10

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ РАЗВИТИЯ ЦИКЛОТРОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА В ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СТРУКТУРЕ

М.И.Капчинский, Л.А.Юдин

Рассмотрена нелинейная стадия взаимодействия электронного пучка с замедляющей структурой при возбуждении в пучке медленной циклотронной волны. Считается, что пространственная структура поля определяется замедляющей структурой и не искажается пучком. Уравнения движения частиц и возбуждения волны разложены в ряд до членов четвертого порядка малости по амплитуде волны. Развито квазиквадратичное приближение и показано, что оно с хорошей точностью описывает результаты нелинейной модели. Определено влияние расстройки от точного циклотронного резонанса на процессы развития неустойчивости; вычислено ее бифуркационное значение, найдена область параметров, позволяющих получить значительное усиление затравочной волны структуры без существенного изменения состояния электронного пучка. Показана связь результатов нелинейного рассмотрения с развитой ранее линейной теорией.

Введение

Резонансно неустойчивое взаимодействие медленной циклотронной волны прямого электронного пучка с волной замедляющей структуры может быть использовано для усиления сигналов или генерации колебаний в СВЧ электронике. В [1] предложено применить такую неустойчивость для возбуждения медленных циклотронных волн пучка и дальнейшего использования их в целях коллективного авторезонансного ускорения ионов [2].

Возбуждение азимутально-несимметричной циклотронной волны в замедляющей структуре типа меандра было проведено в [3]. Симметричные по азимуту циклотронные волны возбуждались с использованием спиральной замедляющей структуры [4] в слаботочном электронном пучке и в [5] в мощном релятивистском пучке. Теоретическое рассмотрение неустойчивости медленных циклотронных волн в нерелятивистском пучке было впервые выполнено в [6], а ее связь с аномальным эффектом Доплера показана в [7]. В работе [8] найдено выражение для инкрементов этой неустойчивости в релятивистском пучке при достаточно слабом токе, когда собственная волна замедляющей структуры практически не искажается пучком. Линейная теория циклотронной неустойчивости пучка в спирали при произвольных токах пучка разработана в [9]. Численное моделирование линейной стадии неустойчивости проведено в [1]. Модель для описания нелинейной стадии неустойчивости предложена в [10]: там рассмотрено движение электрона в плоской поперечной волне, причем начальная амплитуда волны принята достаточно высокой, а усиление волны по длине СВЧ прибора малым. Отметим также работу [11], где изучается теория прибора типа ЛОВ на аномальном эффекте Доплера в поле плоской волны круговой поляризации.

В данной работе мы рассматриваем прибор типа лампы с бегущей волной и отказываемся от приближения плоской волны; это позволяет учесть модуляцию плотности заряда в пучке. Считаем, что картина поперечного распределения поля волны (в приближении слабого тока пучка) определяется замедляющей структурой. Основное внимание уделено структуре типа спирального волновода.

1. Примем простейшую модель электронного пучка — бесконечно тонкий трубчатый пучок движется (в равновесном состоянии) без вращения вдоль силовых линий внешнего продольного магнитного поля H_0. По волноводному тракту, окружающему пучок, распространяется электромагнитная волна с продольными компонентами электрического и магнитного полей вида

$$\mathcal{E}_z = \alpha(z)E_z(\mathbf{r}_\perp)\cos[\omega t - hz + \psi(z)],$$
$$\mathcal{B}_z = -\alpha(z)B_z(\mathbf{r}_\perp)\sin[\omega t - hz + \psi(z)], \tag{1}$$

где ω — частота волны; h — продольное волновое число; z — продольная координата; $\mathbf{E}_z(r)$ и $\mathbf{B}_z(r)$ — функции, описывающие поперечную структуру продольных компонент поля волны (для определенности $E_z > 0$ на радиусе пучка); $\alpha(z)$ и $\psi(z)$ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза волны.

Из поперечных (радиальной и азимутальной) компонент поля составим "поляризационные" комбинации

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_r + i\mathcal{E}_\Theta; \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_r + i\mathcal{B}_\Theta \tag{2}$$

и выделим амплитуды право- и левовращающихся поляризаций

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\alpha(z)\{E_+(\mathbf{r})\exp[-i\omega t + ihz - i\psi(z)] + E_-(\mathbf{r})\exp[i\omega t - ihz + i\psi(z)]\},$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2}\alpha(z)\{B_+(\mathbf{r})\exp[-i\omega t + ihz - i\psi(z)] + B_-(\mathbf{r})\exp[i\omega t - ihz + i\psi(z)]\} \tag{3}$$

(использована система обозначений из [12]).

Уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left\{\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{e}_z H_0 + \boldsymbol{\mathcal{B}}]\right\}, \tag{4}$$

где e — заряд, $\mathbf{p}$ — импульс, $\mathbf{v}$ — скорость частицы, c — скорость света, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ — электрическое и магнитное поля волны.

Скорость и импульс частиц связаны соотношением $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$, где m — масса. Релятивистский фактор частицы γ в свою очередь подчиняется уравнению

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{e}{mc^2}\mathbf{v}\boldsymbol{\mathcal{E}}. \tag{5}$$

Составим из поперечных составляющих скорости и импульса частиц аналогично (2) "поляризационные" комбинации

$$p = p_r + ip_\Theta, \quad v = v_r + iv_\Theta. \tag{6}$$

Уравнение для них следует из (4)

$$\frac{dp}{dt} + i\Omega_0 v = e\left\{\mathcal{E} + \frac{i}{c}(v_z\mathcal{B} - v\mathcal{B}_z)\right\}, \tag{7}$$

где $\Omega_0 = eH_0/mc$ (считаем для определенности $\Omega_0 > 0$).

