01;03

АВТОКОЛЕБАНИЯ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ С ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А.С.Рудый, А.И.Григорьев

Выполнен линейный анализ математической модели системы с отрицательной обратной связью через температурное поле сжимаемой жидкости. Показано, что при определенных параметрах системы в ней возникают автоколебания, а в жидкости распространяется термоакустическая волна, каждая компонента которой образована волнами температурной и акустической мод. Получены выражения для расчета полей температуры, скорости, давления и плотности жидкости, а также формулы для расчета критических параметров системы.

1. Согласно существующей классификации, распределенными принято называть такие автоколебательные системы, размеры которых сравнимы с длиной возбуждаемой в них волны. Имеется большое количество работ, посвященных исследованию устойчивости распределенных колебательных систем, описываемых уравнениями гиперболического типа. Однако с повышением степени интеграции и чувствительности физических приборов возникла проблема устойчивости релаксационных систем, описываемых уравнениями параболического типа. Действительно, функционирование подобных приборов сопровождается в силу второго начала термодинамики, диссипацией энергии и возникновением тепловых потоков, создающих паразитную тепловую обратную связь. Например, тепловая обратная связь между мощными выходными каскадами и термочувствительными входами интегральной микросхемы может стать причиной возникновения автоколебаний низкой частоты. Аналогичные явления наблюдаются и в жидких средах. Так, в жидкометаллических источниках ионов при некоторой величине приложенной разности потенциалов появляются пульсации тока [1]. Тепловые автоколебания далеко не всегда имеют паразитный характер и могут использоваться, например, для определения теплофизических характеристик материалов [2]. В настоящей работе исследуются закономерности автоколебательного возбуждения термоакустических волн в неизотермической жидкости и возможности их практического применения. Полученные результаты могут оказаться полезными для анализа периодических процессов в жидкостных масс-спектрометрах и жидкометаллических источниках ионов, в которых рабочей поверхностью служит нагреваемая пленка жидкости, а также доля разработки новых методов определения теплофических и механических свойств жидкостей.

Автоколебания в системах релаксационного типа с обратной связью через температурное поле твердого тела и двухфазной среды рассматривались в [3,4]. В работе [4] предполагалось, что одна из фаз может находиться в жидком агрегатном состоянии, но при этом ее термоупругие и реологические свойства не принимались во внимание. Тем не менее их учет необходим, так как с ними связан конвективный механизм переноса энергии, реализующийся одновременно с теплопроводностью. Даже в рассматриваемой ниже одномерной системе, когда все термодинамические переменные — функции одной координаты $\mathbf{x} \parallel \mathbf{g}$ и свободная конвекция невозможна, периодический нагрев жидкости вызывает появление температурной волны и связанной с ней волны плотности. Если жидкость неизотермическая, то волна плотности возбуждает температурную волну с тем же законом дисперсии, что и у акустической волны. Другими словами, периодическое изменение удельного обьема в любой точке жидкости, где есть градиент температуры, вызывает осцилляции температуры в этой точке, а пространственная зависимость фазы колебаний температуры — температурную волну с законом дисперсии и затухания акустической волны. В свое время для поперечных волн такого типа был введен термин "термоконвективная волна" [5]. Мы будем использовать термин "термоакустическая волна", так как он точнее отражает механизм распространения волны плотности и связанной с ней продольной температурной волны в одномерной системе. Как будет показано ниже, такие волны могут существенным образом влиять на параметры и условия возбуждения автоколебаний.

