны вдоль направления произвольного периодического изменения внешнего подмагничивающего поля. Получены аналитические выражения для компонент магнитного поля волны. Рассмотрен частный случай моногармонического внешнего поля, для которого найдены элементы матрицы граничных условий, определяющей дисперсионную зависимость. Произведен численный расчет дисперсии.

Описанием положения дел в области исследования распространения волн различной природы в периодически неоднородных средах может служить обзор [1]. В общем случае развитые методы применимы и для рассмотрения задач о распространении магнитостатических волн (МСВ) в неоднородных структурах. При этом во внимание могут быть приняты различные типы неоднородности. Специфической (с точки зрения возможности гибкого управления свойствами структуры) является неоднородность внешнего подмагничивающего поля. Имеющиеся по этому вопросу работы [2,3] свидетельствуют о том, что неоднородность магнитного поля приводит к существенной перестройке дисперсионной зависимости. Однако используемый метод [4] (разложение магнитостатического потенциала в ряд Фурье с удержанием максимальных по величине членов — метод "связанных мод") позволяет получить решение лишь вблизи брэгговского резонанса. Предлагаемый в настоящей работе подход допускает получение решение в остальной области волновых чисел.

Предметом рассмотрения является структура, показанная на рис. 1. Она представляет собой полубесконечную ферромагнитную среду. При указанных направлениях распространения МСВ и подмагничивающего поля в однородном случае ($dH/dy = 0$) рассматриваемая структура поддерживает существование поверхностной волны на единственной частоте $\omega = \omega_H + (1/2)\omega_M$, где $\omega_H = \gamma H_e$, $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$, γ — гиромагнитное отношение, H_e — внешнее магнитное поле, M_0 — намагниченность насыщения материала.

Предполагая гармоническую зависимость параметров МСВ от времени, можно путем линеаризации получить из уравнения Ландау–Лифшица

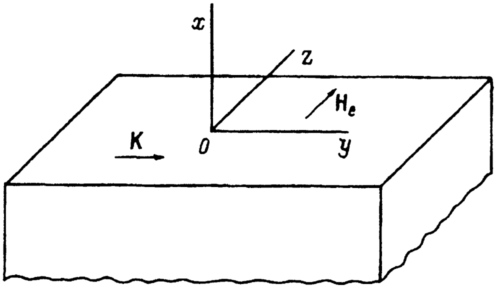

Рис. 1. Геометрия задачи.

$\partial\mathbf{M}/\partial t = \gamma[\mathbf{M},\mathbf{H}]$ выражение для тензора намагниченности

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -\mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\mu_1 = 1 - \frac{\omega_H\omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \mu_2 = \frac{i\omega\omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}.$$

Задача состоит в том, чтобы решить два динамических уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{div}\hat{\mu}\mathbf{h} = 0 \tag{1}$$

при условии, что $H_e = H_e(y)$. Запишем систему (1) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\mu_{10}}\dfrac{d\mu_2}{dy} & \dfrac{1}{\mu_{10}}\dfrac{d\mu_1}{dy} \end{pmatrix}\mathbf{h} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial y} = -\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial x} \tag{2}$$

или

$$\hat{Q}_1\mathbf{h} + Q_2\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial y} = -\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial x}.$$

Система двух дифференциальных уравнений второго порядка (2) имеет два решения $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$. Составим матрицу $\hat{H}$ из двух столбцов, соответствующих решениям $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$. Очевидно, матрица $\hat{H}$ является решением матричного уравнения

$$\hat{Q}_1\hat{H} + \hat{Q}_2\frac{\partial\hat{H}}{\partial y} = -\frac{\partial\hat{H}}{\partial x}. \tag{3}$$

Предположим возможность разделения переменных в уравнении (3). Для этого будем искать решение в виде $\hat{H} = \hat{Y}\hat{X}$, причем $\hat{Y} = \hat{Y}(y)$, а $\hat{X} = \hat{X}(x)$. В результате подстановки искомого решения в уравнение (3) имеем

$$\hat{Q}_1\hat{Y} + \hat{Q}_2\frac{d\hat{Y}}{dy} + \hat{Y}\hat{C} = 0,$$

$$\frac{d\hat{X}}{dx} = \hat{C}\hat{X}, \tag{4}$$

$\hat{C}$ — постоянная матрица разделения.

