01;10

АБЕРРАЦИИ ТРАНСАКСИАЛЬНЫХ ЛИНЗ

Ю.Л.Бадакер, С.П.Карецкая

Получены новые результаты в теории аберраций трансаксиальных линз. Рассматриваются аберрации в направлении, параллельном средней плоскости линзы. Показано, что в узловой плоскости пространства изображений их коэффициенты геометрических и хроматических аберраций выражаются через элементарные функции от кардинальных элементов линзы и отношения потенциалов предметного пространства и пространства изображений. Показано, что при соответствующем выборе начальных параметров, задающих траекторию, можно вдвое сократить число членов в аберрационной поправке. Коэффициент отверстной хроматической аберрации и постоянная сферической аберрации для произвольного линейного увеличения m_x представлены в виде выражений, которые сводятся к полиномам по степеням m_x^{-1} и содержат только по одному коэффициенту, зависящему от распределения поля в линзе.

Аберрации трансаксиальных линз, характеризующие фокусирующие свойства линзы в направлении, параллельном средней плоскости, исследовались ранее в работе [1]. Из дифференциального уравнения второго порядка для проекции траектории на среднюю плоскость были выведены формулы десяти аберрационных коэффициентов геометрических аберраций третьего порядка и двух коэффициентов хроматических аберраций.

Важные дополнительные сведения об этих аберрациях можно получить, если записать и проанализировать дифференциальное уравнение первого порядка, следующее из постоянства азимутального импульса в осесимметричном поле. Это уравнение, будучи представлено в декартовой системе координат, имеет следующий вид:

$$\frac{\sqrt{\varphi^* + \varepsilon}(x'z - x)}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} = \text{const}. \tag{1}$$

Ось y используемой декартовой системы координат совмещена с осью симметрии электрического поля, плоскость $y = 0$ — с его плоскостью симметрии, ось z направлена вдоль главной оптической оси линзы. Штрихи обозначают дифференцирование по z. Электростатический потенциал $\varphi^* = \varphi^*(r, y)$, $r = \sqrt{x^2 + z^2}$. На оптической оси линзы $\varphi^*_{x=y=0} = \varphi(z)$. Условием нормировки потенциала является равенство кинетической энергии частицы $W = -e(\varphi^* + \varepsilon)$, где ε характеризует отклонение частицы от основной энергии.

Разложив в уравнении (1) функции $(\varphi^*+\varepsilon)^{1/2}$ и $(1+x'^2+y'^2)^{-1/2}$ в ряды по степеням малых x, y, x' y', ε и удерживая в окончательном выражении члены, необходимые для рассмотрения хроматических аберраций и геометрических аберраций третьего порядка малости, получим уравнение, справедливое для частиц, движущихся вблизи оптической оси,

$$\sqrt{\varphi}(x'z-x)\left(1+\frac{\varphi_0}{2\varphi}\varepsilon_0-\frac{1}{2}x'^2+\frac{\varphi'}{4z\varphi}x^2-\frac{1}{2}y'^2+\frac{\varphi_{02}}{4\varphi}y^2\right)=B. \tag{2}$$

Здесь

$$\varphi_{02}=\left.\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^2}\right|_{y=0}=-\frac{d^2\varphi}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr},$$

B — константа, которую можно определить из начальных условий,

$$B=\sqrt{\varphi_0}(x_0'z_0-x_0)\left[1+\frac{1}{2}(\varepsilon_0-x_0'^2-y_0'^2)\right].$$

Через φ_0 обозначен потенциал предметного пространства, x_0' и y_0' — значения x' и y' в этом пространстве, $\varepsilon_0=\varepsilon/\varphi_0$. Плоскость $z=z_0$ является предметной, x_0 — значение координаты x в точке пересечения траектории с предметной плоскостью.