Продольная составляющая уравнения (4) имеет вид

$$\frac{dp_z}{dt} = e\{\mathcal{E}_z + \frac{1}{c}\,\mathrm{Im}(v^*\mathcal{B})\}. \tag{8}$$

Уравнение (5) в этих обозначениях выглядит так:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{e}{mc^2}\{v_z\mathcal{E}_z + \mathrm{Re}(v^*\mathcal{E})\}. \tag{9}$$

Лагранжеву производную по времени в уравнениях (7)–(9) следует заменить на эйлерову по правилу

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Рассматривая движущиеся электроны пучка как источники, изменяющие амплитуду и фазу бегущей мимо них электромагнитной волны, напишем, согласно [13],

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{1}{4S_z}\,\mathrm{Re}\int \overline{\mathbf{j}_k\mathbf{E}_k^*}d\sigma,$$

$$\alpha\frac{d\psi}{dz} = \frac{1}{4S_z}\,\mathrm{Im}\int \overline{\mathbf{j}_k\mathbf{E}_k^*}d\sigma, \tag{10}$$

где интегрирование ведется по поперечному сечению волновода; черта сверху означает усреднение по периоду высокой частоты; индексом k помечены комплексные амплитуды бегущих волн; S_z — поток энергии, переносимой через сечение волновода волной с единичной амплитудой.

Плотность тока составляет $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, где ρ — плотность заряда в пучке.

В наших обозначениях комплексные амплитуды радиальной и азимутальной компонент поля равны

$$E_{kr} = \frac{1}{2}(E_+ + E_-^*); \quad E_{k\Theta} = \frac{1}{2}(E_+ - E_-^*) \tag{11}$$

и аналогично для поперечных составляющих плотности тока.

2. Рассмотрим здесь приближенную модель неустойчивости, допускающую аналитическое решение. Следуя [14], представим лоренц-фактор частиц γ, продольную составляющую импульса p_z и плотность заряда ρ

в виде суммы медленно меняющейся компоненты (она будет обозначена чертой сверху) и быстропеременного слагаемого. Поперечные скорость v и импульс p, согласно принятой модели равновесия пучка, будут состоять только из быстро переменной части. Все эти переменные составляющие запишем в едином виде. Для комплексных величин, например, поперечного импульса

$$p = \frac{1}{2}[p_+(z)\exp(-i\omega t + ihz - i\psi) + p_-(z)\exp(i\omega t - ihz + i\psi)], \qquad (12)$$

для действительных величин

$$\gamma = \bar{\gamma} + \frac{i}{2}[\gamma_1(z)\exp(-i\omega t + ihz - i\psi) - \gamma_1^*(z)\exp(i\omega t - ihz + i\psi)], \qquad (13)$$

аналогично для ρ и p_z. В (12) и (13) $p_+(z)$, $p_-(z)$ и $\gamma_1(z)$ — медленно меняющиеся амплитуды. Здесь мы рассматриваем уже только азимутально-симметричные волны. В разложении же продольной составляющей скорости v_z оставим только медленно меняющееся слагаемое: линейная теория циклотронных волн [15,16] приводит к выводу, что амплитуда быстрых колебаний v_z гораздо меньше, чем такие же амплитуды у поперечных составляющих скорости.

При вычислении интеграла в уравнениях возбуждения (10) следует учесть вытекающую из уравнения непрерывности связь

$$\rho_1 = \frac{1}{2(hv_z - \omega)}\mathrm{div}_\perp[\bar{\rho}(v_+ + V_-^*)] \qquad (14)$$

и "продольное" слагаемое $\rho_1 v_z E_z$ в подынтегральном выражении проинтегрировать по частям, используя уравнения Максвелла для компонент поля. В результате подынтегральное выражение в (10) будет пропорционально $\bar{\rho}$, соотношение для него при отсутствии высокочастотной модуляции продольной скорости

$$\int \bar{\rho}\, d\sigma = \frac{J}{\beta},$$

где J — ток пучка, $\beta = \bar{v}_z/c$. Результат интегрирования

$$\int \overline{\mathbf{j}_k \mathbf{E}_k^*}\, d\sigma = \frac{-\omega J}{2(hv_z - \omega)}[V_+(E_+^* + i\beta B_+^*) + V_-^*(E_- - i\beta B_-)],$$

где $E_\pm$ и $B_\pm$ взяты на радиусе пучка.

Исследование уравнения поперечного движения (7) показывает, что слагаемые из представления (12) и ему аналогичных, пропорциональные амплитудам с индексом "+", описывают развитие в пучке быстрой циклотронной волны (дисперсионное уравнение $\omega - h\bar{v}_z \simeq \Omega_0/\bar{\gamma}$), а члены, помеченные индексом "−", соответствуют медленной циклотронной волне ($\omega - h\bar{v}_z \simeq -\Omega_o/\bar{\gamma}$). Поскольку нас с самого начала интересует неустойчивость медленной циклотронной волны и начальные условия развития неустойчивости будут соответствовать (с точностью до расстройки) дисперсионному уравнению медленной волны, то во всех уравнениях пренебрежем членами с амплитудами, обладающими индексом "+". Индекс "−" у амплитуд в дальнейшем для сокращения записей опустим.

