

01:12

©1993 г.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

А.С.Дмитриев, О.Л.Крупский

Предлагается использовать инвариантную меру для идентификации и различения аттрактора некоторой динамической системы, генерирующей хаотические колебания с аттрактором выбранной эталонной системы по данным временным реализациям этих систем, на основе статистической теории проверки гипотез и принятия решений. На примере отображений логистического, Хенона и системы Лоренца показано, что критерий проверки гипотез Колмогорова–Смирнова является достаточно мощным для статистического анализа динамических систем с хаосом. Для этих систем получены оценки разрешений по параметру.

Введение

Методы нелинейной динамики являются эффективными средствами анализа стационарных эргодических процессов естественного и искусственного происхождения [1–4]. С их помощью можно, в частности, решать следующие задачи: определять, является ли данный процесс случайным или представляется собой детерминированный хаос, т.е. генерируется некоторой детерминированной динамической системой [5]; если установлено, что процесс является детерминированным хаосом, то исследовать такие его характеристики, как корреляционная размерность, размерность вложения, энтропия Колмогорова, показатели Ляпунова и т.д. [6], строить предикторы — модели, позволяющие предсказать поведение аттрактора по отрезку его реализации на времена, превышающие характерное время спада автокорреляционной функции [7–9].

Актуальной задачей представляется также идентификация аттрактора, отвечающего наблюдаемому процессу, с эталонным аттрактором и, наоборот, различение двух аттракторов по отрезкам соответствующих им временных реализаций. Ей и посвящена данная работа. Задача рассматривается в следующей постановке. Пусть имеется динамическая система, генерирующая хаотический процесс, характеристики которого зависят от некоторого параметра μ . Аттрактор, отвечающий хаотическому режиму при $\mu = \mu_1$, используется в качестве эталонного. Требуется разработать такую процедуру, которая позволила бы по отрезку наблюдаемой $x(t)$ динамической системы с некоторым другим значением $\mu = \mu_2$

установить, имеем ли мы дело с разными аттракторами или, наоборот, что свойства аттракторов близки друг другу, если разница $|\mu_1 - \mu_2|$ достаточно мала.

Традиционные характеристики, используемые при анализе динамического хаоса, такие как показатели Ляпунова, фрактальные размерности, энтропия Колмогорова и т.д., оказываются непригодными для решения поставленной задачи, так как численные значения, например, показателей Ляпунова могут случайно совпадать для аттракторов совершенно различных систем. Более того, даже в рамках одной системы, несмотря на чувствительную зависимость этих характеристик от управляющего параметра, достоверная идентификация по таким характеристикам невозможна. В качестве примера можно привести хорошо известную зависимость показателя Ляпунова λ (энтропии Колмогорова) от управляющего параметра μ логистического отображения: некоторому λ , допустим, найденному по эталонному аттрактору системы $\mu = \mu_1$ может соответствовать целый набор других аттракторов системы при различных μ . Аналогичные трудности возникают при использовании других вышеупомянутых характеристик, механизм получения которых предполагает усреднение по реализации.

Развиваемый в работе подход к идентификации и различению странных аттракторов основывается на существовании в фазовом пространстве динамической системы инвариантной функции распределения (ИФР) вероятностей $P(x)$ или инвариантной меры. Для эргодического, стационарного процесса распределение $P(x)$ определяет, какую часть времени система проводит в той или иной ячейке фазового объема. Инвариантность в этом случае означает, что $P(x)$ не зависит от времени t . Имеются общие теоремы, согласно которым в случае ограниченного фазового пространства всегда есть хотя бы одно инвариантное распределение [10–12].

Предлагается использовать ИФР для идентификации аттрактора с эталонным аттрактором и для различения аттракторов по данным временным реализациям на основе статистической теории проверки гипотез и принятия решений. Для этого исследуются статистические свойства распределений, полученных в численных экспериментах, их сходимость к ИФР в зависимости от начального распределения и от длины отрезка фазовой траектории, зависимость ИФР от параметров системы, возможность различить две ИФР, соответствующие разным параметрам системы.

В качестве примеров динамических систем рассматриваются логистическое отображение [13,14], отображение Хенона [14] и система Лоренца [15]. Для двумерного отображения Хенона и трехмерной системы Лоренца используются проекции ИФР на одну из осей фазового пространства. Экспериментальные плотности распределений (ЭПР) и соответствующие им экспериментальные функции распределений (ЭФР) строятся численными методами на основе расчетов относительного времени пребывания фазовой траектории в ячейках разбиения фазового пространства.