Решая уравнение (2) методом последовательных приближений, найдем, что в параксиальном приближении

$$\sqrt{\varphi}(x'z-x)=C, \tag{3}$$

где постоянная $C=\sqrt{\varphi_0}(x_0'z_0-x_0)=-\sqrt{\varphi_0}x_{c0}=-\sqrt{\varphi_1}x_{c1}$. Здесь введено обозначение $x_{c0}=x_0-x_0'z_0$ для координаты x точки пересечения падающего луча или его прямолинейного продолжения с плоскостью $z=0$; координата точки пересечения с этой плоскостью выходящего из линзы луча или его продолжения обозначена как x_{c1}. Отметим, что $x_{c1}/x_{c0}=\sqrt{\varphi_0/\varphi_1}$. Из (3) очевидно, что в плоскости $z=0$ сливаются узловые плоскости предметного пространства и пространства изображений любой трансаксиальной линзы, независимо от ее геометрии и распределения поля. В одиночной линзе здесь же расположены и обе главные плоскости H_{x0} и H_{x1}, $z(H_{x0})=z(H_{x1})=0$. Речь идет об асимптотических кардинальных элементах.

Решение уравнения (3) будет

$$x=z\left(\frac{x_0}{z_0}+C\int\limits_{z_0}^{z}\frac{dz}{z^2\sqrt{\varphi}}\right)=z\left[\frac{x_0}{z_0}+C\left(\frac{1}{z_0\sqrt{\varphi_0}}-\frac{1}{z\sqrt{\varphi}}-\frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\varphi'dz}{z\varphi^{3/2}}\right)\right]=$$

$$=z\left[x_0'-C\left(\frac{1}{z\sqrt{\varphi}}+\frac{1}{2}\int\limits_{z_0}^{z}\frac{\varphi'dz}{z\varphi^{3/2}}\right)\right]. \tag{4}$$

Отсюда легко придем к результатам, полученным ранее в [2]. Приведем здесь основные из них, они потребуются нам в дальнейшем. Координаты фокусов предметного пространства и пространства изображений $z(F_{x0})$, $z(F_{x1})$ и фокусные расстояния f_{x0} и f_{x1} определяются формулами

$$\frac{1}{z(F_{x0})} = -\frac{1}{f_{x1}} = \frac{\sqrt{\varphi_0}}{2} g_1,$$

$$\frac{1}{z(F_{x1})} = \frac{1}{f_{x0}} = -\frac{\sqrt{\varphi_1}}{2} g_1, \tag{5}$$

где

$$g_1 = \int\limits_{z_a}^{z_b} \frac{\varphi' dz}{z^2 \varphi^{3/2}};$$

z_a и z_b — границы области, занятой полем; φ_1 — потенциал пространства изображений.

Положение плоскости изображений $z = z_1$ определяется уравнением

$$\frac{1}{z_1\sqrt{\varphi_1}} - \frac{1}{z_0\sqrt{\varphi_0}} = -\frac{1}{2} g_1 = \frac{1}{f_{x1}\sqrt{\varphi_0}} = \frac{1}{f_{x0}\sqrt{\varphi_1}}. \tag{6}$$

Линейное увеличение $m_x = z_1/z_0$. Полезными будут и такие соотношения

$$\frac{z_0}{f_{x1}} = \gamma_x - 1; \quad \frac{z_1}{f_{x1}} = \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_1}} - m_x;$$

$$\frac{z_1}{f_{x0}} = 1 - \gamma_x^{-1}; \quad \frac{z_0}{f_{x0}} = m_x^{-1}\sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_0}}, \tag{7}$$

где γ_x — угловое увеличение.

Координата x_{c0} играет важную роль при рассмотрении аберраций трансаксиальных линз. Траектории с $x_{c0} = 0$ не выходят из меридиональных плоскостей (азимутальный импульс частиц, движущихся по этим траекториям, равен нулю), их проекции на среднюю плоскость являются прямыми линиями, проходящими через центр. Для них в x-направлении отсутствуют линейные и угловые аберрации любого порядка. Поэтому можно заранее утверждать, что если задать траекторию координатами x_{c0}, y_0 и наклонами x'_0, y'_0, то в аберрационной поправке Δx не должно быть членов, которые не содержат в качестве множителя x_{c0}. Т.е. вместо обычных двух коэффициентов хроматической аберрации и десяти коэффициентов геометрических аберраций третьего порядка в этом случае придется иметь дело только с одним коэффициентом хроматической и с пятью коэффициентами геометрических аберраций. Выберем в качестве базового именно такое представление Δx. Тогда $\Delta x = A_\varepsilon x_{c0}\varepsilon_0 + A_1 x_{c0}^3 + A_2 x'_0 x_{c0}^2 + A_3 x_0'^2 x_{c0} + A_5 x_{c0} y_0^2 + A_6 x_{c0} y_0 y'_0 + A_7 x_{c0} y_0'^2$.