В такой записи уравнения движения (7)–(9) и возбуждения (10) принимают простой вид

$$g' = \frac{\beta B - iE}{\beta} \varepsilon \cos\varphi,$$

$$\varphi' = -\left[\frac{h_1\beta - \omega_1}{\beta} - \frac{\Omega_r(1+\Delta)}{\mathcal{P}}\right] - \frac{\beta B - iE}{\beta}\frac{\varepsilon \sin\varphi}{g} -$$

$$-\zeta \frac{\omega_1}{h_1\beta - \omega}(\beta B - iE)\frac{g \sin\varphi}{\varepsilon \mathcal{P}},$$

$$\varepsilon' = \zeta \frac{\omega_1}{h_1\beta - \omega_1}(\beta B - iE)\frac{g\cos\varphi}{\mathcal{P}},$$

$$\mathcal{P}' = -\frac{h_1}{h_1\beta - \omega_1}(\beta B - iE)\frac{\varepsilon g}{4\mathcal{P}}\cos\varphi, \qquad (15)$$

где введены безразмерные обозначения $\varepsilon = e\alpha s/mc^2$, s — характерный поперечный размер системы, $\mathcal{P} = p_z/mc = \beta\bar{\gamma}$, $h_1 = hs$, $\omega_1 = \omega s/c$, коэффициент

$$\zeta = \frac{cs^2}{8S_z}\frac{J}{J_0},$$

$J_0 = mc^3/e$ — альфвеновский ток, штрихом обозначена производная по безразмерной координате $x = z/s$, амплитуда поперечного импульса представлена в форме $p_-(z) = imcg(z)\exp[-i\varphi(z)]$, $g(z)$ и $\varphi(z)$ — медленно меняющиеся действительные функции .

Уравнение для фазы электромагнитного поля $\psi(z)$ отщепляется и нас далее не интересует. Фаза $\psi(z)$ есть по существу сдвиг между фазой поля и фазой циклотронного вращения частицы. При выводе уравнений (15) существенно использовался факт, что в бегущей волноводной моде с продольными компонентами полей вида (1) полевая комбинация B (в обозначениях предыдущего раздела B_-) является чисто действительной, а комбинация E — чисто мнимой. Релятивистский фактор $\bar{\gamma} = \mathcal{P}/\beta$ в свою очередь удовлетворяет уравнению

$$\gamma' = -\frac{\omega_1}{h_1\beta - \omega_1}(\beta B - iE)\frac{\varepsilon g}{4\mathcal{P}}\cos\varphi. \qquad (16)$$

Во втором из уравнений (16) Δ — небольшая по сравнению с единицей расстройка от точного циклотронного резонанса на аномальном эффекте Допплера

$$H_0 = H_{\text{res}}(1+\Delta),$$

величина H_{res} точно удовлетворяет условию резонанса для невозмущенного пучка

$$H_{\text{res}} = \frac{mc}{e}\gamma_0(hv_{z0} - \omega),$$

индексом "0" помечены начальные значения параметров, циклотронная частота $\Omega_r = eH_{\text{res}}s/mc^2$.

При усреднении уравнений (8) и (9) учтено, что частицы совершают поперечные осцилляции в неоднородном по поперечному сечению электромагнитном поле, так что $\bar{E}_z = \overline{r_\perp \cdot v_\perp E z}$, где $d\bar{r}_\perp/dt = \bar{v}_\perp$.

Из последнего из уравнений (15) и (16) получим соотношение, которое легко интегрируется и дает

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_0 = \beta_\phi(\bar{\gamma} - \gamma_0), \tag{17}$$

где $\beta_\phi = \omega_1/h_1$ — относительная фазовая скорость бегущей волны.

Соотношение (17) было впервые указано в [17,18] и использовалось в [10,19,20] при исследовании динамики частиц в поле плоской ТЕМ-волны. У нас оно получено для произвольной геометрии поля волны, но носит (в соответствии с используемой моделью) лишь прближенный характер. Это соотношение показывает, что при раскачке волны и уменьшении продольной компоненты импульса кинетическая энергия частиц падает.

Зависимость (17) позволяет связать продольную скорость частиц непосредственно с их продольным импульсом

$$\beta = \frac{\mathcal{P}}{\gamma_0 + \beta_\phi(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)} \tag{18}$$

и замкнуть таким образом систему в уравнениях (15), (16) имеют первый или второй порядок малости относительно безразмерной амплитуды волны $\varepsilon(x)$. Однако реально здесь учтены эффекты и более высокого порядка малости, связанные с зависимостью безразмерных продольного импульса $\mathcal{P}$ и продольной скорости β от координаты x. Поэтому приближение, описываемое уравнениями (15), (18) естественно называть квазиквадратичным.

Для перехода к линейной теории пренебрежем в системе уравнений (15) членами второго порядка малости. Это дает постоянство продольного импульса $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_0$ и продольной скорости $\beta \equiv \beta_0$. Оставшиеся уравнения позволяют получить для комплексной функции $f = \varepsilon \exp(i\psi)$ уравнение

$$f'' - i\frac{\Omega_r \Delta}{\mathcal{P}_0} f' - \Gamma^2 f = 0 \tag{19}$$

и такое же по виду уравнение для функции $f_1 = g \exp(-i\varphi - i\psi)$. Здесь

$$\Gamma = \sqrt{\zeta \frac{\omega_1}{\Omega_r} \frac{|\beta_0 B - iE|}{\beta_0}} \tag{20}$$

— максимальный линейный инкремент, полученный в [8,9].

