06;07

К ВОПРОСУ ОБ ИНФОРМАТИВНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНО-АДАПТИВНОГО РЕЖИМА САМОСКАНИРОВАНИЯ ФОТОПРИЕМНИКА "МУЛЬТИСКАН"

Б.Г.Подласкин, Е.А.Чекулаев

Рассмотрены информационные свойства сигналов, получаемых с многоэлементного фотоприемника "мультискан" в режиме интегрального самосканирования. Показано, что эти сигналы представляют собой набор квантилей порядка от $1/N$ до 1. Проанализировав возможность восстановления исходной освещенности по набору квантилей. Доказана теорема о связи набора квантилей с набором интегральных моментов входного распределения. Предложена процедура непосредственного определения интегральных моментов с помощью многострочной матрицы мультисканов.

Принцип действия многоэлементного фотоприемника "мультискан" [1] основан на интегральном методе формирования электрического сигнала. При этом исключительной особенностью данного прибора является наличие на его выходах одновременно двух сигналов, один из которых пропорционален освещенности всего фоточувствительного участка прибора от 0 до L, а другой — освещенности части этого интервала от 0 до некоторой подвижной границы с координатой X_i.

В работе [2] нами было показано, что при использовании фотоприемника "мультискан" в режиме интегрально-адаптивного самосканирования формируются отсчеты X_k координаты x таким образом, что X_k удовлетворяют уравнению

$$\int_0^{X_k} f(x)dx = \frac{k}{N}\int_0^{L} f(x)dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{1}$$

В этом случае величины X_k могут принимать любые значения в пределах интервала $[0, L]$ и измерение их требует перехода от традиционной пространственно-дискретной к пространственно-непрерывной модели фоторегистрации.

Интерес к этой модели проявлен, в частности, Дж.Гудманом в [3], где рассмотрен гипотетический пространственно-непрерывный фотоприемник, способный регистрировать координаты фотособытий, являющиеся случайными величинами с плотностью распределения $f(x)$.

Такой подход позволяет перейти к концептуально новой методике регистрации сигнала, использующей для описания $f(x)$ не набор значений $\{f_n\}$, измеренных в фиксированных точках X_n, а набор $\{X_k\}$, найденных в соответствии с интегральным условием (1).

Целью данной работы является анализ информационных свойств последовательности отсчетов, получаемых в соответствии с уравнением (1), с точки зрения возможности восстановления исходного распределения $f(x)$ и (или) его описания с помощью интегральных функционалов.

Предварительно отметим, что с точки зрения теории информации [4] распределение отсчетов $\{X_k\}_{k=0}^{N}$ при фиксированном N является максимально информативным. Действительно, если рассматривать $f(x)$ как плотность вероятностного распределения, то $H = -\sum\limits_k P_k \log_2 P_k$ представляет собой энтропию испытаний с исходами $[X_k, X_{k+1}]$, и вероятностями $P_k = \int\limits_{X_k}^{X_{k+1}} f(x)dx$. Очевидно, что максимальное значение H достигается при описанной выше системе узлов $\{X_k\}$, для которой обеспечивается выполнение условия

$$P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = P_N = \frac{1}{N}. \tag{2}$$

В первой части задачи оценим степень близости исходного распределения f_x и функции $g(x)$, восстановленной на основе отсчетов $\{X_k\}$, используя в качестве критерия сходимость вероятностных мер P_f и P_g.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана вероятностная функция распределения F_x с плотностью $f(x)$, $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$. Выражение $\int\limits_a^\beta f(x) = \int\limits_a^\beta dF(x)$, где интеграл в смысле Лебега-Стилтьеса, будем трактовать как вероятность попадания фотона в интервал $[a, \beta]$: $\int\limits_a^\beta f(x)dx = P_f[a, \beta]$. Учитывая возможность неабсолютной непрерывности меры $F(x)$ относительно эвклидовой метрики, будем иметь

$$\int\limits_a^\beta dF(x) = P_f[a, \beta] = P_f(a, \beta) + P_f[a, a] + P_f[\beta, \beta]. \tag{3}$$

Поскольку множество точек β, для которых $P_f[\beta, \beta] > 0$, не более чем счетно, то выражение (3) определяет σ — конечную вероятностную меру P_f на σ — алгебре подмножеств интервала $[a, b]$.

Пусть в соответствии с процедурой, изложенной в [2], при данном распределении $F(x)$ получена последовательность отсчетов $\{X_k\}_{k=0}^{N}$. Поскольку $\{X_k\}$ при этом, удовлетворяя уравнению (1), обладают свойством (2), т.е. разбивают $[a, b]$ на N интервалов, попадания в каждый из которых имеют равные вероятности, то в терминах математической статистики X_k суть квантили порядка k/N функции распределения $F(x)$

[5]. В специальной литературе связь квантильной функции $q(y)$ с распределением $f(x)$ и его интегральными функционалами ранее рассматривалась лишь в аспекте моделирования случайных процессов с заданными распределениями [6,7].

