1993 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 63, в. 10
1993 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 63, N 10

01;03

СКАЛЯРИЗАЦИЯ ВЕКТОРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А.И.Григорьев, А.Э.Лазарянц

Предлагается метод скаляризации векторных уравнений гидродинамики вязкой жидкости в криволинейных ортогональных системах координат, создаваемых от скалярных функций посредством взаимно ортогональных векторных операторов. Метод основан на идее разложения искомого векторного решения по трем векторным же полям. Вводимая процедура позволяет существенно упростить и сократить процесс отыскания решения. Предлагаемый метод иллюстрируется решением задачи о капиллярных колебаниях вязкой сферической капли.

1. Решение векторных краевых задач матфизики вообще и задач гидродинамики вязкой жидкости, в частности, реализуется в громоздкой и трудоемкой вычислительной процедуре. Эта неприятная особенность векторных краевых задач особенно наглядно проявляется, когда граничные условия требуют применения криволинейных координат, орты которых не являются постоянными векторами. В такой ситуации вместо независимых уравнений для трех проекций искомого векторного поля на три постоянных орта (как в декартовых координатах) получается связанная система уравнений, отыскание решения которой, как правило, сопряжено со значительными математическими трудностями. В этой связи неоднократно предпринимались попытки сведения векторных дифференциальных уравнений матфизики к скалярным. Наиболее известная и плодотворная из них основана на теореме Гельмгольца [1], согласно которой любое векторное поле можно представить в виде суммы градиента скалярного потенциала и ротора векторного потенциала. Если по каким-либо причинам поле является потенциальным, т.е. его векторный потенциал равен нулю (а это реализуется в достаточно широком классе физических задач), то краевая задача для векторного поля сводится к скалярной для его скалярного потенциала. Имея в виду цель выражения искомого векторного поля через три скалярных, можно утверждать, что в общем случае одним из скалярных полей, определяющих векторное поле, может быть скалярный потенциал. Тогда два других скалярных поля должны единственным образом определить векторный потенциал. Несложно видеть, что для полного определения векторного потенциала действительно достаточно иметь лишь два скалярных поля, а не три, так

как дополнительное условие равенства нулю дивергенции векторного потенциала сокращает число независимых скалярных полей до двух [1].

Если в решаемой задаче имеется симметрия по одной из координат (а) отсутствует проекция векторного поля на ось, соответствующую этой координате; б) само векторное поле, а также коэффициенты Ламе выбранной координатной системы не зависят от этой координаты), тогда возможно определение соленоидального векторного поля на основе всего лишь одной скалярной функции — функции тока. Функция тока широко применяется в гидродинамике [2,3] для описания плоскопараллельных и осесимметричных течений, хотя возможно ее применение в любых векторных задачах математической физики, обладающих симметрией.

В более общей ситуации соленоидальное векторное поле может быть представлено в виде суммы тороидального и полоидального [1,4,5–8] векторных полей, ортогональность которых не раз доказывалась и которые легко выражаются через скалярные поля. Метод разложения произвольного векторного поля на потенциальное, тороидальное и полоидальное при использовании его в сферических координатах непосредственно связан с векторными сферическими функциями [4]. Обобщение метода собственных векторных функций на другие координатные системы произведено в теории упругости [9]. В этом методе векторное поле разлагается по собственным векторным функциям (так же как скалярное поле разлагается по собственным функциям в классическом методе Фурье). Если система собственных векторных функций известна, то дальнейшее решение не содержит каких-либо принципиальных сложностей. Однако процедура нахождения необходимого набора собственных векторных функций остается неопределенной, что существенно затрудняет использование данного метода.

Существенным шагом в развитии метода скаляризации векторных дифференциальных уравнений математической физики стал перенос центра тяжести рассмотрения от полей к векторным операторам, проектирующим векторное поле на скалярное. Основы этого метода были предложены Ганзеном [10] при решении векторного уравнения Гельмгольца и использовались для поиска собственных векторных функций. Этот метод получил распространение в электродинамике [11]. Однако непосредственное обобщение метода Ганзена на другие дифференциальные уравнения реализовать не удалось, так как скалярные поля, определяющие различные типы векторных полей в этом методе, различались лишь на константу.