Характер решения (19) зависит от величины расстройки. При $\Delta < \Delta_L$, где

$$\Delta_L = \frac{2\Gamma \mathcal{P}_0}{\Omega_r} \tag{21}$$

— максимальная линейная расстройка, происходит экспоненцальный рост волны с инкрементом $\Gamma\sqrt{1 - \Delta^2/\Delta_L^2}$. При $\Delta > \Delta_L$ амплитуда волны меняется по тригонометрическому закону в форме биений двух колебаний с постоянными распространения $\Gamma(\Delta/\Delta_L \pm \sqrt{\Delta^2/\Delta_L^2 - 1})$.

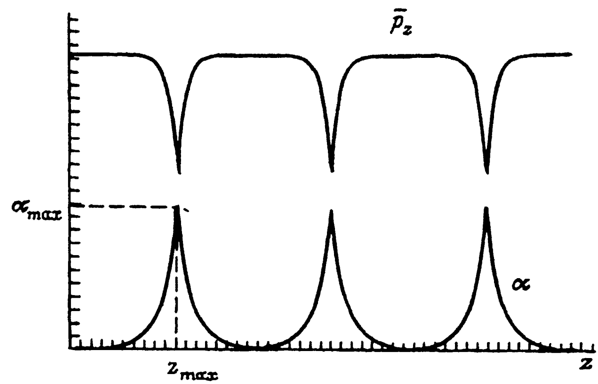

Рис. 1. Зависимость амплитуды волны α и продольной компоненты импульса частиц от продольной координаты z.

В качестве начальных условий к уравнениям (15), (18) примем равенство нулю амплитуды поперечной скорости и амплитуды высокочастотной гармоники релятивистского фактора частиц γ_1. Величина его медленной составляющей должна быть связана с продольной компонентой импульса электрона очевидным соотношением $\gamma_0^2 = 1 + \mathcal{P}_0^2$. Эти начальные условия соответствуют не вращающимся в равновесном состоянии частицам пучка. Начальная радиальная координата для всех частиц тонкого трубчатого пучка одинакова: $r_0 = a$. Геометрия электромагнитного поля соответствовала собственной волне спиральной замедляющей структуры (в приближении анизотропного проводящего цилиндра [13]), фазовая скорость волны бралась малой (~ 0.03 c), ток пучка 1 кА, параметр $ha = 1$, радиус спирали $s = 2a$.

Численное решение системы уравнений (15), (18) в широком диапазоне параметров (импульса $\bar{p}_{z0}$, расстройки Δ, начальной амплитуды волны α_0) показало, что результаты решения в качественном отношении одинаковы. На рис. 1 приведен характерный вид зависимостей $\alpha(z)$ и $p_z(z)$, эти зависимости имеют периодический вид (периодичность во времени процессов в ЛОВ отмечена в [11]). Характеристики процесса насыщения роста волны, которые нас будут интересовать в первую очередь, — длина $z_{\max}$, на которой достигается максимальная амплитуда $\alpha_{\max}$, и коэффициент усиления α_{max}/α_0, наоборот, резко зависят от параметров задачи, причем наиболее чувствительно от расстройки Δ.

3. Проведем аналитическое исследование системы уравнений (15). Первое и четвертое уравнения системы (15) дают интеграл движения, позволяющий связать амплитуду поперечной компоненты импульса с изменением его продольной составляющей,

$$g = \sqrt{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P})[\mathcal{P}_l(1 + \beta_\Phi^2) + \mathcal{P}(1 - \beta_\Phi^1) - 2\gamma_0\beta_\Phi]}. \tag{22}$$

Третье и четвертое уравнение системы (15) дают первый интеграл, позволяющий найти амплитуду поля волны,

$$\varepsilon = 2\sqrt{2\zeta\beta_\Phi(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P})}, \tag{23}$$

где

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_0 + \frac{\varepsilon_0^2}{8\zeta\beta_\Phi}.$$

Последний интеграл движения в сочетании с (17) выражает закон сохранения потока энергии через поперечное сечение волновода вдоль оси системы $\varepsilon^2 + 8\zeta\bar{\gamma} = \text{const}$.

Отметим, что в спиральной замедляющей структуре с углом захода витков $\varphi_s > 0$ (это соответствует оптимальному режиму усиления волны [9]) комбинация $\beta B - iE$ всегда положительна.

Воспользуемся автономностью системы (15). Разделив второе уравнение на четвертое и учитывая соотношения (22) и (23), получим дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее движение системы в фазовой плоскости $(\varphi,\ \mathcal{P})$. В предположении, что изменение продольной компоненты импульса $\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}$ мало́ по сравнению с $\mathcal{P}_0$, это уравнение легко интегрируется и дает уравнение фазовой траектории

$$\frac{(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P})[\mathcal{P}_0 - \mathcal{P} + \mu\Delta]^2}{(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P})} = \mu^2\Delta_L^2 \sin^2\varphi, \tag{24}$$

где $\mu = 2\gamma_0(\beta_0 - \beta_\Phi)/(1 - \beta_\Phi^2)$.

Начальная точка траектории имеет координаты $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$, $\varphi = 0$.