Построим функции $g(x)$ и $G(x)$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{N(X_{i+1}-X_i)}, & x \in [X_i, X_{i+1}), \\ 0, & x \in [X_N, b], \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{i}{N} + \frac{x-X_i}{N(X_{i+1}-X_i)}, & x \in [X_i, X_{i+1}), \\ 1, & x \in [X_N, b] \end{cases}$$

и новую вероятностную меру $P_g[a,\beta] = \int\limits_a^\beta dG(x)$. Несложно убедиться, что мера P_g при этом полностью определена. Проанализируем сходимость P_f и P_g как оценку близости F и G. Пусть задан произвольный интервал $[a,\beta] \in [a,b]$.[1] Оценим $A(N)$, определенную как

$$A(N) = \left| \int\limits_a^\beta dG(x) - \int\limits_a^\beta dF(x) \right| = |P_g[a,\beta] - P_f[a,\beta]|\,.$$

Для этого найдем такие квантили X_l и X_m с индексами l и m, для которых

$$\begin{aligned} l &= \min\{i : X_i \geqslant a\}, \\ m &= \max\{j : X_j \leqslant \beta\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Если $l > m$ или одно из них не существует, то внутри $[\alpha,\beta]$ не оказывается ни одного квантиля. В этом случае

$$\int\limits_a^\beta dF(x) < \frac{1}{N} \quad \text{и} \quad \int\limits_a^\beta dG(x) < \frac{1}{N}.$$

Если $l \leqslant m$, то $a \leqslant X_l \leqslant X_m \leqslant \beta$. Поскольку

$$\int\limits_{X_l}^{X_m} dF(x) = \int\limits_{l}^{X_m} dG(x) = \frac{m-l}{N}, \quad \int\limits_a^{X_l} dF(x) \leqslant \frac{1}{N}, \quad \int\limits_{X_m}^{\beta} dF(x) < \frac{l}{N},$$

то худшем в случае

$$A(N) = |P_f[a,\beta] - P_g[a,\beta]| = \left| \int\limits_a^\beta dG(x) - \int\limits_a^\beta dF(x) \right| < \frac{4}{N}. \tag{5}$$

[1] Для открытого слева и справа интервалов рассуждения аналогичны.

Таким образом, учитывая произвольность интервала $[a, \beta] \in [a, b]$, можно утверждать, что при $N \to \infty$ имеет место слабая сходимость мер P_g к P_f и распределений G к F, т.е.

$$\forall y(x) \in C[a,b], \quad \int_a^b y(x)dG(x) \to \int_a^b y(x)dF(x) \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

С точки зрения практических применений неравенство (5) имеет следующий смысл: вероятность попадания фотона в произвольный наперед заданный интервал $[a, \beta]$, вычисленная по распределению $G(x)$, отличается от истинной на величину, меньшую, чем $4/N$. Эта оценка носит самый общий характер и применима в тех случаях, когда границы интервала a и β не совпадают ни с одним из X_k. Функция $F(x)$ при этом может быть произвольна и разрывна.

В первой части работы мы использовали последовательность квантилей $\{X_k\}_{k=0}^N$ как основу для аппроксимации функции распределения $F(x)$ с вероятностной плотностью $f(x)$ с помощью функций $G(x)$ и $g(x)$ соответственно. Рассмотрим информационные свойства последовательности $\{X_k\}_{k=0}^N$ с иной точки зрения.

Поскольку квантили $\{X_k\}_{k=0}^N$ отражают интегральные свойства функции $f(x)$, то они непосредственным образом связаны с такими интегральными признаками распределения, как его моменты. По определению момент порядка p функции распределения $F(x)$ относительно точки X_0 есть математическое ожидание величины $(x - X_0)^p$

$$M(x - X_0)^p = \int_a^b (x - X_0)^p dF(x).$$

Набор моментов $\{Mx^r\}_{r=1}^p$ служит описанием исходного распределения $F(x)$. Вопрос об однозначности соответствия между $\{Mx^r\}_{r=1}^p$ и функцией $F(x)$ является содержанием сформулированной Т.Стилтьесом проблемы моментов [8,9]. Известно, что из ограниченности интервала $[a, b]$, на котором задана функция $F(x)$, следуют как существование моментов Mx^r любого порядка, так и однозначность определения $F(x)$ через набор моментов $\{Mx^r\}_{r=1}^p$ [10,11].