2. Дальнейшее рассмотрение проведем на примере одномерной идеализированной системы (рис. 1), состоящей из слоя жидкости *1* с неподвижными верхней и нижней границами. Пусть нижняя граница находится при постоянной температуре, а к верхней от нагревателя *2* подводится тепловой поток, удельная величина которого q регулируется следующим образом. Напряжение дифференциальной температуры *3* $\varphi(x_0, t) \sim \varepsilon_1 \Delta U + \varepsilon_2 \Delta U^2 + \ldots$, где $\Delta U = U(x_0, t) - U(\delta)$ — разность температур термостата $U(\delta)$ и жидкости $U(x_0, t)$, сравнивается с опорным напряжением φ_0 источника *4*. Для этого токи источника и термопары вычитаются на входном сопротивлении регулятора *5*, а разностный сигнал $\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi(x_0, t)$, называемый сигналом ошибки, после усиления выходными каскадами регулятора поступает на нагреватель. Систему автоматического регулирования, в которой управляющее воздействие, в данном случае градиент температуры $\nabla U = -q/\lambda$, является функцией сигнала ошибки $q = f(\Delta\varphi)$, принято называть замкнутой системой. Ее элементы (регулятор, термопара и нагреватель) образуют петлю обратной связи, замкнутую через температурное поле жидкости, которую мы будем считать вязкой и малосжимаемой.

Движение и теплоперенос в рассматриваемом слое жидкости описываются уравнениями Навье–Стокса

$$\partial \mathbf{V} \partial t + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla P + D\mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{V} + (\xi + \frac{1}{3}\eta)\nabla(\nabla \mathbf{V}), \qquad (1)$$

неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} D\mathbf{V}, \qquad (2)$$

состояния

$$P = P(D, U) \qquad (3)$$

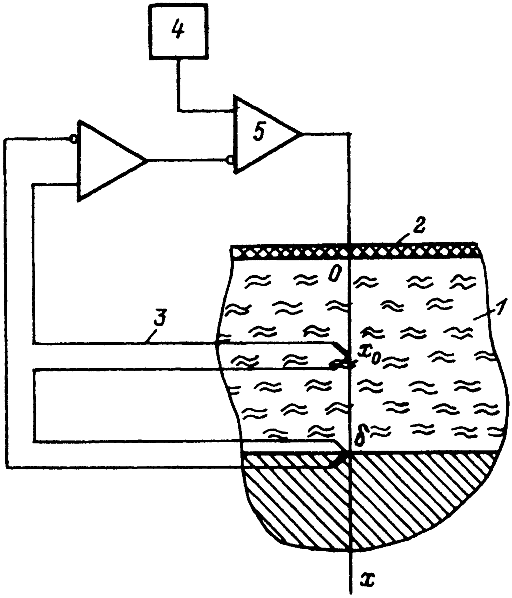

Рис. 1. Система автоматического регулирования с петлей обратной связи, замкнутой через температурное поле жидкости.

и теплопереноса

$$Dc_p\left[\frac{\partial U}{\partial t}+(\mathbf{V}\nabla)U\right]=\lambda\Delta U \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &\text{при} \quad x=0 \quad \mathbf{V}=0; \quad \lambda\nabla U=-q,\\ &\text{при} \quad x=\delta \quad \mathbf{V}=0; \quad U=u_0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $U=U(x,t)$, $P=P(x,t)$, $V=V(x,t)$, $D=D(x,t)$ — температура, давление, скорость и плотность жидкости, которые являются в общем случае функциями координат и времени: c_p, λ, η и ξ — удельная теплоемкость и коэффициенты теплопроводности, динамической и объемной (второй) вязкости, они полагаются константами.

Условие $\lambda\nabla U=-q$ будем называть условием обратной связи, так как оно связывает управляющее воздействие ∇U с сигналом ошибки $\Delta\varphi$.

