01;03 Журнал технической физики, т. 63, в. 4, 1993

МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Э.Л.Амромин

Задачи теории потенциала, в которых на границе области его определения или же на ее части ставятся условия, вследствие чего эта часть является заранее неизвестной (свободной), имеются в различных разделах физики: гидродинамике [1], механике грунтов [2], электродинамике и физике плазмы [3,4] и пр. Возникающие при решении таких математически однотипных нелинейных краевых задач вычислительные трудности столь существенны, что для описания даже заведомо нестационарных процессов зачастую используются стационарные приближения. В настоящей работе предлагается специфический метод решения нестационарных задач теории потенциала для областей со свободными границами и на примере наиболее традиционных (со времен Кирхгофа) для этого раздела математической физики расчетов кавитационного (струйного) обтекания тел производятся демонстрация и обсуждение этого метода.

При обычных предположениях об отсутствии неконсервативных сил в идеальной несжимаемой жидкости, обтекающей тело с каверной, о постоянстве давления в ней и непроницаемости ее границы расчет нестационарного кавитационного течения сводится к решению последовательности параметрически зависящих от времени t краевых задач

$$\Delta\Phi = 0; \qquad (\nabla\Phi, N) + V|_S = 0, \tag{1),(2}$$

$$(\nabla\Phi, \nabla\Phi) - 2\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right|_{S_k} = 1 + \sigma; \quad \lim_{|x|\to\infty} \nabla\Phi = \{-1,\, 0,\, 1\} \tag{3),(4}$$

для отнесенного к скорости движения тела U и к его характерному размеру C потенциала скорости Φ. Здесь $\tau = tU_0/C$, U_0 — начальное значение U, S_k — граница каверны, S — совокупность S_k смоченной поверхности обтекаемого тела S_T и поверхности S_f замыкающего каверну фиктивного тела [1,5]. Скорость V равна нулю на недеформируемой поверхности тела, а на остальной части S, где заранее неизвестны не только производные Φ, но и компоненты N, определяется по перемещениям во времени точек границы.

Сходство стационарной задачи теории потенциала, в которой $V = 0$, $\partial\Phi/\partial\tau = 0$, с задачей (1)–(4) столь велико, что наиболее известные методы нестационарной теории до последнего времени являлись лишь адаптацией эффективных методов расчета стационарных струйных течений. Так, описанные в [1] работы Кармана и Гильбарга опираются на классические методы плоскости годографа скорости, метод [6] — на последовательную квазилинеаризацию типа [5], и т.д.; но выявились существенные ограничения на использование таких известных подходов для расчетов нестационарной задачи при произвольной форме $S_т$, и эти ограничения будут здесь обсуждены на относительно простых примерах.

Трудности применения к подобным расчетам методов, основанных на использовании плоскости годографа скорости, можно уяснить даже на

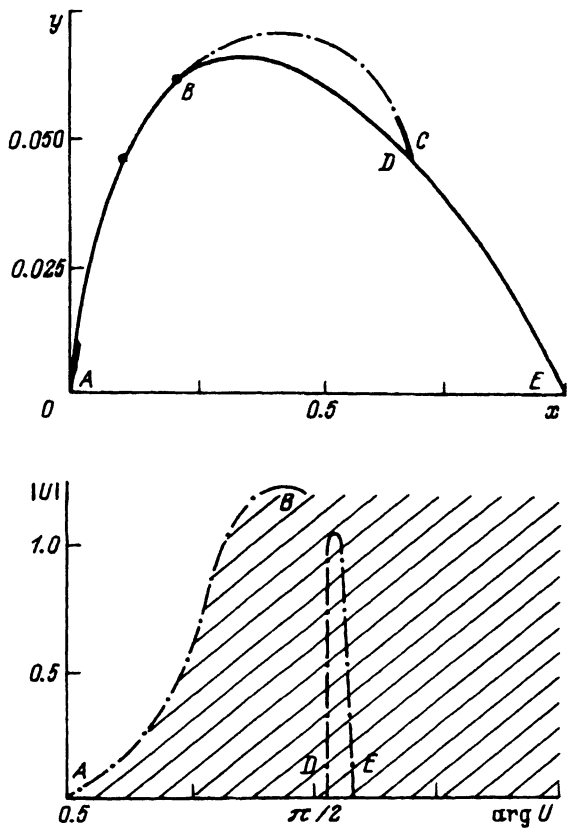

Рис. 1.