В качестве метода статистического анализа экспериментальных распределений для исследования зависимости распределений от начальных условий и параметров системы применяется критерий статистической проверки гипотез Колмогорова–Смирнова [16–18]. В соответствии с этим

критерием гипотезу H_0 о том, что две эмпирические функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, полученные по двум независимым выборкам размерами N_1 и N_2 , соответствуют одной и той же истинной функции распределения, следует принять, если величина $F_m = \max |F_1(x) - F_2(x)|$ превышает критический уровень D , в противном случае гипотеза H_0 отвергается и тогда принимается альтернативная гипотеза H_1 о том, что $F_1(x)$ и $F_2(x)$ имеют различные истинные распределения. D задается уровнем значимости критерия w или коэффициентом доверия $q = 1 - w$. В [17] показано, что вероятность неравенства

$$F > D \quad (1)$$

асимптотически стремится к $w = 1 - K(L)$, где

$$L = D \cdot \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$K(L)$ — распределение Колмогорова.

При проведении проверки гипотезы возможны следующие ситуации: 1) справедлива H_0 и критерий допускает H_0 ; 2) справедлива H_0 , но критерий не допускает H_0 ; 3) справедлива H_1 и критерий допускает H_1 ; 4) справедлива H_1 , но критерий не допускает H_1 .

Только в случаях 1 и 3 проверка гипотезы приводит к правильному результату. Вероятность ошибки 1-го (случай 2) рода равна уровню значимости w . Если вероятность ошибки 2-го рода (случай 4) равна p , то $k = 1 - p$ — мощность критерия.

Для нас важно, что выбранный критерий относится к непараметрическим, т.е. не зависит от вида распределений. Существенное ограничение, накладываемое на статистику при использовании этого критерия, — требование непрерывности ИФР. Это требование можно удовлетворить путем соответствующего выбора соотношения между размером ячейки разбиения фазового пространства и числом точек накопления. Другое ограничение при использовании критерия — предположение о статистической независимости наблюдаемых величин. Оно в значительной степени автоматически удовлетворяется для отображений Хенона и логистического отображения. Однако для системы Лоренца требуется специальный выбор последовательности представительных точек на фазовой траектории.

Логистическое отображение

Рассмотрим возможность идентификации странных аттракторов на примере аттракторов логистического отображения [13,14]

$$X_{n+1} = \mu \cdot X_n \cdot (1 - X_n); \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

На рис. 1, а, б представлен вид экспериментальных плотностей распределений для $\mu = 3.68$ и $\mu = 3.75$. Значение параметра $\mu = 3.68$ интересно тем, что в его окрестности (при $\mu = 3.678$) происходит кризис аттрактора [19]. При $\mu = 3.68$ ЭПР выглядит сравнительно просто, наблюдаются три резких пика, из них два крайних на границе аттрактора. По мере