В соответствии со сформулированной нами задачей данной работы покажем, что существует простой способ вычисления моментов функции распределения $F(x)$ по совокупности квантилей, получаемых в результате процедуры [2].

Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а. Пусть на отрезке [0,1] задано распределение вероятностей $F(x)$ и последовательность $\{X_k\}_{k=0}^N$ есть множество квантилей порядка k/N этого распределения. Тогда для момента Mx^p порядка $p = 1, 2, \ldots$ верно неравенство

$$\left| Mx^p - \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{N-1} X_k^p + \frac{X_N^p}{2} \right) \right| \leqslant \frac{1}{2N}, \tag{6}$$

причем для непрерывной $F(x)$ имеет место строгое неравенство.

Другими словами, эта теорема утверждает, что момент Mx^p может быть вычислен через $\{X_k\}_{k=0}^N$ в виде

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N-1} X_k^p + \frac{X_N^p}{2}\right)$$

с ошибкой, не превышающей $1/2N$.

Доказательство. По определению последовательность квантилей есть разбиение отрезка [0,1]: $0 = X_0 \leqslant X_1 \leqslant X_2 \leqslant \ldots \leqslant X_N \leqslant 1$. Запишем равенство

$$\int_0^1 x^p dF(x) \leqslant \int_{X_0}^{X_1} x^p dF(x) + \sum_{k+1}^{N-1} \int_{X_{k+0}}^{X_{k+1}} x^p dF(x) + \int_{X_{N+0}}^{1} x^p dF(x). \tag{7}$$

Последний интеграл в (7) равен нулю, поскольку

$$\int_{X_{N+0}}^{1} x^p dF(x) \leqslant \int_{X_{N+0}}^{1} dF(x) = 1 - \int_0^{X_N} dF(x) = 0$$

(в дальнейших записях +0 в пределах интегралов опущено).

Без ограничения общности будем считать, что одинаковых квантилей нет. Оценим интегралы в правой части (7)

$$\int_{X_k}^{X_{k+1}} x^p dF(x) > \int_{X_k}^{X_{k+1}} X_k^p dF(x) = X_k^p \int_{X_k}^{X_{k+1}} dF(x) = \frac{1}{N} X_k^p, \tag{8}$$

с другой стороны.[2]

$$\int_{X_k}^{X_{k+1}} x^p dF(x) \leqslant \int_{X_k}^{X_{k+1}} X_{k+1}^p dF(x) = X_{k+1}^p \int_{X_k}^{X_{k+1}} dF(x) = \frac{1}{N} X_{k+1}^p. \tag{9}$$

Просуммировав (8) и (9) по k, получим

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{M-1} X_k^p < \int_{X_0}^{X_1} x^p dF(x) + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{X_k}^{X_{k+1}} x^p dF(x) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k^p,$$

[2] Равенство в (9) достигается при условии, что на промежутке $[X_k, X_{k+1})$ функция $F(x) = \text{const}$, а в точке X_{k+1} имеет разрыв, т.е. плотность функции распределения
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [X_k, X_{k+1}), \\ \infty, & x = X_{k+1}. \end{cases}$$

что эквивалентно

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} X_k^p < Mx^p \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k^p.$$

Отсюда следует

$$\left| Mx^p - \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N-1} X_k^p + \frac{X_N^p}{2}\right)\right| \leqslant \frac{X_N^p}{2N}. \tag{10}$$

При задании $F(x)$ на отрезке [0,1] очевидна оценка $X_N \leqslant 1$ и (10) превращается в (6). Теорема доказана.

Аналогичная теорема может быть доказана и в более общем случае для произвольного $[a,b]$, однако эта задача выходит за рамки данной работы и будет рассмотрена нами отдельно.

Таким образом, мы показали, что последовательность отсчетов $\{X_k\}_{k=0}^{N}$, получаемых в результате процедуры, описанной в [2], и отвечающих интегральному соотношению (1), является набором квантилей исходной плотности вероятностного распределения $f(x)$ и может быть использована как для восстановления $f(x)$, так и для вычисления интегральных моментов этого распределения. Наличие каких-либо априорных сведений о входном распределении или необходимость получения о нем ограниченного объема информации позволяет с помощью моментов существенно сократить число отсчетов и, главное, объем специальных вычислений.