Знание этих трех интегралов движения позволяет определить решение системы (15), (18). Так, зависимость от координаты безразмерного продольного импульса частиц дается в неявной форме соотношением

$$x = \frac{2\mathcal{P}_0}{h_1(1 - \beta_\Phi^2)} \int\limits_0^{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi\left[\mu^2\Delta_L^2\left(\xi + \frac{\varepsilon_0^2}{8\zeta\beta_\Phi}\right) - \xi\left(\xi + \mu\Delta\right)^2\right]}}. \tag{25}$$

Стоящий справа интеграл является эллиптическим, поэтому обратная зависимость $\mathcal{P}(x)$ будет эллиптической (и потому периодической) функцией. Из (23) ясно, что максимальная амплитуда волны $\varepsilon_{\max}$ достигается в точке, где частицы имеют наименьший импульс. Этот наименьший импульс $\mathcal{P}_{\min}$, как следует из (25), является максимальным (или единственным) действительным корнем кубического многочлена, стоящего в скобках в знаменателе правой части (25),

$$(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P})(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P} + \mu\Delta)^2 = \mu^2\Delta_L^2(\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}). \tag{26}$$

Безразмерная длина $x_{\max}$, на которой достигается максимальная амплитуда волны, выражается полным эллиптическим интегралом вида (25), где в качестве верхнего предела фигурирует $\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_{\min}$. Максимальная амплитуда волны будет равна

$$\varepsilon_{\max} = \sqrt{\varepsilon_0^2 + 8\zeta\beta_\Phi(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_{\min})}. \tag{27}$$

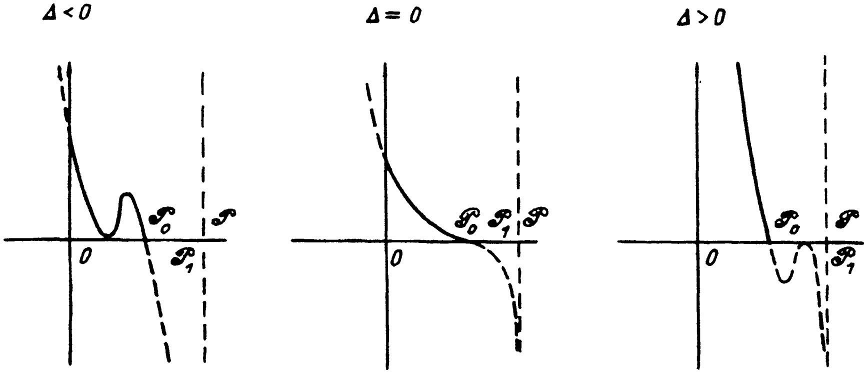

Рис. 2. График левой части уравнения (24) как функции продольного импульса для случаев отрицательной, нулевой и положительной расстроек Δ.

Если определить КПД системы как отношение прироста потока энергии, переносимого бегущей электромагнитной волной, к мощности, вносимой немодулированным на входе пучком [10], то он составит

$$\eta = \beta_\Phi \frac{\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_{\min}}{\gamma_0 - 1}$$

и в случае волны с малой фазовой скоростью он невелик.

Исследуем подробнее уравнение (24). Схема его левой части приведена на рис. 2 отдельно для случаев положительной, нулевой и отрицательной расстроек Δ. Штриховой линией показано поведение функции в "нефизической" области при $\mathcal{P} > \mathcal{P}_0$ и $\mathcal{P} < 0$. Поскольку правая часть (24) может меняться только в пределах от 0 до $\mu^2\Delta_L^2$, то и аргумент $\mathcal{P}$ левой части ограничен в своем изменении. При небольших по сравнению с единицей значениях расстройки Δ_L импульс $\mathcal{P}$ может уменьшаться вплоть до нуля лишь при начальных амплитудах волны

$$\varepsilon_0 = \frac{\Omega_r}{|\beta_0 B - iE|} \frac{\mathcal{P}_0 + \mu\Delta}{\gamma_0} \sqrt{\frac{\mathcal{P}_0(1-\beta_\Phi^2)}{\mu}}, \tag{28}$$

т. е. когда амплитуда волны α становится сравнимой с величиной продольного статического магнитного поля H_0. Однако в этом случае нарушается предположение о небольшом уменьшении продольного импульса, так что здесь можно уверенно говорить лишь о сильном замедлении пучка.

Интересен случай отрицательных расстроек. Здесь существует бифуркационное значение $\Delta = \Delta_b$, при котором меняется характер корней кубического уравнения (25): когда абсолютная величина расстройки начинает превосходить $|\Delta_b|$, у этого уравнения вместо трех действительных корней остается один. Значение бифуркационной расстройки составляет

$$\Delta_b = -\Delta_L \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{\text{пор}}}\right)^2 d\left(d + \frac{3}{2}\right), \tag{29}$$

где d — положительное решение уравнения

$$d^4 + d^3 = \Delta_L^2 \left(\frac{\varepsilon_{\text{пор}}}{\varepsilon_0} \right)^4 ,$$

а безразмерная пороговая амплитуда

$$\varepsilon_{\text{пор}} = 2\sqrt{\zeta \mu \beta_{\text{ф}} \Delta_L}.$$

В частном случае $\varepsilon_0 \ll \varepsilon_{\text{пор}}$ бифуркационная расстройка $\Delta_b \simeq -\Delta_L$, в противном случае $\varepsilon \gg \varepsilon_{\text{пор}}$ справедливо

$$\Delta_b \simeq -\frac{3}{2} \Delta_L \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{\text{пор}}} \right)^{2/3} .$$

Исследование соотношения (29) показывает, что в общем случае $\Delta_b \leqslant -\Delta_L$.