Введем для равновесных значений температуры, давления и плотности обозначения u_0, p_0 и ρ_0 соответственно. В наиболее общей ситуации отклонение каждой из анализируемых величин, за исключением скорости, от равновесного значения будем представлять в виде суперпозиции стационарной (обозначенной звездочкой) и нестационарной (без индекса) компонент

$$U=u_0+u_*(x)+u(x,t),$$

$$D=\rho_0+\rho_*(x)+\rho(x,t),$$

$$P=P_0+p_*(x)+p(x,t),$$

$$V = v(x,t),$$

так как

$$V_0 = v_* = 0. \tag{6}$$

Поскольку далее рассматриваются только малые отклонения переменных u, ρ, p, v от стационарных значений, то функцию регулятора $f(\Delta\varphi)$ можно представить в виде $f\left[\varphi_0 - \varepsilon u_*(x_0) - \varepsilon u(x_0,t)\right]$, где ε — коэффициент преобразования температуры, и разложить ее в ряд по степеням $u(x_0,t)$, ограничившись линейными членами. Тогда условие обратной связи примет вид

$$\lambda \frac{\partial u_*}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -f\left[\varphi_0 - \varepsilon u_*(x_0)\right],$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial f}{\partial u}\left[\varphi_0 - \varepsilon u_*(x_0)\right] u(x_0,t). \tag{7}$$

При подстановке (6), (7) в систему уравнений (1)–(5) последняя распадается на две системы уравнений: стационарных

$$\frac{d^2 u_*}{dx^2} = 0;$$

$$\beta\frac{d\rho_*}{dx} - g\rho_* = \gamma C_0 + \rho_0 g,$$

$$p_* = \beta\rho_* + \gamma u_* \tag{8}$$

с граничными условиями

$$u_*(\delta) = 0; \qquad \frac{\partial u_*}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -f\left[\varphi_0 - \varepsilon u_*(x_0)\right];$$

$$p_*(\delta) - p_*(0) = Mg/S$$

и нестационарных

$$(\rho_0+\rho_*)\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} +\right) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g\rho,$$

$$c_p(\rho_0+\rho_*)\left[\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}(u_* + u)\right] = \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\rho_0+\rho_*)\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0+\rho_*) + v\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$p = \beta\rho + \gamma u \tag{9}$$

с граничными условиями

$$u(\delta) = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{\partial f}{\partial u}\left[\varphi_0 - \varepsilon u_*(x_0)\right] u(x_0,t),$$

$$v(0) = v(\delta) = 0.$$

Решения первой очевидны

$$u_* = C_0(\delta - x);$$

$$\rho_* = (C_0\gamma/g + \rho_0)\left[\exp(g(x - x_1)/\beta) - 1\right],$$

$$p_* = \beta\rho_* + \gamma u_*. \tag{10}$$

Постоянная C_0 определяется как корень первого из уравнений (7), если задан вид функции f. Постоянная x_1 — координата точки, в которой $\rho_*(x)$ меняет знак, также может быть выражена через параметры рассматриваемой системы, если известна функция f. Однако для дальнейшего анализа конкретные значения C_0 и x_1 несущественны.

В виду малости амплитуд нестационарных компонент решений (6) система нестационарных уравнений может быть линеаризирована в окрестности стационарных решений (9)

$$(\rho_0 + \rho_*)\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + g\rho + \left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u_*}{\partial u}v = \frac{\lambda}{c_p(\rho_0 + \rho_*)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho_0 + \rho_*)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho_*}{\partial x}v = 0,$$

$$p = \beta\rho + \gamma u,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{A}{x_0}u(x_0, t); \qquad u(\delta) = 0;$$

$$v(0) = v(\delta) = 0, \tag{11}$$

где

$$A = x_0\frac{\partial f}{\partial u}\left[\varphi_0 - \varepsilon u_*(x_0)\right]$$

— обобщенный коэффициент усиления системы, а постоянные

$$\beta = \left.\frac{\partial p}{\partial D}\right|_{\substack{D=\rho_0\\U=u_0}} \qquad \text{и } \gamma = \left.\frac{\partial p}{\partial u}\right|_{\substack{D=\rho_0\\U=u_0}}$$

выражаются через модуль объемной упругости K и коэффициент объемного расширения $\varkappa$ как $\beta = K/p_0$ и $\gamma = K\varkappa$. Переменные коэффициенты уравнений системы (11) существенным образом зависят от координаты x только для толстого слоя сжимаемой жидкости. Так как в данном случае $\delta \leqslant 10^{-1}$ м, $\beta \sim 10^7 \text{м}^2/\text{с}^2$, то $g\delta/\beta \ll 1$ и в (10) можно положить $\rho_* = 0$, а $\partial\rho_*/\partial x = (\rho_0 + C_0\gamma/g)g/\beta$.