Для дальнейшего решения существен конкретный вид матрицы $\hat{C}$. Легко убедиться, что поверхностный характер решения второго уравнения системы (4) имеет место в том случае, если матрица разделения имеет вид

$$\hat{C} = c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Все три возможных вида матрицы приводимы друг к другу, так что остановимся на первом варианте. Подстановка его в первое уравнение системы (4) позволяет переписать его в несколько ином виде

$$\frac{d\mathbf{Y}_{1,2}}{dy} = \hat{Q}_3^{\pm}\mathbf{Y}_{1,2}, \tag{5}$$

где

$$\hat{Q}_3^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & \pm c \\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{d\mu_2}{dy} \mp c & -\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{d\mu_1}{dy} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \end{pmatrix}.$$

Все предшествующее изложение справедливо для любого характера зависимости $H_e(y)$. Для решения уравнений (5) с периодической матрицей $\hat{Q}_3^{\pm}$ воспользуемся методом [5]. Применим его к решению одного из уравнений (5), а именно

$$\frac{d\mathbf{Y}_1}{dy} = \hat{Q}_3^{+}\mathbf{Y}_1. \tag{6}$$

Решение для второго уравнения (5) получается из решения первого при замене знака перед константой c. Разложим матрицу $\hat{Q}_3^{+} = \hat{P}_0 + \hat{D}$, где

$$\hat{P}_0 = c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{d\mu_2}{dy} & -\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{d\mu_1}{dy} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\hat{D}$ зависит от неоднородной составляющей магнитного поля. Если эта зависимость слаба, то тогда возможно решение уравнения (6) методом [6]. Схема решения следующая.

1) Уравнению (6) сопоставляется матричное уравнение

$$\frac{d\hat{R}}{dy} = \hat{Q}_3^{+}\hat{R}. \tag{7}$$

Столбцы матрицы $\hat{R}$ есть решения уравнения (6).

2) Решение уравнения (7) ищется в виде $\hat{R} = \hat{F}e^{y\hat{P}}$, где $\hat{F}(y+T) = \hat{F}(y)$, $\hat{F}(y) = E + F_1(y) + \ldots$,

$$\hat{P} = \hat{P}_0 + \hat{P}_1 + \ldots, \quad \hat{P}_1 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \hat{D}\,dy,$$

где T — период неоднородности подмагничивающего поля.

3) Производится разложение

$$\hat{D} = \sum_m \hat{D}^m \exp(iK_m y), \quad K_m = \frac{2\pi m}{T}.$$

4) Из уравнения $iK_m \hat{W}^m = \hat{P}_0 \hat{W}^m - \hat{W}^m \hat{P}_0 + \hat{D}^m$ находятся коэффициенты $\hat{W}^m$. После этого недостающая величина $\hat{F}_1(y) = \sum\limits_{m \neq 0} \hat{W}^m \exp(iK_m y)$.

В результате выполнения перечисленных процедур получим два решения

$$\begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{22} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие уравнению (6). Второе уравнение (5) также имеет два решения. Из данных четырех решений необходимо скомпоновать искомую матрицу $\hat{Y}$. Два "правильных" из четырех полученных решений должны обеспечивать предельный переход к случаю однородного магнитного поля. Из требования удовлетворения полученного решения форме Флоке [4] можно установить связь $c \equiv c_j = k + K_j$.

Приведенные рассуждения позволяют записать полное решение для компонент магнитного поля МСВ в ферромагнетике

$$h_x = \frac{1}{2} \sum A_{\Phi j} \exp(k + K_j)x \exp i(k + K_j)y \times$$

$$\times \left[1 + \sum_{m \neq 0} \left(W_{11}^{jm} + iW_{12}^{jm} \right) \exp iK_m y \right],$$

$$h_y = \frac{1}{2} \sum_j A_{\Phi j} \exp(k + K_j)x \exp i(k + K_j)y \times$$

$$\times \left[i + \sum_{m \neq 0} \left(W_{21}^{jm} + iW_{22}^{jm} \right) \exp iK_m y \right]. \tag{8}$$

Полученное решение в ферромагнетике должно быть "сшито" на границе с решением уравнения $\Delta\varphi = 0$ в вакууме. Легко проверить, что этому уравнению удовлетворяет магнитостатический потенциал в виде

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_j A_{bj} \exp\left[-(k + K_j)x\right] \exp i(k + K_j)y. \tag{9}$$

В силу периодической зависимости μ_1 и μ_2 от y представим их в виде разложения в ряд Фурье

$$\mu_1 = \mu_{10} + \sum_{n \neq 0} \varepsilon_{1n} \exp iK_n y,$$

$$\mu_2 = \mu_{20} + \sum_{n \neq 0} \varepsilon_{2n} \exp iK_n y. \tag{10}$$

Используя (8)–(10), получим однородную алгебраическую систему на амплитуды

$$A_{\Phi l}(1+\mu_{10}+i\mu_{20})+\sum_{j\neq l}A_{\Phi j}\left[\varepsilon_{1,l-j}+\varepsilon_{2,l-j}+\mu_{10}\left(W_{11}^{j,l-j}+iW_{22}^{j,l-j}\right)+\right.$$
$$\left.+(\mu_{20}-i)\left(W_{21}^{j,l-j}+iW_{22}^{j,l-j}\right)\right]=0 \qquad (11)$$