Связь между методами операторной скаляризации Ганзена, разложением по собственным векторным функциям и разложением векторного поля на потенциальное, тороидальное и полоидальное обсуждается в [1]. Там же найдены виды систем координат, для которых возможны такие разложения. В [1] показано, что обсуждаемые разложения могут быть проведены, если в криволинейной системе координат один из коэффициентов Ламе равен единице, а отношение двух других не зависит от координаты, соответствующей первому коэффициенту Ламе. Существует лишь шесть координатных систем, удовлетворяющих этому условию, а именно прямоугольная декартовая, три цилиндрических, сферическая и коническая. В остальных системах координат решать векторные дифференциальные уравнения этими методами невозможно [1].

В настоящей работе будет проведено обобщение метода операторной скаляризации на другие виды операторов (помимо использованных в [1–10]) и проиллюстрировано его применение для решения задач линейной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Как будет видно из нижеизложенного, применение метода скаляризации приводит к существенному уменьшению вычислительной работы.

2. Пусть $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ — произвольное векторное поле, а $\Psi_1(\mathbf{r})$, $\Psi_2(\mathbf{r})$, $\Psi_3(\mathbf{r})$ — три скалярных поля, через которые может быть представлено векторное поле.

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{N}}_1\Psi_1 + \hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2 + \hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3, \tag{1}$$

$\hat{\mathbf{N}}_1, \hat{\mathbf{N}}_2, \hat{\mathbf{N}}_3$ — некоторые векторные операторы-проекторы, такие что векторные поля $\hat{\mathbf{N}}_1\Psi_1$, $\hat{\mathbf{N}}_2\Psi_2$, $\hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3$ являются ортогональными, т.е.

$$\int \left(\hat{\mathbf{N}}_i\Psi_i\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{N}}_j\Psi_j\right) dV = 0 \qquad (i; j = 1, 2, 3;\ i \neq j). \tag{2}$$

Интегрирование ведется по всему объему пространства, если оно не ограничено, с условием равенства нулю полей на бесконечности или с условием равенства нулю полей на жесткой границе для конечных областей.

Введем операторы $\hat{\mathbf{N}}_i^+$, эрмитово сопряженные операторам $\hat{\mathbf{N}}_i$,

$$\int F\hat{\mathbf{N}}_i G dV = \int G\hat{\mathbf{N}}_i^+ F dV, \tag{3}$$

где $F(\mathbf{r})$, $G(\mathbf{r})$ — произвольные (векторные или скалярные) действительные функции, и перепишем (2) в виде операторного соотношения

$$\hat{\mathbf{N}}_i^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j = 0 \qquad (i; j = 1, 2, 3;\ i \neq j), \tag{4}$$

которое должно выполняться независимо от скалярных функций, на которые будет действовать оператор $(\hat{\mathbf{N}}_i^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j)$.

Разложение по ортам криволинейной координатной системы, очевидно, может быть представлено в виде (1), если положить $\hat{\mathbf{N}}_i = \hat{\mathbf{e}}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, где $\mathbf{e}_i$ — орты осей координат.

Предположим, что векторное дифференциальное уравнение, которое требуется решить, может быть представлено в виде

$$\hat{L}\mathbf{U} = 0, \tag{5}$$

где $\hat{L}$ — некоторый скалярный дифференциальный оператор.

Представим векторное поле $\mathbf{U}$ в виде (1), выбрав операторы-проекторы $\hat{\mathbf{N}}_1, \hat{\mathbf{N}}_2, \hat{\mathbf{N}}_3$ так, чтобы они коммутировали с $\hat{L}$

$$\hat{\mathbf{N}}_i\hat{L} = \hat{L}\hat{\mathbf{N}}_i. \tag{6}$$

Тогда получим

$$\hat{\mathrm{N}}_1\hat{L}\Psi_1 + \hat{\mathrm{N}}_2\hat{L}\Psi_2 + \hat{\mathrm{N}}_3\hat{L}\Psi_3 = 0. \tag{7}$$