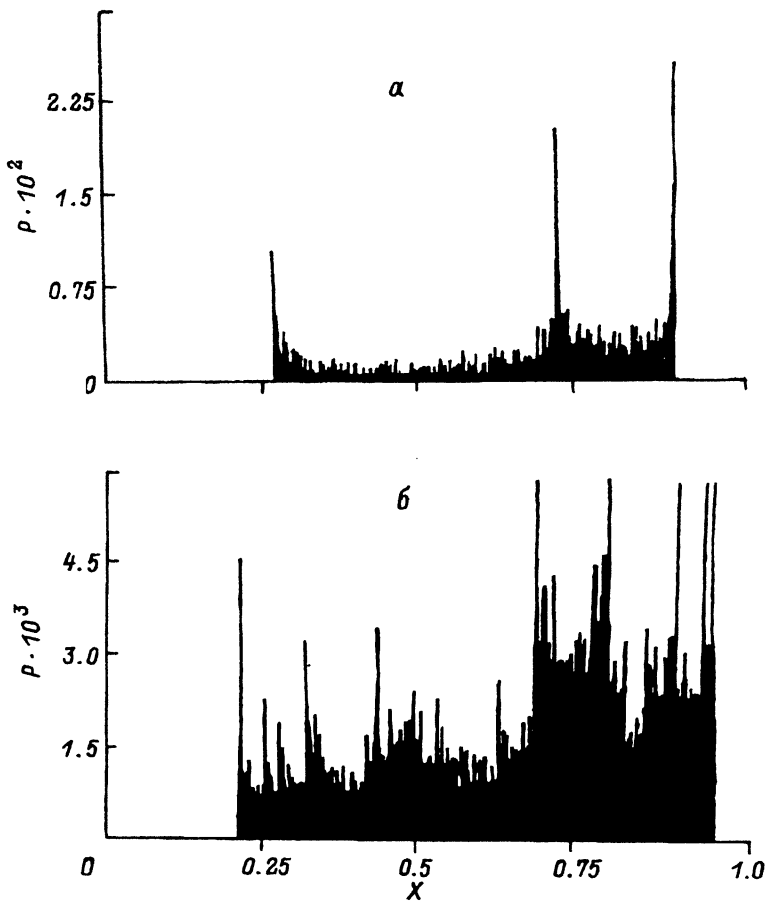


Рис. 1. ЭПР системы (2).

μ : а — 3.68, б — 3.75; N : а — 10^4 , б — $5 \cdot 10^4$.

роста μ происходит ряд обратных бифуркаций типа хаос-хаос, приводящих к появлению новых пиков в ЭПР. Рис. 1,б иллюстрирует “многопиковое” распределение при $\mu = 3.75$. Каждый пик соответствует некоторой обратной бифуркации. Последовательность точек бифуркации разбивает область исследуемого параметра на множество непересекающихся интервалов. Ширина каждого интервала будет ограничена значениями μ , соответствующими обратным бифуркациям. Уже по количеству пиков в ЭПР можно определить некоторую ширину R интервала значений параметра, в котором находится система (2). Однако между бифуркациями вид ЭПР качественно не меняется. Для того чтобы различать распределения системы при изменении ее параметра внутри межбифуркационного интервала, требуется более детальное исследование ЭПР. Проведем его, применяя критерий Колмогорова. При этом будем учитывать тот факт, что системы с хаосом весьма чувствительны к выбору начальных условий, поэтому конкретный вид реализации и ЭПР, вообще говоря, будет зависеть от начальных условий даже при фиксированном параметре.

Исследуем эту зависимость. Для этого зафиксируем параметр μ системы (2), зададим разные начальные условия X и X' и произведем

расчет двух реализаций одинаковой длины N . Пусть F_1 — ЭФР реализации с начальным условием X , а F_2 — с начальным условием X' , $F_m = \max|F_1 - F_2|$ и $L = F_m \cdot (0.5 \cdot N)^{1/2}$. Тогда критическая область для L определяется неравенствами $L > 1.36$ для $q = 95\%$, $L > 1.63$ для $q = 99\%$. Накопление статистики F_m производилось для значений N от 100 до $3 \cdot 10^4$ (при $N < 100$ критерий (1) неприменим). Для всех $N > 200$ величины L и F_m ни разу не попали в критическую область, соответствующую коэффициенту доверия 95%, значит, в соответствии с критерием (1) была принята верная гипотеза H_0 . Этот результат справедлив на всем исследуемом интервале параметров $3.6 < \mu < 4.0$. Статистика L на интервале параметра, ограниченном значениями μ от 3.68 до 3.70 при $N = 10^4$ отражена на рис. 3,а (нижняя кривая). Две горизонтальные линии $L = 1.36$ и $L = 1.63$ отвечают критическим значениям L для $q = 95$ и 99% соответственно. Тот факт, что уже для сравнительно коротких реализаций ($N = 200$) начальные условия оказывают слабое влияние на ЭФР, говорит о том, что система (2) довольно быстро сходится к своему аттрактору.