Возвращаясь к уравнению (2), запишем его сначала для пространства изображений

$$\sqrt{\varphi_1}(x'_1 z - x) = C\left[1 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 - x_0'^2 - y_0'^2 - \frac{\varphi_0}{\varphi_1}\varepsilon_0 + x_1'^2 + y_1'^2\right)\right], \tag{8}$$

где x_1' и y_1' — значения x' и y' в этом пространстве.

В правой части (8) для них следует использовать формулы параксиального приближения

$$x_1' = x_0'\gamma_x - \frac{x_0}{f_{x1}} = x_0' - \frac{x_{c0}}{f_{x1}},$$

$$y_1' = y_0'\gamma_y - \frac{y_0}{f_{y1}},$$

где для направления, перпендикулярного к средней плоскости, введены сходные с x-направлением обозначения: γ_y — угловое увеличение, f_{y1} — фокусное расстояние в пространстве изображений, y_0 — значение соответствующей координаты в предметной плоскости.

Уравнение (8) позволяет сразу найти координату $x(0)$ точки пересечения выходящего из линзы или его прямолинейного продолжения с плоскостью $z = 0$ в искомом приближении

$$x(0) = \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_1}}x_{c0} + A_\varepsilon(0)x_{c0}\varepsilon_0 + A_1(0)x_{c0}^3 + A_2(0)x_0'x_{c0}^2 +$$
$$+A_3(0)x_0'^2 + A_5(0)x_{c0}y_0^2 + A_6(0)x_{c0}y_0y_0' + A_7(0)x_{c0}y_0'^2, \tag{9}$$

где

$$A_\varepsilon(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_1}}\left(1 - \frac{\varphi_0}{\varphi_1}\right),$$

$$A_1(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_1}}\frac{1}{f_{x1}^2},$$

$$A_2(0) = -\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_1}}\frac{1}{f_{x1}}, \quad A_3(0) = 0,$$

$$A_5(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_1}}\frac{1}{f_{y1}^2}, \quad A_6(0) = -\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_1}}\frac{\gamma_y}{f_{y1}},$$

$$A_7(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_1}}(\gamma_y^2 - 1).$$

Таким образом, аберрационные коэффициенты в этой плоскости пространства изображений выражаются через элементарные функции от параксиальных характеристик линзы и, если последние известны, могут быть легко вычислены.

Аберрации в пространстве изображений будут полностью определены, если вычислить аберрационные коэффициенты еще в какой-нибудь плоскости этого пространства, например, в фокальной $z = z(F_{x1})$. Формулы для коэффициентов $A_i(F_{x1})$, где $i = \varepsilon, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, найдем из уравнения

$$\sqrt{\varphi}(x'z - x) = C\left[1 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 - x_0'^2 - y_0'^2 - \frac{\varphi_0}{\varphi}\varepsilon_0 + x'^2 - \frac{\varphi'}{2z\varphi}x^2 + y'^2 - \frac{\varphi_{02}}{2\varphi}y^2\right)\right], \tag{10}$$

в правую часть которого вместо x, y, x' и y' подставим решения соответствующих параксиальных уравнений

$$x = z\left(\frac{x_0}{z_0} + C\int\limits_{z_0}^{z}\frac{dz}{z^2\sqrt{\varphi}}\right), \quad x' = \frac{x}{z} + \frac{C}{z\sqrt{\varphi}},$$

$$y = y_0' y_\alpha + y_0 y_\beta, \quad y' = y_0' y_\alpha' + y_0 y_\beta'.$$

Частные решения y_α и y_β удовлетворяют следующим начальным условиям: предметной плоскости $y_\alpha(z_0) = 0$, в предметном пространстве $y_\alpha' = 1$, $y_\beta = 1$, $y_\beta' = 0$.