Подействовав слева на уравнение (2.7) операторами $\hat{\mathrm{N}}_1^+$, $\hat{\mathrm{N}}_2^+$, $\hat{\mathrm{N}}_3^+$, получим три независимых скалярных уравнения

$$\left(\hat{\mathrm{N}}_1^+ \cdot \hat{\mathrm{N}}_1\right)\hat{L}\Psi_1 = 0; \quad \left(\hat{\mathrm{N}}_2^+ \cdot \hat{\mathrm{N}}_2\right)\hat{L}\Psi_2 = 0; \quad \left(\hat{\mathrm{N}}_3^+ \cdot \hat{\mathrm{N}}_3\right)\hat{L}\Psi_3 = 0. \tag{8}$$

Если операторы-проекторы содержат в себе дифференциальные операторы, то порядок дифференциальных уравнений (8) выше, чем у исходного уравнения (5). Так как никаких дополнительных граничных условий не возникло, а порядок уравнения повысился, то решение нашей задачи в общем случае не было бы единственным. Однако этого неприятного момента не возникает, поскольку из коммутационных соотношений (6) вытекает, что операторы $\left(\hat{\mathrm{N}}_i^+ \cdot \hat{\mathrm{N}}_i\right)$ и $\hat{L}$ имеют общие системы собственных функций (хорошо известный результат квантовой механики). Поэтому из уравнений (8) следуют уравнения

$$\hat{L}\Psi_1 = 0, \quad \hat{L}\Psi_2 = 0, \quad \hat{L}\Psi_3 = 0, \tag{9}$$

имеющие тот же порядок, что и исходное уравнение (5). Таким же образом могут быть скаляризованы уравнения, не сводящиеся к (5).

Рассмотрим теперь вопрос о выборе операторов-проекторов $\hat{\mathrm{N}}_1$, $\hat{\mathrm{N}}_2$, $\hat{\mathrm{N}}_3$, удовлетворяющих свойству ортогональности (4) Для определенности будем исходить из следующего представления операторов-проекторов:

$$\hat{\mathrm{N}}_1 \equiv \hat{\mathbf{A}}; \quad \hat{\mathrm{N}}_2 \equiv \hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{B}}; \quad \hat{\mathrm{N}}_3 \equiv \hat{\mathbf{A}} \times \left(\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{B}}\right), \tag{10}$$

где операторы $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ будем называть образующими проекторов.

Будем считать образующие $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ эрмитовыми (самосопряженными) или антиэрмитовыми операторами. Такое представление удобно потому, что оно обобщает методы скаляризации, рассмотренные в разделе 1 данного анализа. Так, разложение произвольного поля на потенциальное, тороидальное и полоидальное может быть записано в виде (1), причем операторы-проекторы $\hat{\mathrm{N}}_i$, удовлетворяющие условиям ортогональности (4), имеют образующие

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \boldsymbol{\nabla}; \quad \hat{\mathbf{B}} \equiv \mathbf{r}.$$

При описании соленоидального поля на основе функции тока в случае наличия симметрии по одной из координат, например, по углу φ для осевой симметрии, образующие имеют следующий вид:

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \boldsymbol{\nabla}; \quad \hat{\mathbf{B}} \equiv \mathbf{e}_\varphi / h_\varphi,$$

где $\mathbf{e}_\varphi$ — орт оси φ, h_φ — соответствующий коэффициент Ламе.

Функцией тока является скалярное поле Ψ_2, а векторное поле $\hat{\mathbf{N}}_3\Psi_3$ в этом случае равно нулю.

Существуют представления операторов-векторов $\hat{\mathbf{N}}_i$, не сводящиеся к (10). Так, операторы

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \hat{\mathbf{n}}; \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{n}; \quad \hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\nabla})$$

удовлетворяют соотношению ортогональности для произвольного единичного векторного поля, которое может являться полем нормалей к некоторой поверхности, т.е.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1; \quad \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{n} = 0.$$

Операторы, сопряженные операторам-проекторам (2.10), имеют вид

$$\hat{\mathbf{N}}_1^+ = \hat{\mathbf{A}}^+; \quad \hat{\mathbf{N}}_2^+ = -\hat{\mathbf{B}}^+ \times \hat{\mathbf{A}}^+; \quad \hat{\mathbf{N}}_3 = \left(\hat{\mathbf{B}}^+ \times \hat{\mathbf{A}}^+\right) \times \hat{\mathbf{A}}^+. \tag{11}$$