Теперь мы можем рассмотреть влияние параметра μ на распределение. Исследуем с помощью критерия (1), в какой мере отличаются ЭФР $F(\mu_1)$ и $F(\mu_2)$ системы (2), построенные по реализациям длиной N и соответствующие разным параметрам μ_1 и μ_2 . Рассмотрим $F_m = \max|F(\mu_1) - F(\mu_2)|$ и $L = F_m \cdot (0.5 \cdot N)^{1/2}$. Пусть эталонной является система (2) в состоянии μ_1 . Будем менять μ_2 с шагом $\Delta\mu = 5 \cdot 10^{-4}$ как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения от μ_1 . Получим зависимость L от μ_2 . На рис. 3,а дана статистика L при увеличении μ_2 при фиксированном $\mu_1 = 3.68$ (верхняя кривая), для $N = 10^4$. При малых $|\mu_1 - \mu_2|$ L в среднем растет, не превышая 5% уровня значимости. Это означает, что критерий (1) пока не дает нам возможности отличить $F(\mu_1)$ и $F(\mu_2)$ — принимается ложная гипотеза H_0 . Но уже при $|\mu_1 - \mu_2| > 3 \cdot 10^{-3}$ ситуация меняется: $L > 1.36$, т.е. будет принята верная гипотеза H_1 с вероятностью ошибки 1-го рода $w = 5\%$. Можно повысить коэффициент доверия: так, при $|\mu_1 - \mu_2| > 7 \cdot 10^{-3}$ имеем $L > 1.63$, т.е. L попадает в критическую область, соответствующую коэффициенту доверия $q = 99\%$, и вероятность ошибки 1-го рода уменьшается до 1%. Минимальное из найденных значений $\Delta\mu = |\mu_1 - \mu_2|$, при которых принимается верная гипотеза H_1 , назовем разрешением по параметру $\Delta\mu_{\text{раз}}$. Зависимость $\Delta\mu_{\text{раз}}$ от N приведена на рис. 4,а. Чем длиннее реализация, тем лучше разрешение. Так, для $N = 3 \cdot 10^4$ $\Delta\mu_{\text{раз}} = 2 \cdot 10^{-3}$.

Тем самым, имея два отрезка реализации системы (2), полученные при разных параметрах μ , мы можем различить соответствующие им аттракторы с разрешением $\Delta\mu_{\text{раз}}(N)$ и, наоборот, по отрезку реализации восстановить параметр системы μ с точностью не хуже $\Delta\mu_{\text{раз}} = 2 \cdot 10^{-3}$.

Отображение Хенона

Диссипативное отображение плоскости на себя, заданное итерационной системой

$$X_{n+1} = 1 - a \cdot X_n^2 + Y_n; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$Y_{n+1} = b \cdot X_n \tag{3}$$

в окрестности параметров $a = 1.4$, $b = 0.3$ имеет квазиаттракторы, связанные с подковой Смейла [14]. Система (3) является двумерным обобщением системы (2), в частном случае $b = 0$, (3) переходит в (2). Для $a = 1.4$, $b = 0.3$ вид распределений для координаты y точек последовательности показан на рис. 2,а. Отметим тот факт, что по виду распределения $P(X)$ и $P(Y)$ подобны, одно из другого может быть получено масштабным преобразованием абсциссы. Они имеют вид, типичный для нелинейных систем с параболической функцией преобразования, аналогичны полученным для отображения (2) "многопиковым" ЭПР.

Рассмотрим результаты для системы (3), полученные методом, описанным выше для системы (2). Вначале исследуем сходимость системы к своему аттрактору, определим минимальную длину реализации, распределение которой, согласно критерию (1), уже не зависит от выбора начальных условий, а затем найдем разрешение по параметру $\Delta a_{\text{раз}}$. Накопление статистики производилось по N от 100 до $3 \cdot 10^4$ точкам итерации в сечении $b = 0.3$ плоскости параметров при изменении параметра a . Отображение (3) достаточно быстро сходится к своему аттрактору. Двести точек уже достаточно, чтобы по критерию (1) рассматривать ЭПР как инвариантную меру на аттракторе. Действительно, при $N > 200$ верхняя граница разброса статистики L при вариации начальных условий не превышает 5% уровня значимости критерия. Этот результат верен в интервале значений параметра a от 1.38 до 1.42 (рис. 3,б, нижняя кривая).

Пусть эталонной является система (3) при $a_1 = 1.38$, $b = 0.3$. Результат идентификации эталонной системы с некоторой данной реализацией в соответствии с (1) зависит от величины L . В качестве идентифицируемой будем рассматривать реализацию на аттракторе той же системы (3) с $a_2 \neq a_1$. Расчеты показывают, что при $N > 3 \cdot 10^4$ аттракторы системы (3) различимы с коэффициентом доверия критерия (1) $q = 95\%$, если $|a_1 - a_2| > 3 \cdot 10^{-3}$. Соответствующая зависимость L от a_2 приведена на рис. 3,б. Зависимость разрешения по параметру a от длины реализации N показана на рис. 4,б.

