НОВЫЙ ТИП ДВУХСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ ВЕКТОРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Х.О.Абдуллоев, А.Т.Максудов, Х.Х.Муминов

Часто в физике при исследовании нелинейных волновых процессов возникают системы дифференциальных уравнений, моделирующих взаимодействие конечного числа волн и волновых пакетов. Одним из наиболее распространенных уравнений является векторное нелинейное уравнение Шредингера (ВНУШ). Это уравнение довольно основательно изучено. Найден большой класс многосолитонных решений. Следует отметить, что в основном уравнение было проинтегрировано методом обратной задачи [1]. В данной работе мы проинтегрируем это уравнение алгеброгеометрическим методом, предложенным впервые в [2] и развитым в дальнейшем в работах [3–5]. Этот метод более прост, но здесь получается новый класс ранее неизвестных многосолитонных решений. Наиболее основательно этот метод изложен в обзоре [5]. В дальнейшем кратко без доказательств остановимся на основных моментах настоящего метода.

Решается задача на собственные значения оператора Шредингера с нулевым собственным значением.

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x,x)\right)\Psi(x,t;k) = 0. \qquad (1)$$

Для получения многосолитонных решений необходимо потребовать, чтобы $\Psi(x,t,k)$ была мероморфной функцией в конечной плоскости с полюсами первого порядка в некоторых точках $\varkappa_j$, $j = 1, N$.

Решение уравнения Шредингера представляется в виде

$$\Psi(x,t,k) = \frac{Q_N(x,t,k)e^{ikx+ik^2t}}{(k-\varkappa_1)(k-\varkappa_2)\ldots(k-\varkappa_N)} \qquad (2)$$

где

$$Q_N(x,t,k) = k^N + a_1(x,t)k^{N-1} + \ldots + Q_N(x,t) \qquad (3)$$

— полином по степеням k, а точки $\varkappa_i$ — особые точки в комплексной плоскости.

Как видно, функция $\Psi(x,t,k)$ аналитична по k во всех точках, кроме особых точек $\varkappa_j$. Таким образом, мы ввели существенное ограничение, которое позволяет нам использовать теорию функций комплексного переменного, так как мероморфную функцию можно однозначно определить, зная ее вычеты в особых точках. Как показано в [5], функция $\Psi(x,t,k)$ в точке $\varkappa_j$ выражается через вычеты

$$\Psi(x,t,k) = -\sum_{j=1}^{N} C_{ij}\mathrm{res}\Psi(x,t,k); \quad i = 1, N, \qquad (4)$$

где C_{ij} — постоянная матрица размером $N \times N$.

В обзоре [5] сформулированы следующие теоремы, мы приводим их без доказательств.

Теорема 1. Пусть параметры $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N, C_{ij}$, задающие условиями (4) функцию $\Psi(x,t,k)$ вида (3), удовлетворяют следующим условиям: а) матрица C_{ij} косоэрмитова $C_{ij} = \bar{C}_{ji}$; б) обозначим точки $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$ так, что $\operatorname{Im} \varkappa_i > 0$, $i = 1, p$; $\operatorname{Im} \varkappa_l < 0$, $i = p+1, N$. Требуется, чтобы эрмитова матрица

$$\frac{1}{i} C_{kl}, \qquad 1 \leqslant k, \qquad l \leqslant p$$

была положительно определенной, а эрмитова матрица

$$\frac{1}{i} C_{kl}, \qquad p+1 \leqslant k, \qquad l \leqslant N \qquad .$$

отрицательно определенной. Тогда функция $\Psi(x,t,k)$ при $k = \varkappa_j$ гладко зависит от x, t при всех вещественных x, t и является собственной для оператора $L = i\partial_t - \partial_x^2 + U(x,t)$ с гладким вещественным потенциалом. Для этих функций справедливы формулы

$$\Psi(x,t,k) = \frac{\det \hat{M}(x,t,k)}{\det M(x,t)} e^{ikx+ik^2t},$$

где

$$M_{ij} = C_{ij} + \frac{e^{i(\bar{\omega}_i - \omega_j)}}{\bar{\varkappa}_i - \varkappa_j}; \quad \omega_i = \varkappa_i(x + \varkappa_i t); \quad i,j = 1, N;$$

$$\hat{M}_{ij} = M_{ij} \quad \text{при} \quad i,j = 1, N; \quad M_{00} = 1; \quad M_{i0} = e^{i\bar{\omega}_i};$$

$$M_{0i} = (k - \varkappa_i) e^{-i\omega_i}; \quad i = 1, N. \tag{5}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Psi_j = \operatorname{res} \Psi(x,t,N),$$

$$\Phi_j(x,t) = b_{ij} \Psi(x,t,\varkappa_j), \quad j = 1, n, \tag{6}$$

где функции Φ_j и Ψ_j удовлетворяют следующим уравнениям:

$$i\dot{\Phi}_j - \Phi_j'' + U(x,t)\Phi_j = 0, \quad j = 1, n,$$

$$i\dot{\Psi}_j - \Psi_j'' + U(x,t)\Psi_j = 0, \quad j = 1, N. \tag{7}$$

Теорема 2. Пусть функции $\Phi_j(x,t)$, $\Psi_j(x,t)$ построены по набору параметров $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_N$; C_{ij} и по рациональной функции

$$E(k) = k + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{b_i^2}{k - k_i}. \tag{8}$$