3. Исследуем условия возбуждения автоколебаний в рассматриваемой системе. Решения задачи (11) будем искать в виде $u(x,t) = u(x)\exp(i\omega t)$, $v(x,t) = v(x)\exp(i\omega t)$, $\rho(x,t) = \rho(x)\exp(i\omega t)$. Учитывая, что для реальной жидкости $\omega \ll K/(\xi + 4\eta/3)$, а также сделанные выше допущения, задачу (11) преобразуем в однородную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2v}{dx^2} + C_0\varkappa\frac{dv}{dx} + \frac{\rho_0}{K}\left[\omega^2 - \frac{\rho_0 g^2}{K} - C_0\varkappa g\right]v = i\omega\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{i\omega}{a}u = -\frac{C_0}{a}v, \tag{13}$$

где $a = \lambda/c_p\rho_0$ — коэффициент температуропроводности.

Ее частые решения v и $u \sim \exp(\lambda_i x)$, а λ_i определяются как корни характеристического уравнения

$$(\lambda^2 - i2k^2)\left[\lambda(\varkappa C_0 - \lambda) + \frac{\rho_0}{K}\left(\omega^2 - \frac{\rho_0 g^2}{K} - g\varkappa C_0\right)\right] + i2k^2\varkappa C_0\lambda = 0, \tag{14}$$

где $k = \sqrt{\omega/2a}$.

Так как $\varkappa \sim 10^{-4}\text{K}^{-1}$, то при градиенте температуры $C_0 < 10^3\text{K/м}$ параметр $\varkappa C_0$ можно считать малым. Поскольку выписать точные решения уравнения (14) не представляется возможным, то целесообразно разложить λ_i в ряд

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \varkappa C_0\lambda_{1i}^2 + \varkappa^2 C_0^2\lambda_{2i} + \ldots \tag{15}$$

по степеням параметра $\varkappa C_0$. Сгруппировав члены при одинаковых степенях $\varkappa C_0$, получим рекурентную последовательность уравнений для определения $\lambda_{0i}, \lambda_{1i}, \ldots$. Ограничившись первыми двумя членами последовательности, найдем

$$\lambda_1 = (1+i)k - \frac{iC_0\varkappa k^2}{(1+i) - \frac{\rho_0}{K}\left[\omega^2 - \frac{\rho_0 g^2}{K}\right]},$$

$$\lambda_2 = -(1+i)k - \frac{iC_0\varkappa k^2}{(1+i) - \frac{\rho_0}{K}\left[\omega^2 - \frac{\rho_0 g^2}{K}\right]},$$

$$\lambda_3 = i\sqrt{\frac{\rho_0}{K}\left(\omega^2 - \frac{\rho_0 g^2}{K}\right)} - \frac{\varkappa C_0}{2}\left[1 + \frac{i2k^2}{\frac{\rho_0}{K}\left(\omega^2 - \frac{\rho_0 g^2}{K}\right) - i2k^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{K\omega^2}{\rho_0 g^2} - 1}}\right],$$

$$\lambda_4 = -i\sqrt{\frac{\rho_0}{K\left(\omega^2 - \frac{\rho_0 g^2}{K} - i2k^2\right)}} - \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{K\omega^2}{\rho_0 g^2} - 1}}\right). \tag{16}$$

Рассмотрим случай низкочастотных автоколебаний, когда $g\sqrt{\rho_0/K} < < \omega \ll K/\rho_0 a$, что не противоречит наложенному ранее условию $\omega \ll \ll K/\rho_0\nu$, так как температуропроводность a и динамическая вязкость