Система Лоренца

Система Лоренца [15]

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma \cdot X + \sigma \cdot Y, \\ \dot{Y} &= r \cdot X - Y - X \cdot Z, \\ \dot{Z} &= -b \cdot Z + X \cdot Y \end{aligned} \quad (4)$$

при значениях параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ имеет решение, которое стремится к странному аттрактору. Аттрактор Лоренца с экспериментальной точки зрения является наиболее близким по своим свойствам к аттракторам гиперболического типа [10]. Аттрактор Лоренца при указанных значениях параметров будем рассматривать в качестве эталонного. Варьируемым параметром при идентификации аттракторов будет r . В отличие от итерационных последовательностей (2) и (3) система (4) имеет решение, непрерывно зависящее от времени t . В связи с этим следует учитывать следующие принципиальные моменты: 1) при численном

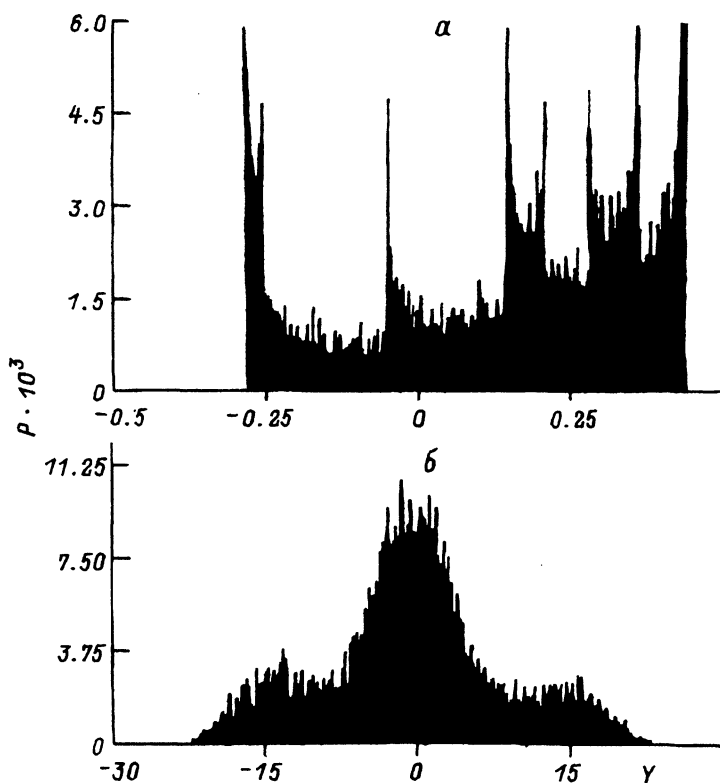


Рис. 2.

а — ЭПР по оси Y системы (3): $a = 1.4$, $b = 0.3$, $N = 5 \cdot 10^4$;
б — ЭПР по оси Y системы (4): $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

интегрировании на ЭВМ системы, находящейся в режиме странного аттрактора, конкретный вид реализации весьма чувствителен не только к изменению начальных условий, но и к заданию шага интегрирования, а также зависит от конкретного метода интегрирования; 2) в отличие от систем (2), (3) для непрерывного аттрактора системы (4) нельзя пренебречь наличием корреляций между точками вдоль фазовой траектории.

Отметим также, что здесь мы исследуем аттрактор, отличающийся по статистическим свойствам от рассмотренных выше аттракторов систем (2), (3). Поэтому необходимо выяснить, как сказываются эти особенности на мощности критерия Колмогорова в задаче идентификации странных аттракторов. Для численного интегрирования системы Лоренца использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка. Рис 2,б иллюстрирует вид экспериментального распределения по оси Y при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$. Вид распределения аттрактора системы (4) существенно отличается от распределений аттракторов систем (2), (3). Например, отсутствуют “пики” в ЭПР; ЭПР для (4) монотонно спадает до нуля на границе аттрактора, в то время как ЭПР для (2), (3) имеет характерные для аттракторов резкие “пики” на границах. Само распределение (4) обладает симметрией, связанной с симметрией самой системы Лоренца. Все эти особенности могут служить отличительными признаками при определе-