Особый интерес для практических задач представляют случаи, когда входное распределение $f(x)$ является одномодовой функцией, причем требуется определить ее положение в пространстве и ширину распределения. Очевидно, что для этого достаточно вычислить первые два момента распределения — математическое ожидание и дисперсию. Из (1) следует, что квантиль X_k при $k/N = 0.5$ соответствует медиане распределения $X_{\text{м}}$, которая может отслеживаться непрерывно и служить оценкой положения оптического сигнала. Дисперсия при гауссовском распределении легко определяется с помощью квантилей порядка 0.16 и 0.84. При симметричных распределениях медиана $X_{\text{м}} = Mx$, т.е. значение медианы и математического ожидания совпадают. В случае “острых” несимметричных распределений, когда дисперсия Dx мала, медиана является хорошим приближением математического ожидания

$$|Mx - X_{\text{м}}| = \left|\int_a^b x\,dF(x) - X_{\text{м}}\int_a^b dF(x)\right| = \left|\int_a^b (x - X_{\text{м}})\,dF(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |x - X_{\text{м}}|\,dF(x) \leqslant \int_a^b |x - MX|\,dF(x) \leqslant \left(\int_a^b (x - MX)^2\,dF(x)\right)^{1/2} = (Dx)^{1/2}.$$

Кроме того, в целом ряде реальных случаев, например при определении угла падения на фотоприемник, именно медиана, а не математическое ожидание или мода, позволяет наиболее правильно оценить направление на источник сигнала.

Процедура, описанная в [2] и позволяющая формировать набор квантилей согласно уравнению (1), выполняется благодаря тем особым свойствам, которыми обладает фотоприемник мультискан. Подвижная апертура, интегральный принцип образования сигнала, возможность сравнения фототоков как внутри фотоприемника, так и во внешних цепях открывают широкие перспективы его использования с целью первичной обработки оптических сигналов.

В подтверждение этого отметим, что способ вычисления Mx^p по набору квантилей $\{X_k\}_{k=0}^N$, сформулированный нами в (6), позволяет сразу предложить простую техническую процедуру, на основании которой на выходе набора мультисканов в качестве выходного сигнала можно получить значения не только квантилей, но и моментов любого порядка распределения $f(x)$.

Пусть на мультискане с номером 1 реализована процедура, описанная в [2], в результате которой на выходе прибора формируется напряжение U_k, пропорциональное значению квантиля порядка k/N функции распределения освещенности с плотностью $f(x)$. Коэффициент пропорциональности при этом равен отношению напряжения E, приложенного к резистивному слою мультискана, и длины фоточувствительного слоя прибора L

$$U_k = \frac{E}{L} X_k.$$

Представим теперь, что напряжение U_k подается в качестве питания на резистивный слой мультискана 2, на котором задана та же функция освещенности $f(x)$, причем мультискан 2 работает в таком же режиме, что и мультискан 1, т.е. так же формирует значение квантиля порядка k/N. Тогда напряжение на выходе второго мультискана будет равно

$$\frac{U_k}{L} X_k = E \left(\frac{X_k}{L} \right)^2.$$

Создав матрицу из P мультисканов, соединенных между собой описанным выше образом, получим на выходе r-го прибора напряжение, равное $E(X_k/L)^r$. Для получения полного набора моментов $\{Mx^r\}_{r=1}^P$ следует, последовательно изменяя k, произвести цикл измерений по методике [2], суммируя показания на выходе каждого мультискана, тогда

$$Mx^r = \sum_{k=1}^{N-1} E \left(\frac{X_k}{L} \right)^r + \frac{E}{2} \left(\frac{X_N}{L} \right)^r,$$

что с точностью до нормировки соответствует формуле (6), выведенной в теореме (последний квантиль в наборе суммируется с коэффициентом 1/2).

Интересные возможности возникают в том случае, если на каждом мультискане устанавливаются различные значения k, а суммирование ведется не по k, а по всему ансамблю мультисканов. Реализация такого подхода позволит получать разнообразную статистику, оптимально согласовывая ее с признаками и особенностями входных распределений.

Цена, которую при этом приходится платить, это обычные энергетические потери, неизбежные при мультиплицировании оптического сигнала, так как необходимо создать одновременную идентичную освещенность всех мультисканов.

Простота и естественность перехода от формирования квантилей к формированию моментов очередной раз доказывает широкие новые возможности мультискана при работе с интегральными функциями распределений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований код 93–02–14865.

Список литературы

[1] *Берковская К.Ф., Кириллова Н.В., Подласкин Б.Г.* и др. // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 10. С. 2015–2024.

[2] *Подласкин Б.Г.* и др. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 8. С. 1610–1616.

[3] *Гудмен Дж.* Статистическая оптика. М.: Мир, 1988.

[4] *Стратонович Р.Л.* Теория информации. М.: Сов. радио, 1975.

[5] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984.

[6] *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1975.

[7] *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1968.

[8] *Stieltjes T.* Recherches sur les fractions continues. Ann. de Taulous. Vol. VIII–IX. P. 1894–1895.

[9] *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы, связанные с нею. М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1961.

[10] *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.

[11] *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятности. М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1961.

Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
3 декабря 1992 г.
В окончательной редакции
16 апреля 1993 г.