Выполнив необходимые преобразования, получим

$$x(F_{x1}) = x_0' f_{x0} + A_\varepsilon(F_{x1}) x_{c0}\varepsilon_0 + A_1(F_{x1}) x_{c0}^3 + A_2(F_{x1}) x_{c0}^2 x_0' +$$

$$+ A_3(F_{x1}) x_{c0} x_0'^2 + A_5(F_{x1}) x_{c0} y_0^2 + A_6(F_{x1}) x_{c0} y_0 y_0' + A_7(F_{x1}) x_{c0} y_0'^2, \qquad (11)$$

где

$$A_\varepsilon(F_{x1}) = -\frac{f_{x0}}{2}\left(\frac{1}{f_{x1}}\frac{\varphi_0}{\varphi_1} + \frac{3}{2}\varphi_0^{3/2}\int\limits_{z_a}^{z_b}\frac{\varphi' dz}{z\varphi^{5/2}}\right),$$

$$A_1(F_{x1}) = \frac{f_{x0}}{2}\left(\frac{1}{3f_{x1}^3} + \frac{1}{2}\varphi_0^{3/2}\int\limits_{z_a}^{z_b}\frac{\varphi' dz}{z^3\varphi^{5/2}}\right),$$

$$A_2(F_{x1}) = 0, \qquad A_3(F_{x1}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_1}},$$

$$A_5(F_{x1}) = \frac{f_{x0}\sqrt{\varphi_0}}{2}\int\limits_{z_0}^{z_{F_{x1}}}\left(\frac{\varphi_{02}}{2\varphi}y_\beta^2 - y_\beta'^2\right)\frac{dz}{z^2\sqrt{\varphi}},$$

$$A_6(F_{x1}) = f_{x0}\sqrt{\varphi_0}\int\limits_{z_0}^{z_{F_{x1}}}\left(\frac{\varphi_{02}}{2\varphi}y_\alpha y_\beta - y_\alpha' y_\beta'\right)\frac{dz}{z^2\sqrt{\varphi}},$$

$$A_7(F_{x1}) = \frac{f_{x0}\sqrt{\varphi_0}}{2}\int\limits_{z_0}^{z_{F_{x1}}}\left(\frac{\varphi_{02}}{2\varphi}y_\alpha^2 - y_\alpha'^2\right)\frac{dz}{z^2\sqrt{\varphi}} + \frac{f_{x0}}{2z_0}.$$

Таким образом, при движении в средней плоскости только один из коэффициентов геометрических аберраций $A_i(F_{x1})$, $i = 1{-}3$, зависит от распределения электрического поля в линзе, а именно $A_1(F_{x1})$, коэффициент $A_2(F_{x1}) = 0$, коэффициент $A_3(F_{x1})$ определяется только отношением потенциалов предметного пространства и пространства изображений.

Коэффициенты угловых аберраций A'_{i1} в пространстве изображений определяются формулами

$$A'_{i1} = \frac{A_i(F_{x1}) - A_i(0)}{f_{x0}}. \tag{12}$$

Коэффициенты линейных аберраций $A_i(z)$ в произвольной плоскости этого пространства

$$A_i(z) = A_i(0) + A'_{i1}(z) = A_i(F_{x1})\frac{z}{f_{x0}} + A_i(0)\left(1 - \frac{z}{f_{x0}}\right). \tag{13}$$