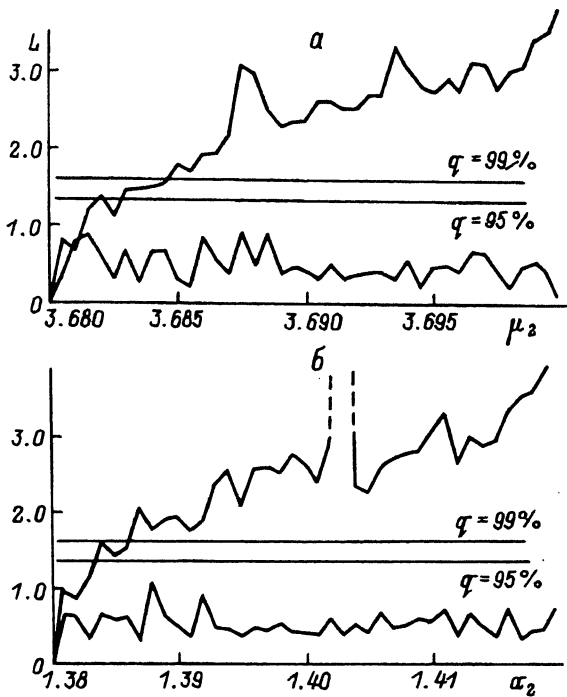


Рис. 3.

a — L при вариации начальных условий в системе (2), $N = 10^4$ (нижняя кривая) и зависимость L от μ_2 системы (2) при фиксированном $\mu_1 = 3.68$, $N = 10^4$ (верхняя кривая); *b* — L при вариации начальных условий в системе (3) $N = 3 \cdot 10^4$ (нижняя кривая) и зависимость L от α_2 системы (3) при фиксированном $\alpha_1 = 1.38$, $N = 3 \cdot 10^4$ (верхняя кривая).

нии типа аттрактора по заданной реализации. Исследуем влияние начальных условий на ЭПР с помощью критерия Колмогорова. Для этого накопим статистику $F_m = \max F(y') - F(y'')$ по совокупности реализаций, отличающихся друг от друга только выбором начальных условий. Результаты для статистики $L = F_m \cdot (0.5 \cdot N)^{1/2}$ следующие: некоторые из полученных значений L попадают в критическую область, в этих случаях верная гипотеза H_0 отвергается. Даже увеличив длину отрезка траектории t до 10^4 , не удастся избежать ошибки. В 20% наблюдений L попадает в критическую область.

Перейдем к рассмотрению влияния параметра r на ЭПР. Зависимость F_m от r при фиксированном $r = 28$ дает возможность определить разрешение по параметру $\Delta r_{\text{раз}}$. Для траекторий, длины которых $t > 10^4$, получаем: при $|r_1 - r_2| > 2$ $L > 1.63$, принимается верная гипотеза H_0 , $q = 99\%$, тем самым $\Delta r_{\text{раз}} = 2$.

Существенное ухудшение мощности критерия для системы (4) по сравнению с отображениями (2), (3) объясняется в первую очередь наличием корреляций вдоль непрерывной фазовой траектории системы (4). При этом характерное время спада автокорреляционной функции T_k соизмеримо с квазипериодом стохастических колебаний. Поэтому сходимость ЭФР к ИФР может быть установлена лишь по достаточно длинному отрезку траектории.

Для эффективного применения критерия (1) необходима статистическая независимость точек выборки. Такую выборку в принципе легко построить, если известно характерное время T_k спада автокорреляционной функции процесса, то можно построить ЭФР по выборке из точек, расстояние между которыми не меньше T_k вдоль траектории, однако