$\nu = (\xi + 4\eta/3)/\rho_0$ одного порядка. Разделяя в выражениях (14) действительные и мнимые части, вводя обозначения $\mathrm{Re}\,\lambda_i = \lambda_i'$, $\mathrm{Im}\,\lambda_i = \lambda_i''$ и пренебрегая членами второго порядка малости, получим

$$\lambda_1' = k(1 - \varkappa C_0/2k); \qquad \lambda_1'' = k,$$
$$\lambda_2' = -k(1 + \varkappa C_0/2k); \qquad \lambda_2'' = -k,$$
$$\lambda_3' = 0; \qquad \lambda_3'' = \omega\sqrt{\rho_0/K}(1 - \varkappa C_0 g/2\omega^2),$$
$$\lambda_4' = 0; \qquad \lambda_4'' = -\omega\sqrt{\rho_0/K}(1 - \varkappa C_0 g/2\omega^2). \tag{17}$$

Таким образом, решения системы уравнения (12), (13)

$$u(x) = \sum_{i=1}^{4} C_i \exp(\lambda_i x),$$

$$v(x) = \frac{a}{C_0}\sum_{i=1}^{4} C_i(i2k^2 - \lambda_i^2)\exp(\lambda_i x) \tag{18}$$

описывают термоакустические волны, распространяющиеся в жидкости как в прямом $\lambda_i' < 0$, так и в обратном $\lambda_i'' > 0$ направлениях. Параметры λ_i' имеют смысл коэффициентов затухания; а λ_i'' — волновых чисел термоакустических волн. В изотермической жидкости $\lambda_1' = \lambda_1'' = -\lambda_2' = -\lambda_2'' = k$, где k — коэффициент затухания и волновое число температурной волны. При тех же условиях $\lambda_3'' = -\lambda_4'' = \omega/v_\varphi$, где $v_\varphi = \varphi K/\rho_0$ — фазовая скорость акустической волны. Следовательно, термоакустическая волна — это суперпозиция волн, которые можно рассматривать как волны температурной и акустической мод.

Перейдем к исследованию условий возбуждения и расчету параметров автоколебаний. Ввиду быстрого затухания волны температурной моды в точке $x = \delta$ будем учитывать только акустическую компоненту обоих решений (18). Тогда граничные условия для температуры примут вид

$$C_3\exp(-\lambda_4\delta) + C_4\exp(\lambda_4\delta) = 0,$$
$$C_2\lambda_2 - C_3\lambda_4 + C_4\lambda_4 = \frac{A}{X_0}\left[C_2\exp(\lambda_2 x_0) + C_3\exp(-\lambda_4 x_0) + C_4\exp(\lambda_4 x_0)\right]. \tag{19}$$

Исключив из условий (19) C_3 и добавив к ним условие $v(0) = 0$, придем к следующим соотношениям между комплексными амплитудами мод:

$$C_2\left[\lambda_2 x_0 - A\exp(\lambda_2 x_0)\right] + C_4 2i\exp(i\lambda_4''\delta)\left[A\sin\lambda_4''(\delta - x_0) + \lambda_4'' x_0\cos\lambda_4''\delta\right] = 0,$$
$$C_2(i2k^2 - \lambda^2) + C_4 2(2k^2 + i\lambda_4''^2)\exp(i\lambda_4''\delta)\sin(\lambda_4''\delta) = 0. \tag{20}$$