Соответственно для плоскости гауссова изображения, используя (7), получим

$$A_i(z_1) = A_i(F_{x1})(1 - \gamma_x^{-1}) + A_i(0)\gamma_x^{-1}. \tag{14}$$

Несложно записать через A_i и коэффициенты B_i обычного представления аберрационной поправки, когда траектория задана координатами и углами наклона в предметной плоскости x_0, y_0, x'_0, y'_0

$$\Delta x = B_{\varepsilon 1} x_0 \varepsilon_0 + B_{\varepsilon 2} x'_0 \varepsilon_0 + B_1 x_0^3 + B_2 x_0^2 x'_0 +$$

$$+ B_3 x_0 x_0'^2 + B_4 x_0'^3 + B_5 x_0 y_0^2 + B_6 x_0 y_0 y'_0 + B_7 x_0 y_0'^2 +$$

$$+ B_8 x'_0 y_0^2 + B_9 x'_0 y'_0 + B_{10} x_0 x'_0 y_0'^2, \tag{15}$$

где $B_{\varepsilon 1} = A_\varepsilon$, $B_{\varepsilon 2} = -z_0 A_\varepsilon$, $B_1 = A_1$, $B_2 = -3z_0 A_1 + A_2$, $B_3 = 3z_0^2 A_1 - 2z_0 A_2 + A_3$, $B_4 = -z_0^3 A_1 + z_0^2 A_2 - z_0 A_3$, $B_5 = A_5$, $B_6 = A_6$, $B_7 = A_7$, $B_8 = -z_0 A_5$, $B_9 = -z_0 A_6$, $B_{10} = -z_0 A_7$.

Коэффициент отверстной хроматической аберрации C_c и постоянная сферической аберрации C_s, определяемые как $C_c = m_x^{-1} B_{\varepsilon 2}$ и $C_s = m_x^{-1} B_4$, с помощью приведенных выше формул представляются в виде целых рациональных выражений, сводимых к полиномам по степеням m_x^{-1}, так как коэффициенты A_ε и $A_1 - A_3$, через которые они выражаются, от положения предметной плоскости не зависят

$$C_c = -z_0 A_\varepsilon(z_1) m_x^{-1} = -z_0 \left[A_\varepsilon(F_{x1}) \left(m_x^{-1} - \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_0}} \right) + A_\varepsilon(0) \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_0}} \right] =$$

$$= -f_{x0} \left(m_x^{-1} - \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_0}} \right) \left[A_\varepsilon(F_{x1}) \left(m_x^{-1} - \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_0}} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\varphi_0}{\varphi_1}} \right) \right], \tag{16}$$

$$C_s = \left[-z_0^3 A_1(F_{x1}) + z_0^2 A_2(F_{x1}) - z_0 A_3(F_{x1}) \right] \left(m_x^{-1} - \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_0}} \right) +$$

$$+ \left[z_0^3 A_1(0) + z_0^2 A_2(0) - z_0 A_3(0) \right] \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_0}} =$$

$$= f_{x0} \left(m_x^{-1} - \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_0}} \right)^2 \left[f_{x0}^2 \left(m_x^{-1} - \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_0}} \right)^2 A_1(F_{x1}) + \frac{1}{2} \frac{\varphi_0}{\varphi_1} m_x^{-1} \right]. \tag{17}$$

Таким образом, в отличие от обычной осесимметричной конаксиальной иммерсионной линзы, для которой возможность вычисления при любом заданном увеличении постоянной сферической аберрации требует знания пяти зависящих от распределения поля коэффициентов $C_{s0}, \ldots, C_{s4}$ [3,4], а для вычисления отверстной хроматической аберрации — трех коэффициентов C_{c0}, C_{c1} и C_{c2} [4], в случае трансаксиальной линзы ситуация намного проще, достаточно знать лишь $A_\varepsilon(F_{x1})$ и $A_1(F_{x1})$.

В заключение авторы благодарят Л.Г.Гликмана за полезные обсуждения результатов работы.

Список литературы

[1] *Карецкая С.П., Кельман В.М., Якушев Е.М.* // ЖТФ. 1971. Т. 41. Вып. 2. С. 325–329.

[2] *Карецкая С.П., Кельман В.М., Якушев Е.М.* // ЖТФ. 1970. Т. 40. Вып. 12. С. 2563–2567.

[3] *Harting E., Read F.H.* Electrostatic Lenses. Amsterdam; Oxford; New York, 1976.

[4] *Силадьи М.* Электронная и ионная оптика. М.: Мир, 1990.

Институт ядерной физики
Алма-Ата

Поступило в Редакцию
3 декабря 1992 г.