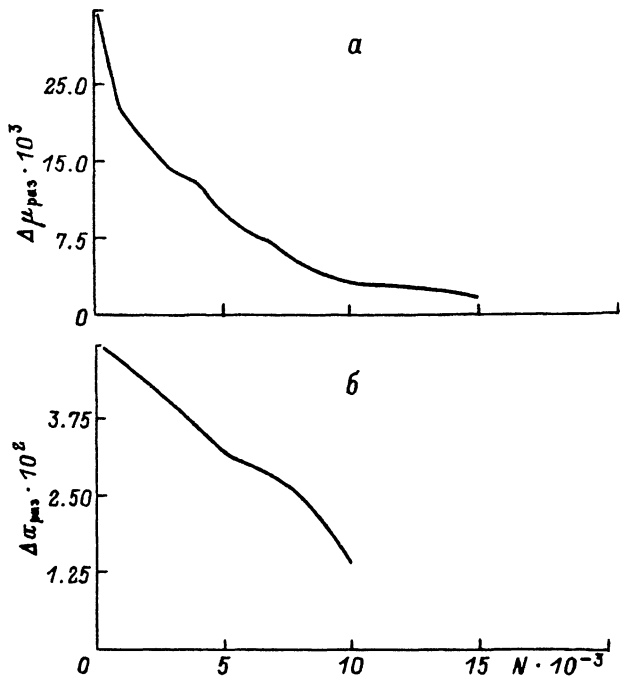


Рис. 4. Зависимость $\Delta\mu_{\text{раз}}$ системы (2) от N (а) и $\Delta\sigma_{\text{раз}}$ системы (3) от N (б), $q = 95\%$.

встает вопрос, каким способом осуществлять выбор таких точек из реализации. Рассмотрим два способа построения статистически независимых выборок. В первом из них производится расчет автокорреляционной функции процесса и в качестве элементов последовательности выбираются значения процесса, следующие друг за другом через T_k ,

$$X(t_0), X(t_0 + T_k), X(t_0 + 2 \cdot T_k), \dots, X(t_0 + N \cdot T_k), \quad (5)$$

где T_k — временной интервал, соответствующий положению первого нуля автокорреляционной функции.

В рассматриваемом случае численное значение $T_k = 0.6$. Расчеты показывают, что использование выборки (5) значительно улучшает мощность критерия Колмогорова.

При $N > 200$ ни одно из полученных значений F_m , зависящих только от начальных условий, ни разу не попало в критическую область, соответствующую $q = 95\%$, а при идентификации находим, что для $N = 3 \cdot 10^3$ удается отличить два аттрактора, если $|r_1 - r_2| > 1$. Поведение L при изменении r_2 иллюстрирует кривая l на рис. 5. Разрешение по параметру можно улучшить за счет увеличения длины реализации N или за счет уменьшения шага интегрирования h .

Второй способ основывается на хорошо известном факте, что последовательность локальных максимумов Z -компоненты системы (4) в окрестности параметров, выбранных нами в качестве эталонных, может быть приближенно представлена как итерационное отображение последования [15]

$$Z_{n+1} = f(Z_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где f — унимодальное отображение.

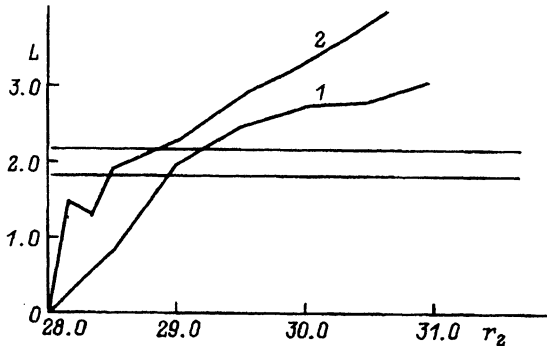


Рис. 5. Зависимости L от r_2 системы (4), полученные при фиксированном $r_1 = 28$ по выборке (5) (1) и по выборке (6) (2).

Среднее расстояние между соседними локальными максимумами Z больше T_k . Мы можем рассматривать отображение (6) как самостоятельную нелинейную динамическую систему и сравнивать ее с уже рассмотренными системами (2), (3). Результат применения нашей методики для (6) следующий: в соответствии с критерием (1), для того чтобы рассматривать ЭФР как не зависящую от выбора начальных условий, достаточно иметь выборку из $N = 200$ итераций (6), при этом коэффициент доверия не менее 95%. Поэтому для решения задачи идентификации или различения аттракторов с $q = 95\%$ достаточно выборки из $N > 200$. Например, при $N = 3 \cdot 10^3$ получаем разрешение по параметру r не хуже $\Delta r_{\text{раз}} = 0.5$. На рис. 5 кривая 2 отражает соответствующую статистику. Отметим, что второй способ приводит к лучшему результату.