Из детерминанта системы (20), разделив в нем действительную и мнимую части, получим два условия для обобщенного коэффициента усиления A

$$A = \frac{(\lambda_4''^2\lambda_2' x_0 + 2k^2\lambda_2'' x_0)\sin\lambda_4''\delta + \lambda_4'' x_0(\lambda_2'^2 + \lambda_2''^2)\cos\lambda_4''\delta}{\exp(\lambda_2' x_0)(\lambda_4''^2\cos\lambda_2'' x_0 + 2k^2\sin\lambda_2'' x_0) - (\lambda_2'^2 - \lambda_2''^2)\sin\lambda_4''(\delta - x_0)},$$

$$A=\frac{(\lambda_4''^2\lambda_2''x_0-2k^2\lambda_2'x_0)\sin\lambda_4''\delta-2\lambda_4''x_0(k^2-\lambda_2'\lambda_2'')\cos\lambda_4''\delta}{\exp(\lambda_2'x_0)(\lambda_4''^2\sin\lambda_2''x_0-2k^2\cos\lambda_2''x_0)+2(k^2-\lambda_2'\lambda_2'')\sin\lambda_4''(\delta-x_0)}. \quad (21)$$

Исключая A из уравнений (19) и принимая во внимание

$$\lambda_2'^2-\lambda_2''^2\approx\varkappa C_0k, \qquad 2(k^2-\lambda'\lambda'')=-\varkappa C_0k \quad (22)$$

и $\lambda_4''^2\ll 2k^2$, приходим к частотному уравнению

$$(2k^2\sin\lambda_4\delta+\varkappa C_0\lambda_4\cos\lambda_4\delta)(\cos\lambda_2''x_0-\sin\lambda_2''x_0)-$$

$$-\varkappa C_0k\sin\lambda_4\delta\sin\lambda_2''x_0=\frac{1}{2}\varkappa^2C_0^2\exp(-\lambda_2'x_0)\sin\lambda_4''(\delta-x_0). \quad (23)$$

Из всего спектра частот, определяемых уравнением (23), возбуждается та частота, которая соответствует минимальному (по модулю) критическому значению коэффициента усиления $A=A_c$. Как будет показано ниже, минимальному значению $A_c=A_{c1}$ соответствует самая низкая частота спектра ω_{c1}, а следующим за ним нескольким значениям A_{ci} — частоты ω_{ci}, для которых можно положить $\sin\lambda_4\delta\approx\lambda_4\delta$, $\cos\lambda_4\delta\approx 1$. Вводя обозначения $x_0/\delta=\eta$, $k\delta=\nu$, $\varkappa C_0\delta=\xi$, преобразуем уравнение (23) к виду

$$\Psi(\xi,\nu)\equiv\cos\eta\nu+\left[1+\xi\nu/(2\nu^2+\xi)\right]\sin\eta\nu-$$

$$-\frac{\xi^2(1-\eta)\exp\eta(\nu+\xi/2)}{2(2\nu^2+\xi)}=0. \quad (24)$$

Рельеф функции (24) при $\eta=1/2$ показан на рис. 2. Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения кривых $\Psi(\nu,\xi)=0$ с прямыми $\xi=\text{const}$. При $\xi=0$ уравнение (24) совпадает с приведенным в [3] уравнением

$$\operatorname{tg}\eta\nu=-1 \quad (25)$$

для системы с полуограниченным твердым телом в цепи обратной связи, а при $\xi>1$ (24) вообще не имеет решений. В случае твердого тела уравнение (25) имеет бесконечное множество корней $\nu_1<\nu_2<\nu_3\ldots$, при подстановке которых в условие для A (21) последнее дает критические значения обобщенного коэффициента усиления $|A_{c1}|<|A_{c2}|<|A_{c3}|\ldots$. Из них нечетные соответствуют системе с отрицательной, а четные — с положительной обратной связью. Обобщенный коэффициент усиления A может существенно изменяться только за счет какого-либо входящего в него регулируемого параметра μ. Если при изменениии μ от 0 до ∞ обобщенный коэффициент A также меняется от 0 до ∞ и при этом проходит кртические значения A_{ci} в последовательности $A_{c1},A_{c2},\ldots$, то автоколебания частоты

$$\omega_i=2a\nu_i^2/\delta^2 \quad (26)$$

возбуждаются в той же последовательности $\omega_1,\omega_2,\ldots$ (имеется в виду линейная модель, а не реальная система, в которой возможна только первая частота). Т.е. в твердом теле частота ω_i не может возбудиться раньше ω_j, если $i>j$. В жидкости этот порядок не является обязательным, по крайней мере при $\xi \ll 1$, когда уравнения (21) могут быть преобразованы к виду