Тогда имеет место следующие условия согласования:

$$\frac{U}{2} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i b_i^2 + C_2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i |\Phi_i(x,t)|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\Psi_i(x,t)} E_{ij} \Psi_j(x,t), \tag{9}$$

где

$$E_{ij} = C_{ij}\left(\overline{E(\varkappa_i)} - E(\varkappa_j)\right). \tag{10}$$

Определение. Интегрируемый потенциал $U(x,t)$, задаваемый в рамках нашей конструкции N параметрам $\varkappa_1, \dots, \varkappa_N$ вместе с $N \times N$ матрицей (C_{ij}), мы будем называть N-солитонным.

В дальнейшем мы будем рассматривать двухсолитонные решения, что соответствует существованию двух полюсов $\varkappa_j$ и размерности матрицы C_{ij} 2×2. Соответственно и матрица E_{ij} имеет размерность 2×2. Положив $n = 1$ и $C_2 = 0$ $E_{ij} = -\varepsilon_2 \bar{\gamma}_i \cdot \gamma_j$, можно переопределить функции Φ и Ψ

$$\varphi_1 = \Phi, \quad \varphi_2 = \gamma_1 \Psi_1 + \gamma_2 \Psi_2. \tag{11}$$

Тогда из (10) получим потенциал такого вида

$$U = 2\{\varepsilon_1 |\varphi_1|^2 + \varepsilon_2 |\varphi_2|^2\} \tag{12}$$

и система уравнений (7) примет вид

$$\begin{gathered} i\dot{\varphi}_1 - \varphi_1'' + U(x,t)\varphi_1 = 0, \\ i\dot{\varphi}_2 - \varphi_2'' + U(x,t)\varphi_2 = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Результатом этой конструкции является то, что функции, построенные через вычеты Ψ_j, имеют убывающие граничные условия, а функции Φ_i имеют осциллирующую асимптотику. Формулу (5) для вычетов при $N = 2$ можно переписать

$$\Psi_j = \operatorname*{res}_{k=\varkappa_j} \Psi(x,t,k) = \frac{\det \hat{M}_0(x,t)}{\det M(x,t)}, \tag{14}$$

где $\hat{M}_{0kl} = M_{kl}$, $k,l = 1,2$; $\hat{M}_{00} = 0$, $\hat{M}_{0l} = \delta_{lj}$, $\hat{M}_{k0} = e^{i\omega_k}$.

Функцию $\Psi(x,t,k)$ можно переписать через вычеты

$$\Psi(x,t,k) = \left(1 + \sum_{j=1}^{2} \Psi_j \frac{e^{-i\omega_j}}{k - \varkappa_j}\right) e^{ik(x+kt)}. \tag{15}$$

Как видно из (11), матрица C_{ij}

$$C_{ij} = -\frac{\varepsilon_2 \bar{\gamma}_i \gamma_j}{\overline{E(\varkappa_i)} - E(\varkappa_j)}. \tag{16}$$

Вычисляя детерминант (16), получим функции Ψ_1 и Ψ_2 в явном виде

$$\Psi_1 = \frac{Z_1 e^{iW_1(x,t) - P_1(x,t)} + Z_2 \operatorname{sh}(P_2(x,t) + h_1) e^{iW_1}}{Z_3 \operatorname{ch}(P_2(x,t) - P_2(x,t) + h_2) + Z_4 \operatorname{ch}(P_1(x,t) +}$$

$$\overline{+P_2(x,t) + h_3) + Z_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + h_4)},$$

$$\Psi_2 = \frac{Z_6 e^{iW_1(x,t) - P_2(x,t)} + Z_7 \operatorname{sh}(P_2(x,t) + h_5)}{Z_3 \operatorname{ch}(P_2(x,t) - P_2(x,t) + h_2) + Z_4(P_1(x,t) +}$$

$$\overline{+P_2(x,t)+h_3)+Z_5\cos\left(W_2(x,t)-W_1(x,t)+h_4\right)}. \qquad (17)$$