Заключение

Итак, предложен метод для идентификации заданной временной реализации с эталонной системой в режиме динамического хаоса, а также для решения задач различения реализаций и восстановления параметра нелинейных систем с хаосом. На примере рассмотренных систем показано, что критерий проверки гипотез Колмогорова–Смирнова является достаточно мощным для статистического анализа сходимости экспериментальных распределений к инвариантной мере нелинейной динамической системы, что дает возможность установить сходимость фазовой траектории системы к ее аттрактору. Проведено исследование поведения инвариантной меры при изменении параметров логистического отображения, отображения Хенона, системы Лоренца. Для систем, в которых нельзя пренебречь корреляциями вдоль фазовой траектории, таких как система Лоренца (4) с непрерывной временной реализацией, указаны способы улучшения критерия.

Для одномерного логистического отображения (2) при $N = 3 \cdot 10^4$ получено разрешение по параметру $\Delta \mu_{\text{раз}} = 2 \cdot 10^{-3}$ с коэффициентом доверия критерия (1) $q = 0.95$. Для двумерного отображения Хенона (3) для тех же длин реализации $N = 3 \cdot 10^4$ получено разрешение по параметру $\Delta a_{\text{раз}} = 3 \cdot 10^{-3}$, $q = 0.95$. Результат для системы Лоренца зависит от способа построения точек выборки из временной реализации системы. Для выборки, полученной способом (5), $\Delta r_{\text{раз}} = 1$ ($N = 3 \cdot 10^3$, $T_k = 0.6$). Для отображения последования (6) локальных максимумов по оси Z системы Лоренца разрешение по параметру не хуже 0.5 при размере вы-

борки $N = 3 \cdot 10^3$. Чтобы сопоставить этот результат с результатами, полученными для отображения Хенона и логистического отображения, укажем значения относительных разрешений по параметру при фиксированном значении N ($N = 3 \cdot 10^3$): для логистического отображения (2) при эталонном $\mu = 3.68$ $\Delta\mu_{\text{раз}}/\mu = 4 \cdot 10^{-3}$, для отображения Хенона (3) при эталонном $a = 1.38$ $\Delta a_{\text{раз}}/a = 3 \cdot 10^{-2}$, для последования локальных максимумов системы Лоренца при эталонном $r = 28$ $\Delta r_{\text{раз}}/r = 2 \cdot 10^{-2}$.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что использование ИФР для идентификации и различения аттракторов динамических систем с хаосом обеспечивает достаточно высокое разрешение по параметру, а критерий проверки гипотез Колмогорова–Смирнова является достаточно мощным для статистического анализа таких систем.

Список литературы

- [1] Brandstater A., Swift J., Swinney H.L., Wolf A.A. // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. N 16. P. 1442–1445.
- [2] Broomhead D.S., King G.P. // Physica D. 1986. Vol. 20. N 2. P. 217–236.
- [3] Pawelzic K., Schuster H.G. // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35. N 1. P. 481–484.
- [4] Altmanspacher H., Scheingrater H., Voges W. // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 37. N 4. P. 1314–1322.
- [5] Wolf D. Noise in Physical Systems Series on Electrophysics 2. Heidelberg; New York: Springer, 1978.
- [6] Farmer J.D. Evolution of Order and Chaos. Heidelberg; New York: Springer, 1982.
- [7] Farmer J.D., Sidorowich J.J. // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 59. N 8. P. 845–848.
- [8] Casdagli M. // Physica D. 1989. Vol. 35. P. 335.
- [9] Abarbanel H.D.I., Brown R., Kadtke J.B. // Phys. Lett. A. Vol. 138. N 8. P. 401–408.
- [10] Синай Я.Г. // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 192–211.
- [11] Боголюбов Н.Н. Избранные труды. Киев.: Наукова думка, 1969. Т. 1. С. 411.
- [12] Eckmann J.P., Ruelle D. // Rev. Mod. Phys. 1985. Vol. 57. N 3. P. 617–656.
- [13] Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1988. С. 279.
- [14] Хенон М. // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 152–163.
- [15] Лоренц Э. // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88–116.
- [16] Ван-дер-Варден Б.Л. Математическая статистика. М.: ИЛ, 1960. С. 327.
- [17] Смирнов Н.В. Оценки расхождения между эмпирическими распределениями в двух независимых выборках. Бюл. МГУ. 1939. Т. 2. № 2.
- [18] Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979. С. 142.
- [19] Grebogi C., Yorke J. // Physica D. 1983. Vol. 7. N 1–3. P. 181–200.

Институт радиотехники и электроники
Москва

Поступило в Редакцию
12 ноября 1991 г.
В окончательной редакции
12 января 1993 г.