$$A = \frac{\nu \exp(\eta\nu)}{\sin(\eta\nu)} \lambda_4'' x_0. \tag{27}$$

Например, при $\xi = 10^{-5}$ уравнение (24) имеет следующие корни: $\nu_1 = 4.7171$, $\nu_2 = 11.007$, $\nu_3 = 17.265\ldots$, которые при подстановке в (27) дают $A_{c1} = 70.717\lambda_4'' x_0$, $A_{c2} = -3842.5\lambda_4'' x_0$, $A_{c3} = 136010\lambda_4'' x_0, \ldots$. Допустим, что λ_4'' всегда отрицательно и будем изменять μ, пока A не достигнет первого критического значения A_{c1}, при котором в системе возникнут автоколебания частоты $\omega_1 = 1a\nu_1^2/\delta^2$. Если и дальше изменять μ, то следующей при $A = A_{c3}$ (так как в системе с отрицательной обратной связью $\partial f(0)/\partial\mu > 0$ и, следовательно, $A > 0$) возбудилась бы частота ω_3. Но, как правило, в реальных системах при $A > A_{c1}$ амплитуда первой частоты возрастает настолько, что система выходит далеко за рамки рассматриваемого здесь линейного приближения. При $\lambda_4'' < 0$ наименьшим положительным значением A будет A_{c2} и автоколебания возникнут на частоте ω_2. Из соотношений (17), (27) легко увидеть, что возможны ситуации, при которых $A_{c2}/A_{c1} = 1$, т.е. возможны двухчастотные автоколебания. Расчет показывает, что их необходимым условием является следущее соотношение между параметрами системы $\xi\delta^3 = 7984a^2$. Отметим также, что на частоте $\omega_0 = \sqrt{\varkappa C_0 g/2}$ коэффициент $A = 0$. Это означает, что если в жидкости за счет внешнего источника тепла поддерживается градиент температуры C_0, то в ней возможны колебания частоты ω_0, даже если нет внешней обратной связи. Необходимо оговориться, что данное утверждение основано на зависимостях, полученных без учета вязких членов в дисперсионных соотношениях (16).

Из рис. 2 следует, что по мере возрастания параметра ξ корни уравнения (24) сближаются, а модули соответствующих A_{ci} растут. При вырождении корня смежные A_{ci} обращаются в бесконечность и периодическое решение пропадает. Если в рассматриваемой системе коэффициент усиления по постоянному сигналу не равен нулю, то градиент температуры $C_0 = C_0(A(\mu))$ и, следовательно, ξ не является независимым параметром. Очевидно, что при положительной обратной связи C_0 очень велико и уравнение (24) может вообще не иметь корней. Если же обратная связь отрицательна, то с ростом бифуркационного параметра μ критическое значение обобщенного коэффициента усиления A_c также растет, но, как показывает расчет, $(dA_c/dC_0)(dC_0/d\mu) \ll dA/d\mu$. Поскольку при малых значениях ξ корни ν_1 и ν_2 слабо зависят от ξ, то приведенные выше замечания относительно последовательности возбуждения частот будут справедливы и в этом случае. В остальных случаях поведение рассматриваемой системы сходно с поведением системы [3], но здесь A_c, а следовательно, и устойчивость системы существенно ниже.