В (17) использованы следующие обозначения

$$W_1(x,t)=\alpha_1 x+(\alpha_1^2-\beta_1^2)t,$$

$$W_2(x,t)=\alpha_2 x+(\alpha_2^2-\beta_2^2)t,$$

$$P_1(x,t)=\beta_1(x+2\alpha_1 t), d$$

$$P_2(x,t)=\beta_2(x+2\alpha_2 t),$$

$$\varkappa_1=\alpha_1+i\beta_1, \quad \varkappa_2=\alpha_2+i\beta_2,$$

$$h_1=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varkappa_{21}}{\varkappa_{12}\varkappa_{22}C_{22}}\right|,$$

$$h_2=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{C_{11}\varkappa_{11}}{C_{22}\varkappa_{22}}\right|,$$

$$h_3=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(C_{12}C_{21}-C_{11}C_{22})|\varkappa_{12}|^2\varkappa_{21}\varkappa_{22}}{|\varkappa_{12}|^2}\right|,$$

$$H_4=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{C_{12}\varkappa_{12}}{C_{21}\varkappa_{21}}\right|, \quad H_5=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\bar{\varkappa}_{12}}{\varkappa_{21}\varkappa_{11}C_{11}}\right|,$$

$$\varkappa_{ij}=\varkappa_i-\varkappa_j, \quad \varkappa_{ij}=\bar{\varkappa}_i-\varkappa_j,$$

$$Z_1=\frac{C_{12}}{2}, \quad Z_2=\left(\frac{\bar{\varkappa}_{21}C_{22}}{\varkappa_{12}\varkappa_{21}}\right)^{1/2}, \quad Z_3=\left(\frac{C_{11}C_{22}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22}}\right)^{1/2},$$

$$Z_4=\left[\frac{(C_{12}C_{21}-C_{11}C_{22})|\varkappa_{12}|^2}{|\varkappa_{12}|^2\varkappa_{11}\varkappa_{22}}\right]^{1/2},$$

$$Z_5=-\left(\frac{C_{12}C_{21}}{\varkappa_{12}\varkappa_{21}}\right)^{1/2}, \quad Z_6=\frac{1}{2}C_{21},$$

$$Z_7=\left(\frac{\bar{\varkappa}_{12}C_{11}}{\varkappa_{12}\varkappa_{21}}\right)^{1/2}. \qquad (18)$$

Используя формулы (6), (12), (17), напишем решения уравнения (14)

$$\varphi_1=b\left(1+\frac{e^{i\omega_1(x,t)}}{k-\varkappa_1}\Psi_1(x,t)+\frac{e^{i\omega_2(x,t)}}{k-\varkappa_2}\Psi_2(x,t)\right)e^{ik(x+kt)},$$

$$\varphi_2=\gamma_1\Psi_1+\gamma_2\Psi_2. \qquad (19)$$

Нетрудная проверка показывает, что $\varphi_2\to 0$, $\varphi_1\to e^{ik(x+kt)}$ при $x\to\pm\infty$.

Авторы выражают глубокую благодарность В.Г.Маханькову за обсуждение полученных результатов.

Список литературы

[1] Теория солитонов. Метод обратной задачи // Под ред. С.П.Новикова. М.: Наука, 1979. 213 с.
[2] *Чередник И.В.* // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 12 Вып. 3. С. 45.
[3] *Кричевер И.М.* // Функциональный анализ и его приложения. 1986. Т. 20. Вып. 3. С. 42.
[4] *Елеонский В.М., Кричевер И.М., Кулагин Н.Е.* // ДАН СССР. 1986. Т. 287. С. 606.
[5] *Дубровин Б.А.* и др. // ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. Вып. 3. С. 579.

Таджикский университет
Душанбе

Поступило в Редакцию
2 апреля 1993 г.

---

04 *Журнал технической физики, т. 63, в. 3, 1993*

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

Н.Е.Андреев, С.В.Кузнецов

Нелинейная электродинамика полностью ионизованной плазмы, возникновение и существование локализованных структур поля в первую очередь определяются электрострикцией и эффектами нагрева [1–4]. Стрикционный механизм связан с изменением плотности плазмы под действием поля электромагнитной волны и в стационарных состояниях имеет в отсутствие столкновений частиц локальный характер. Изменение плотности плазмы вследствие ее джоулева нагрева в общем случае зависит от интенсивности поля нелокальным образом, обусловливаемым теплопроводностью плазмы [5]. При этом тепловая нелинейность, как и стрикционная, является фокусирующей $\partial\varepsilon_{\text{нел}}/\partial E^2 > 0$. В случае неполностью ионизованной плазмы картина нелинейных явлений существенно дополняется ионизационной нелинейностью, которая является дефокусирующей и приводит к возможности существования новых типов нелинейных решений [6]. При учете процессов переноса частиц она также является нелокальной. Последнее обстоятельство является весьма важным в теории образования и существования пространственных структур-страт при высокочастотном разряде в слабоионизованном газе с учетом процессов ионизации и рекомбинации. В предлагаемой работе основное внимание сосредоточивается на выяснении роли и характера действия ионизационно-рекомбинационных процессов при учете диффузии зарядов для существования нелинейных локализованных структур поля волны постоянной амплитуды, распространяющейся в газе и ионизирующей его. Исследуются малые солитоноподобные возмущения волны постоянной амплитуды в различных условиях соотношения электромагнитного пространственного масштаба и масштаба амбиполярного диффузионного расплывания за характерное время рекомбинации.

Рассмотрим распространение электромагнитной волны частотой ω и с волновым числом k в газе, который ионизуется под ее воздействием, образуя прозрачную слабоионизованную плазму, равновесную с волной.