Ортогональность операторов $\hat{\mathbf{N}}_1$, $\hat{\mathbf{N}}_2$ и операторов $\hat{\mathbf{N}}_1$, $\hat{\mathbf{N}}_3$

$$\hat{\mathbf{N}}_1^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 = 0; \quad \hat{\mathbf{N}}_2^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_1 = 0;$$

$$\hat{\mathbf{N}}_1^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_3 = 0; \quad \hat{\mathbf{N}}_3^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_1 = 0$$

выполняется для данного представления при условии

$$\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{A}} = 0. \tag{12}$$

Если, кроме того,

$$\left(\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{A}}\right) \mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}} \left(\hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{A}}\right) + \hat{\mathbf{A}}\hat{Q},$$

$$\hat{\mathbf{B}} \cdot \left(\hat{\mathbf{A}} \times \hat{\mathbf{B}}\right) = 0, \tag{13}$$

где $\hat{Q}$ — скалярный оператор, который подбирается таким образом, чтобы удовлетворить (13); операторы-проекторы $\hat{\mathbf{N}}_2$, $\hat{\mathbf{N}}_3$ ортогональны друг другу

$$\hat{\mathbf{N}}_2^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_3 = 0; \quad \hat{\mathbf{N}}_3 \cdot \hat{\mathbf{N}}_2 = 0.$$

Таким образом, если образующие удовлетворяют условиям (12), (13), операторы-проекторы образуют полный ортогональный набор векторных операторов в трехмерном пространстве.

3. Применим теперь метод скаляризации к системе уравнений и граничных условий линейной гидродинамики вязкой жидкости со свободной поверхностью. Для определенности рассмотрим модельную задачу о колебаниях капли вязкой несжимаемой жидкости в окрестности невозмущенной сферической формы радиуса R под действием сил поверхностного натяжения и зададимся целью найти спектр колебаний. Эта задача рассматривалась многими авторами [6,12–14]. Методы решения векторных уравнений в них были различными, но всегда весьма громоздкими.

Итак, пусть уравнение возмущенной поверхности капли описывается уравнением

$$r = R + \xi(\theta, \varphi, t) \tag{14}$$

в сферической системе координат $\{r, \theta, \varphi\}$ с началом в центре невозмущенной сферической формы. В переменных, обезразмеренных на параметры жидкости (ее плотность, вязкость и поверхностное натяжение), уравнения линейной гидродинамики для поля скоростей $\mathbf{U}$ и поля давлений P имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \Delta \mathbf{U} + \nabla \mathbf{P} = 0; \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{U} = 0; \tag{15}$$

На свободной поверхности жидкости выполняются граничные условия $r = R$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial \xi}{\partial t};$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + \mathbf{e}_r \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = 0; \quad (\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi);$$

$$-P + 2\mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + P_\sigma(\xi) = 0;$$

$$P_\sigma(\xi) = -\frac{1}{R^2}(2 + \Lambda)\xi;$$

$$\Lambda \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{16}$$

Выбрав набор операторов-проекторов в виде $\hat{\mathrm{N}}_1 = \boldsymbol{\nabla}$; $\hat{\mathrm{N}}_2 = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{r}$; $\hat{\mathrm{N}}_3 = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{r})$ и пользуясь методикой, изложенной в предыдущем разделе, получаем уравнения на скалярные функции Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3

$$\Delta\Psi_1 = 0; \quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial t} - \Delta\Psi_2 = 0; \quad \frac{\partial\Psi_3}{\partial t} - \Delta\Psi_3 = 0 \tag{17}$$

и выражение для давления

$$P = -\frac{\partial\Psi_1}{\partial t},$$

которое позволяет исключить его и из граничных условий. Граничные условия, получаемые из (16), приобретают вид

$$r = R: \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r}\Lambda\Psi_3 = \frac{\partial\xi}{\partial t}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{2r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_1}{r} + r\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial r^2} - \frac{2+\Lambda}{r}\Psi_3\right\} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_2}{r}\right\} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{2r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_1}{r} + r\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial r^2} - \frac{2+\Lambda}{r}\Psi_3\right\} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_2}{r}\right\} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} + 2\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial r^2} - 2\Lambda\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_3}{r} - \frac{1}{R^2}(2+\Lambda)\xi = 0. \tag{21}$$

Граничные условия (19) и (20) совместны, если одновременно равны нулю выражения в скобках, т.е.

$$2r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_1}{r}+r\frac{\partial^2\Psi_3}{\partial r^2}-\frac{2+\Lambda}{r}\Psi_3=0;$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi_2}{r}=0. \qquad (22)$$

Несложно заметить, что функция Ψ_2 не оказывает влияния на остальную часть анализируемой системы, так как задача на ее отыскание не зависит от Ψ_1, Ψ_3, ξ и она не входит в уравнения, из которых находятся Ψ_1, Ψ_3, ξ.