или $\Gamma_{lj}A_{\Phi j}=0$. Элементы матрицы $\hat{\Gamma}$ в результате преобразований примут следующий вид:

$$\Gamma_{lj}=\left(\omega_H+\frac{1}{2}\omega_M-\omega\right)\delta_{lj}+\frac{\omega_M^2\gamma H_{1,l-j}}{4(\omega^2-\omega_H^2-\omega_H\omega_M)}\frac{\frac{kT}{2\pi}+l}{\frac{kT}{2\pi}+\frac{1}{2}(l+j)}. \qquad (12)$$

Здесь $H_{1,l-j}$ — коэффициенты фурье-разложения периодической составляющей постоянного магнитного поля. Для совместности системы (11) определитель матрицы $\hat{\Gamma}$ должен быть равен нулю. Это условие и определит дисперсионную зависимость $k(\omega)$.

В качестве примера рассмотрим структуру, в которой периодическая составляющая поля представима единственной гармоникой, т.е. $H_e=H_0+H_{1,-1}\exp(-iK_1y)+H_{1,1}\exp iK_1y$. Заметим сразу, что если и $H_{1,\pm1}=0$, то мы имеем дисперсионную зависимость

$$\omega=\omega_H+\frac{1}{2}\omega_M,$$

характерную для однородного случая. Если $H_{1,\pm1}\neq0$, то $\hat{\Gamma}$ — трехдиагональна и ее можно симметризовать

$$\hat{\Gamma}=\begin{pmatrix}\ddots & \lambda & a_{-1} & & & 0\\ & a_{-1} & \lambda & a_0 & & \\ & & a_0 & \lambda & a_1 & \\ 0 & & & a_1 & \lambda & \ddots\end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где

$$\lambda=\frac{4\left(\omega^2-\omega_H^2-\omega_H\omega_M\right)\left(\omega_H+\frac{1}{2}\omega_M-\omega\right)}{\omega_M^2\gamma|H_{1,1}|},$$
$$a_l=\sqrt{1-\frac{1}{4\left(\frac{kT}{2\pi}+l-\frac{1}{2}\right)^2}}. \qquad (14)$$

Для вычисления определителя матрицы следует разумно ограничить ее размерность. Численный расчет определителя конечной трехдиагональной матрицы удобно производить по выражению, получаемому с помощью LR-метода [7]

$$\det\hat{\Gamma}=\lambda-\cfrac{a_N^2}{\lambda-\cfrac{a_{N-1}^2}{\lambda-\cfrac{\cdots}{\lambda-\cfrac{a_{-N+1}^2}{\lambda}}}}. \qquad (15)$$

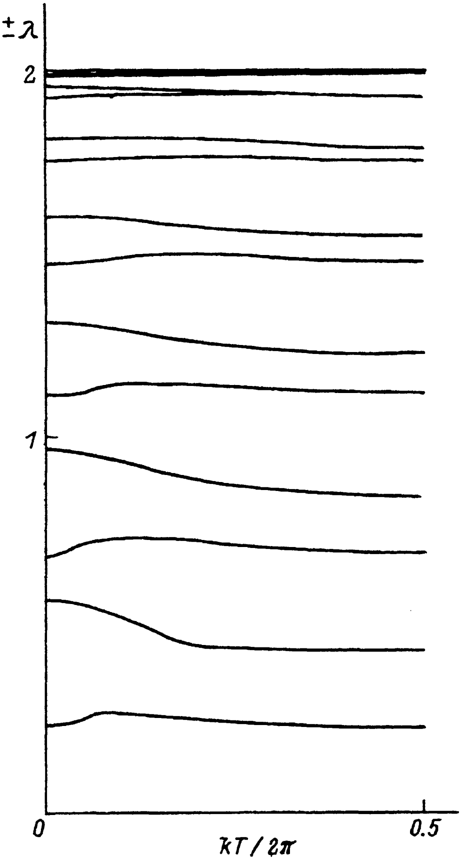

Рис. 2. Зависимость параметра λ от волнового числа.