В зависимости от величины Δ меняется характер движения рабочей точки по фазовой траектории. При $\Delta \geqslant 0$ $\Delta < \Delta_b$ и импульс $\mathcal{P}$ уменьшается от $\mathcal{P}_0$ до $\mathcal{P}_{\min}$ (амплитуда волны возрастает согласно (23)), а величина $\sin^2 \varphi$ монотонно возрастает от нуля до единицы, после чего начинается спад амплитуды. В диапазоне же $\Delta_b < \Delta < 0$ при уменьшении $\mathcal{P}$ значение $\sin^2 \varphi$ сначала возрастает, потом падает до нуля и вновь растет до единицы. Таким образом, здесь система вторично "затягивается в резонанс". Дело в том, что при выборе значения магнитного поля H_0 ниже "первично резонансного" H_{res} в дальнейшем при развитии неустойчивости кинетическая энергия уменьшается и циклотронная частота $\Omega = eH_0/\gamma mc^2$ возрастает и проходит через резонансное значение.

При $\Delta \simeq \Delta_b$ на нелинейной стадии взаимодействия пучка с электромагнитной волной реализуется режим динамического хаоса, когда малые возмущения начальных условий существенно изменяют характер движения частиц в поле волны [21].

Отметим, что и положительная величина расстройки $\Delta = -\Delta_b$ является физически значимой. Исследование интеграла в формуле (25) показывает, что при $|\Delta| < |\Delta_b|$ рост величины $\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}(x)$ носит на начальном этапе экспоненциальный характер, а при $|\Delta| > |\Delta_b|$ —тригонометрический. Таким образом, бифуркационная расстройка является обобщением на нелинейный случай понятия максимальной линейной расстройки. Но нелинейная теория кроме порогового характера зависимости поведения системы от расстройки указывает еще и на "анизотропность" расстройки (для случая комбинационного черенковского резонанса такое явление указано в [21], для комбинационного циклотронного резонанса в [22]). Выше мы уже видели, что квазиквадратичная теория предсказывает существенно бóльшую величину максимальной амплитуды волны $\varepsilon_{\max}$ при отрицательных расстройках, чем при положительных в диапазоне $|\Delta| < |\Delta_b|$.

4. Модель, описываемая системой уравнений (15), (18), не является полной: она учитывает не все члены из уравнений (7)–(9), порядка малости третьего и выше относительно амплитуды волны. Нелинейный характер уравнений (7)–(9) требует учета возникновения гармоник (высших

и нулевой) в параметрах движения частиц. Выражение для поперечного импульса, например, следует искать в виде (вместо (12))

$$p = \bar{p}(z)+\frac{1}{2}\sum_n \{p_{+n}(z)\exp[in(-\omega t+hz-\psi)]+p_{-n}(z)\exp[-in(-\omega t+hz-\psi)]\} \tag{30}$$

и аналогично для поперечной скорости частиц. Действительные переменные (аналог выражения (13)) запишем как

$$\gamma = \bar{\gamma}(z) + \frac{1}{2}\sum_n \{\gamma_n(z)\exp[in(-\omega t + hz - \psi)] - \gamma_n^*(z)\exp[-in(-\omega t + hz - \psi)]\} \tag{31}$$

и соответственно для плотности заряда ρ и продольного импульса p_z. В этих выражениях $\bar{p}$, $\bar{v}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\rho}$, $p_{\pm n}$, $v_{\pm n}$, γ_n, ρ_n и p_{zn} — медленные функции координаты z. Высокочастотной модуляцией продольной скорости мы по-прежнему пренебрегаем.

В предельном случае малой амплитуды волны $\alpha \to 0$ "медленные величины" $\bar{v}(z)$ и $\bar{p}(z)$, ответственные за расширение и раскрутку пучка, имеют в рамках принятой модели равновесия пучка второй порядок малости относительно α, изменение величин $\bar{\gamma}$, v_z и $\bar{\rho}$ также второго порядка малости, порядок малости амплитуд гармоник совпадает с номером соответствующей гармоники. Учет в уравнениях членов только первого порядка малости приводит к соотношениям линейной теории [8,9].

Численно решалась система уравнений, учитывающая члены вплоть до четвертого порядка малости. Замкнутая система уравнений задачи включает в себя уравнения движения (7) и (9) (гармоники от нулевой до третьей), нулевую гармонику уравнения (8) для продольного импульса и уравнения возбуждения волны (10) — всего 23 нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для 37 вещественных функций от продольной координаты z и 14 билинейных алгебраических уравнений, являющихся следствиями "уравнений состояния" $p_z = m\gamma v_z$, $p = m\gamma v$. К этой системе следует добавить уравнение для реальной координаты электрона

$$v_z\frac{d\bar{r}}{dz} = \mathrm{Re}(\bar{v}), \tag{32}$$

поскольку именно эта координата определяет величины электромагнитных полей, действующих на частицу, в уравнениях движения (7)–(9). При этом в уравнениях движения можно пренебречь полями с частотами, кратными основной, поскольку их учет дает поправки малого порядка $\gamma_0^2\omega_b^2/\Omega_0^2$ к полученному решению, где ω_b — ленгмюровская частота пучка.