В результате линейного анализа математической модели системы, в которой обратная связь осуществляется через температурное поле жидкости, показано, что при определенных значениях параметров системы в ней могут возникать автоколебания. При этом в жидкости распространяется термоакустическая волна, каждая компонента которой образована волнами температурной и акустической моды. При неподвижных границах жидкости суперпозиция прямой и обратной волн акусической моды образуют стоячую волну, поэтому фазовое условие автоколебаний вы-

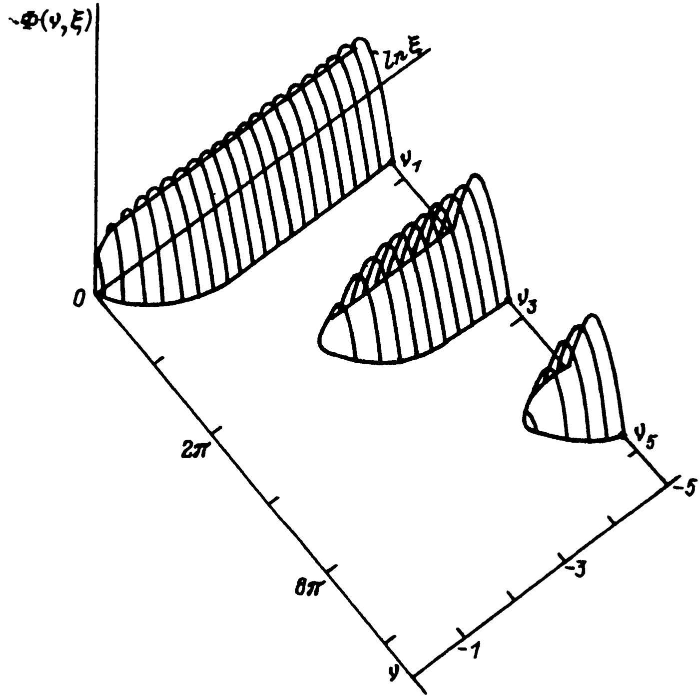

Рис. 2. Рельеф функции $\Phi(\xi, \nu) \geqslant 0$. Показаны корни ν_i частотного уравнения $\Phi(\xi, \nu) = 0$ при $\xi = 10^{-5}$, $\eta = 0.5$.

полняется только за чет фазового сдвига прямой волны температурной моды в среде и на границе. Получены выражения для расчета одномерных полей температуры, скорости, давления и плотности жидкости при колебаниях малой амплитуды, а также формулы для вычисления параметров автоколебаний. Как оказалось, условия возбуждения автоколебаний в неизотермической жидкости являются менее жесткими, а сама система менее устойчивой, чем в [3], что закономерно для системы с большим числом степеней свободы. Для определения температуропроводности по частоте автоколебаний, как и раньше [4], может использоваться соотношение (26), однако значения ν_1 будут отличаться от полученных в [4] и определяться уравнением (24). Двухчастотный режим автоколебаний может быть использован для определения коэффициента объемного расширения при помощи соотношения

$$\frac{\nu_1 \exp(\eta\nu_1)}{\sin(\eta\nu_1)}\omega_1 \left(1 - \frac{\varkappa C_0 g}{2\omega_1^2}\right) = \frac{\nu_2 \exp(\eta\nu_2)}{\sin(\eta\nu_2)}\omega_2 \left(1 - \frac{\varkappa C_0 g}{2\omega_2^2}\right), \tag{28}$$

вытекающего из условия $A = A_{c1} = A_{c_2}$. Это условие выполняется только в случае мягкого режима возбуждения автоколебаний. К сожалению, вопрос о режиме возбуждения остается открытым, что связано с чрезвычайно громоздкими вычислениями, неизбежными при нелинейном анализе данной задачи.

Список литературы

[1] *Дудников В.Г., Шаблин А.Л.* Препринт ИЯФ СО АН СССР. № 87-63. М., 1987. 66 с.
[2] *Рудый А.С., Рудь Н.А.* // ПТЭ. 1992. № 3. С. 211–215.
[3] *Рудый А.С., Колесов А.Ю.* // ИФЖ. 1992. Т. 62. № 2. С. 309–315.
[4] *Rudi A.S.* // Int. J. Thermophys. 1993. Vol. 14. N 1. C. 159–172.
[5] *Лыков А.В.* Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978. 490 с.

Ярославский университет

Поступило в Редакцию
29 января 1993 г.