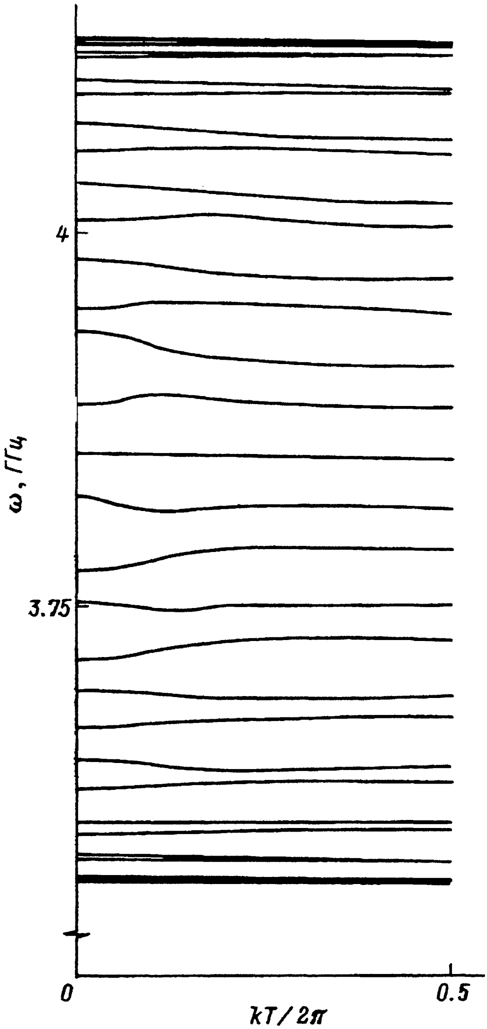

Рис. 3. Дисперсионная зависимость (при расчетах принято $\varepsilon = 0.1$).

Здесь матрица $\hat{\Gamma}$ ограничена размерностью $2N+1$ $(-N \leqslant l, j \leqslant N)$. Результат вычисления λ представлен на рис. 2. Из него, в частности, следует, что предельными значениями для λ являются числа ± 2. Чтобы получить дисперсионную зависимость, необходимо исключить λ из выражения (14). Зависимость (14) является кубической относительно ω. В области положительных частот имеется два нуля при

$$\omega_1 = \omega_H + \frac{1}{2}\omega_M, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_H^2 + \omega_H \omega_M}.$$

Поэтому очевидно, что при малой величине неоднородной добавки $(\varepsilon = |H_{1,1}|/H_0 \ll 1)$ дисперсионные кривые будут группироваться вблизи этих двух частот. Решение около ω_2 не является истинным, так как в нарушение приближения существенно возрастает поправочный член в выражении (12).

Из сказанного выше можно получить следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega_i = \omega_H(1 - \varepsilon\lambda_i) + \frac{1}{2}\omega_M, \tag{16}$$

где λ_i определяется в результате численного расчета.

Дисперсионная зависимость приведена на рис. 3. Из (16) следует,что диапазон существования МСВ в данной структуре ограничен предельными частотами

$$\omega_{ext} = \gamma\left(H_0 \pm |\tilde{H}_{1,1}| + \frac{1}{2}\omega_M\right),$$

где $\tilde{H}_{1,1}$ — коэффициент в действительной форме фурье-разложения неоднородного поля $\left(|\tilde{H}_{1,1}| = 2|H_{1,1}|\right)$.

Таким образом, наложение продольно-неоднородного магнитного поля существенно влияет на спектр поверхностной МСВ, снимая вырождение и приводя к значению $V_\Gamma = \partial\omega/\partial k \neq 0$, что придает рассматриваемой волне вполне физический смысл.

В заключение следует заметить, что предлагаемый подход к решению уравнений магнитостатики в условиях периодически неоднородного магнитного поля без какого-либо ограничения может быть использован и при рассмотрении задачи о распространении МСВ в ферромагнитной пленке.

Список литературы

[1] *Элаши Ш.* // ТИИЭР. 1976. Т. 64. № 12. С. 22–52.

[2] *Герус С.В., Харитонов В.Д.* // Физика металлов и металловедение. 1984. Т. 58. № 6. С. 1069–1072.

[3] *Зильберман П.Е., Уманский А.В.* // РиЭ. 1990. Т. 35. № 8. С. 1623–1629.

[4] *Peng S.T., Tamir T., Bertoni H.L.* // IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1975. Vol. MTT-23. P. 123–146.

[5] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. Изд. 4-е, доп. М.: Наука, 1988.

[6] *Якубович В.А., Стардинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

[7] *Ильин В.П., Кузнецов Ю.И.* Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985.

Научно-исследовательский институт
автоматических приборов
Новосибирск

Поступило в Редакцию
31 января 1992 г.
В окончательной редакции
14 сентября 1992 г.