Описанные выше выводы квазиквадратичной теории справедливы, строго говоря, только в случае малого изменения продольной компоненты импульса частиц. Однако сравнение их с численными результатами полномасштабной модели показывает, что аналитическая теория обладает хорошими предсказывающими качествами и за пределами той области параметров, для которой она была первоначально обоснована. Зависимости, представленные на рис. 1, например, получены из решения полной нелинейной модели при начальной энергии пучка, соответствующей $\gamma_0 = 1.5$. Единственный вывод квазиквадратичной теории, от которого

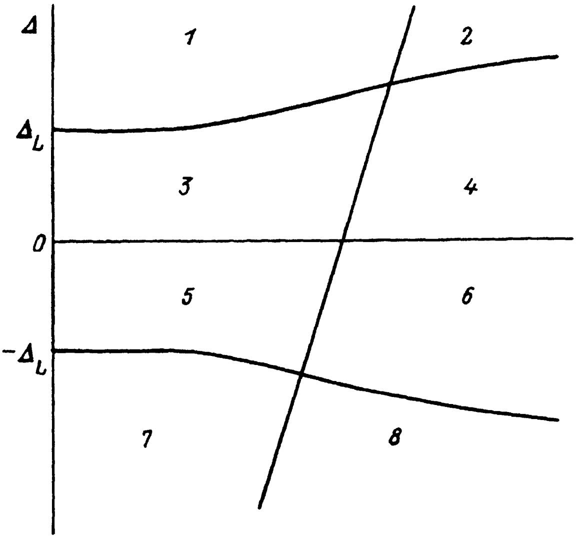

Рис. 3. Диаграмма состояний системы "пучок–структура".

приходится отказаться, это заключение о том, что бифуркационная расстройка Δ_b всегда меньше по абсолютной величине, чем ее предельное при малых амплитудах волны значение — максимальная расстройка Δ_L.

5. Соотношения (28) и (29) позволяют показать "диаграмму состояния" системы "пучок–структура" в координатах начальная амплитуда–расстройка, т.е. (ε_0, Δ). Она приведена на рис. 3. Прямой линией приведена зависимость (28), нижняя кривая — функция $\Delta = \Delta_b(\varepsilon_0)$ согласно формуле (29), верхняя кривая — ее зеркальное отражение $\Delta = -\Delta_b(\varepsilon_0)$. Эти три линии разбивают полуплоскость параметров на 8 областей. Области с номерами *2, 4, 6* и *8*, лежащие справа от прямой, соответствуют параметрам, при которых происходит сильное замедление электронного пучка и, следовательно, изменение его структуры и дисперсионных характеристик медленной циклотронной волны, распространяющейся в нем. При использовании циклотронной неустойчивости пучка в СВЧ приборе типа лампы с бегущей волной усилителя — наиболее подходящей областью параметров является область 6, поскольку именно в ней происходит значительное усиление волны и может быть достигнут максимальный КПД. Отметим, что именно этот диапазон параметров был рассмотрен в [10]. При использовании циклотронной неустойчивости в коллективном авторезонансном ускорителе ионов достижение сильнолинейной стадии развития волны и замедления пучка является, по-видимому, нежелательным. Оно будет препятствовать процессу управляемого увеличения фазовой скорости медленной циклотронной волны и, следовательно, не позволит эффективно провести ускорение ионов. Для спирального возбудителя медленных циклотронных волн в авторезонансном ускорителе следует рекомендовать область начальных параметров *5*, так как именно в ней может быть достигнуто большое усиление волны без значительного замедления пучка. Попасть в эту область диаграммы состояний можно, выбрав небольшую начальную амплитуду волны и расстройку $-\Delta_L < \Delta < 0$.

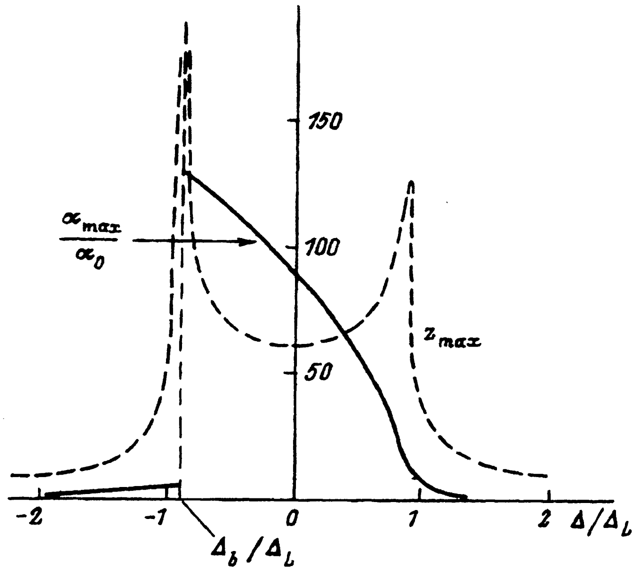

Рис. 4. Зависимость коэффициента усиления волны $\alpha_{\max}/\alpha_0$ и длины $z_{\max}$ (в см), на которой достигается амплитуда, от отношения Δ/Δ_L.