При рассмотрении собственных колебаний вязкой капли зависимость от времени у всех полей предполагается известной $\sim \exp(st)$, $s=-\gamma+$ $+\,i\omega$, где ω — частота колебаний, γ — декремент затухания. Решения уравнений (17) легко выписываются в общем виде

$$\Psi_1(r,t)=\sum_{l,m}C^1_{lm}(s)\left(\frac{r}{R}\right)^l Y_l^m\exp(s_lt);$$

$$\Psi_3(r,t)=\sum_{l,m}C^3_{lm}(s)\frac{i_l(\sqrt{s}r)}{i_l(\sqrt{s}R)}Y_l^m\exp(s_lt),$$

где Y_l^m — сферические функции, $i_l(x)$ — модифицированные сферические функции Бесселя.

Выражение для ξ имеет вид

$$\xi=\sum_{l,m}z_{lm}(s)Y_l^m\exp(s_lt).$$

Подставляя Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 в граничные условия (18), (21), (3.9), получаем систему трех уравнений относительно коэффициентов z_{lm}, C^1_{lm}, C^3_{lm}. Приравнивая нулю определитель этой системы, сразу же получаем дисперсионное соотношение, совпадающее с полученным в работах [12,13], но найденное без сколь-либо заметных математических трудностей

$$s_l^2+2(l-1)\frac{1}{R^2}\frac{2l+1-l(l+2)f_l(\sqrt{s_l}R)}{1--f_e(\sqrt{s_l}R)}s_l+\frac{1}{R^3}l(l-1)(l+2)=0,$$

где

$$f_l(x)=\frac{2}{x}\frac{i_{l+1}(x)}{i_l(x)}.$$

Таким образом, разобранный пример иллюстрирует простоту и удобство решения сложных векторных краевых задач предлагаемых методом, разработка которого была предпринята ранее в работах [14,15].

В заключение следует указать, что попытки принять идеи скаляризации при решении краевых задач гидродинамики предпринимались и ранее (см., например, [16,17]), но, ввиду того что основные положения метода, введенного для решения электродинамических задач [10,11], применялись к задачам гидродинамическим напрямую, без модификации к специфике уравнения Навье–Стокса и граничным к условиям на свободной поверхности, выгода предлагаемого метода скаляризации оказалась утерянной, завуалированной использованием в [16,17] громоздких собственных функций векторного уравнения Гельмгольца.

Список литературы

[1] *Морс Ф., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1960. 886 с.
[2] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
[3] *Хаппель Дж., Бренер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
[4] *Блатт Дж., Вайсконф В.* Теоретическая ядерная физика. М.: ИЛ, 1954.
[5] *Baskus G.E.* // Ann. Phys. 1958. Vol. 4. P. 372–447.
[6] *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 628 p.
[7] *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 640 с.
[8] *Быков В.М.* // ПМТФ. 1980. № 2. С. 65–70.
[9] *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 342 с.
[10] *Hansen W.W.* // Phys. Rev. 1935. Vol. 47. P. 139–143.
[11] *Стреттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 539 с.
[12] *Miller C.A., Scriven R.E.* // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 32. N 3. P. 417–435.
[13] *Prosperetti A.* // J. Mecanique. 1980. Vol. 19. N 1. P. 149–181.
[14] *Григорьев А.И., Лазарянц А.Э.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 5. С. 52–56.
[15] *Лазарянц А.Э., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 1. С. 29–36.
[16] *Затовский А.В., Залиндовский А.В.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 9. С. 129–131.
[17] *Miskovsky N.M., Chung M., Cuter P.H.* et al. // J. Vac. Sci. Technol. 1988. Vol. A6. N 5. P. 2992–2997.

Ярославский университет

Поступило в Редакцию
30 октября 1992 г.
В окончательной редакции
16 апреля 1993 г.