На рис. 4 представлены зависимости коэффициента усиления волны $\alpha_{\max}/\alpha_0$ и длины $z_{\max}$, на которой достигается в первый раз максимальная амплитуда волны, от отношения расстройки Δ к величине Δ_L. Параметры пучка: ток 1 кА, релятивистский фактор $\gamma_0 = 1.5$. Геометрический параметр $ha = 1$, начальный радиус трубчатого пучка $a = 1$ см , радиус спирали вдвое больше радиуса пучка, начальная амплитуда волны $\alpha_0 = 50$ кВ/м (соответствует $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$), фазовая скорость волны 0.03 от скорости света, частота волны 145 МГц. Для этих параметров, согласно нашим формулам, линейный инкремент $\Gamma = 0.087$, максимальная линейная расстройка $\Delta_L = 0.10$, параметр $\zeta_0 = 0.61$, пороговая амплитуда $\varepsilon_{\text{пор}} = 0.13$. Максимальный КПД при $\Delta = \Delta_b$ составляет 3%.

При изменении расстройки Δ от -0.20 до 0.20 изображающая точка пересекает на диаграмме состояний (рис. 3) последовательно области *7*, *5*, *3* и *1*. Видно, что бифуркационная расстройка здесь немного меньше по абсолютной величине, чем Δ_L. Подчеркнем также четный характер функции $z_{\max}(\Delta)$ (кроме окрестности точки $\Delta = \Delta_b$; ср. в связи с этим [22]). Качественный вид графиков на рис. 4 сохраняется в широком диапазоне параметров задачи. Расчеты проводились по полной системе уравнений движения и возбуждения, описанных выше.

Этот рисунок подтверждает вывод квазиквадратичной теории о том, что параметры спирального возбудителя медленных циклотронных волн для авторезонансного ускорителя ионов при небольшой амплитуде затравочной волны $\alpha_0 < |mc^2/es|$, где s — характерный поперечный размер системы, должны удовлетворять условию $-\Delta_L < \Delta < 0$. Такой выбор позволит добиться усиления волны по амплитуде в сотни раз без существенного замедления и разрушения электронного пучка.

Качественные выводы рассмотренного здесь нелинейного подхода остаются справедливыми для пучков сплошного сечения и для всех однородных в продольном направлении замедляющих структур. Более того, можно утверждать, что при больших токах пучка, когда будет развиваться неустойчивость индивидуальной пучковой моды (пространственная картина поля неустойчивой волны определяется пучком и близка к характеристикам циклотронной волны), наши рекомендации останутся в силе: начальная затравка пучковой циклотронной волны должна быть невелика, а расстройка должна находиться в диапазоне $-\Delta_L < \Delta < 0$, где в данном случае Δ_L — вычисленная в линейной задаче ширина резонанса пучковой моды.

Авторы хотели бы выразить свою благодарность В.Г. Гапановичу за полезные совместные обсуждения и Н.С. Гинзбургу за плодотворную дискуссию.

Список литературы

[1] *Fachl R.J., Newberger B.S., Godfrey B. B.,* //Phys. Fluids. 1980. Vol. 23. N 12. P. 2440–2453.
[2] *Sloan M.L., Drummond W.E.* //Phys. Rev. Lett. 1973. Vol. 31. N 20. P. 1234–1237.
[3] *Барыбин А.А., Горин Ю.Н.*//РиЭ. 1969. Т. 14. Вып. 7. С. 1257–1263.
[4] *Иванов Б.И., Горожанин Д.В., Мирошниченко В.А.* //Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5. Вып. 18. С. 1112–1116.
[5] *Cornet E.A., Davis H.A., Starke T.P. et al.* //Phys. Fluids. 1981. Vol. 24. N 11. P. 2039–2048.
[6] *Пирс Дж.* Лампа с бегущей волной. М.: Сов. радио, 1952. 229 с.
[7] *Железняков В.В.* //Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1959. Т. 2. № 1. С. 14–27.
[8] *Нечаев В.Е.* //Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1977. Т. 20. № 4. С. 598–604.
[9] *Капчинский М.И., Коренев И.Л., Юдин Л.А.* //Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 9. С. 1087–1094.
[10] *Гинзбург Н.С.* //Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 4. С. 470–479.
[11] *Кузнецов С.П., Четвериков А.П.* //Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1981. Т. 24. № 1. С. 109–117.
[12] *Гинзбург Н.С.* //ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 6. С. 1078–1083.
[13] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957.
[14] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1973. § 30.
[15] *Белов Н.Е.* //Тр. РТИ АН СССР. Вып. 31. М., 1978. С. 135–146.
[16] *Коренев И.Л., Юдин Л.А., Мустафин Х.Х.* //Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1979. Т. 22. № 12. 1523–1533. Физика плазмы. 1982. Т. 8. № 2. С. 339–347.
[17] *Коломенский А.А., Лебедев А.Н.* //ДАН СССР. 1962. Т. 145. Вып. 6. С. 1259–1261.
[18] *Давыдовский В.Я.* //ЖЭТФ. 1962. Т. 43. Вып. 3(9). С. 886–888.
[19] *Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И.* //Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28. Вып. 4. С. 207–211.
[20] *Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И.* //ЖЭТФ. 1979. Вып. 3. С. 930–943.
[21] *Гинзбург Н.С., Сергеев А.С.* //ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 8. С. 40–52.
[22] *Гинзбург Н.С.* //Релятивистская высокочастотная электроника. Вып. 3. Горький, 1983. С. 26–95.

Московский радиотехнический институт

Поступило в Редакцию 27 мая 1991 г.
В окончательной редакции 3 марта 1993 г.