более простых стационарных примерах. Основное достоинство таких методов — возможность преобразования заранее неизвестной области в физической плоскости в известную область в плоскости параметрической. Так, внешность пластинки с каверной, замыкаемой по схеме Рябушинского, в обращенных переменных $\{|v|, \arg(v)\}$ отображается на внешность прямоугольника. Для тел, имеющих участки сильно изменяющейся кривизны (например, для представленного на верхней части рис. 1 крылового профиля Геттинген-411 с каверной), изображением потока в указанных обращенных переменных будет внешность заштрихованной на нижней части рис. 1 области (образцы и изображения одних и тех же точек отмечены в обеих плоскостях одними и теми же буквами). При отыскании этой области классическими методами [1] начальным приближением к ее границам будет прямоугольник, что делает само отыскание по меньшей мере затруднительным. Для нестационарных задач положение дополнительно осложнится тем, что S_k в параметрической плоскости не переходит в отрезок. Описанные трудности существенно не изменяются при замене одних обращенных переменных на другие, и представленные на рис. 1 результаты получены методом, описанным в [5].

В основе методов [3–6] — то обстоятельство, что в физической плоскости не так уж трудно подобрать удовлетворительное начальное приближение S^* для столь гладкой границы, как кривая S_k с хордой длины L. Для него должны выполняться условия

$$\left|\frac{U^{*2}}{1+\sigma}-1\right| \ll 1, \quad |h| \ll C, \quad |(N,N^*)-1| \ll 1.$$

Здесь $U^* = |\mathrm{grad}\,\Phi|$ определяется на S^* из задачи (1), (2), (4); h — откладываемое вдоль N^* расстояние между S^* и S_k; N^* — орт нормали к S^*. Для уменьшения невязки в условии постоянства давления на S^* описанным в [4,6] способом квазилинеаризуются граничные условия (2), (3). В стационарном случае они принимают вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N^*}+\frac{\partial hU^*}{\partial T^*}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial T^*}+\alpha_1\varkappa hU^*=\alpha_2\frac{U^{*2}-1-\sigma}{2U^*}. \qquad (5),(6)$$

Здесь $h(x_0)=0$; T^* — орт касательной к S^*; $\varkappa$ — ее продольная кривизна; потенциал простого слоя [7], φ — возмущения Φ плотности q, отличной от нуля лишь на S_k; x_0 — абсцисса точки стыковки S_k и $S_т$ (точки схода струй). Теоретически $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$, но опыт вычислений показал, что сходимость приближений наилучшим образом обеспечивается при $\alpha_1=0$, $\alpha_2<0.5$. Откорректированная наращиванием на h поверхность отождествляется с S_k при проверке условия (3), и если оно еще не выполняется с заданной точностью, то операция вычисления h, U^* и проверки (3) повторяются снова.

Эффективность вышеописанной версии метода [5] для различных плоских и осесимметричных стационарных задач оказалась весьма высокой, а чувствительность к выбору начального приближения низкой. Например, для нанесенной кривой *2,а* на рис. 2 границы каверны на теле вращения в струе гребного винта при $\sigma=0.5$ начальным приближением была кривая *2* — граница каверны той же длины в неограниченном потоке, которой соответствует $\sigma=0.06$. То обстоятельство, что при вычислении наряду с границей каверны приходилось уточнять еще и форму струи, представленной кривой *1*, с помощью соотношения, подобного (5), не препятствует их сходимости; просто близлежащие свободные границы следует корректировать поочередно, учитывая их взаимное влияние лишь при вычислении U^* из задачи (1), (2), (4) для S^*.

Адаптация метода [5] к нестационарным задачам приводит к необходимости задавать L, а не σ, и к замене (5), (6) на

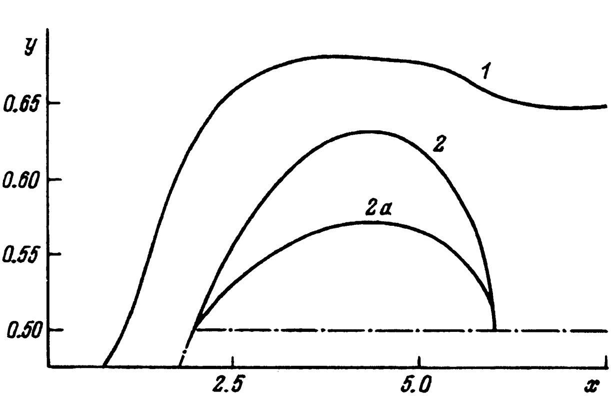

Рис. 2.

$$\alpha_3 \frac{\partial\varphi}{\partial T^*} U^* + \alpha_4 \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \alpha_2 \left(\frac{U^* - 1 - \sigma}{2} - \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} \right), \qquad (7)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N^*} + \frac{\partial h U^*}{\partial T^*} + \frac{h}{\tau^*} = 0. \qquad (8)$$

Здесь τ^* — шаг по времени и, строго говоря, $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$. Эта адаптация связана с двумя трудностями. Во-первых, в нестационарном случае редко имеется характерное для большинства стационарных задач взаимнооднозначное соответствие σ и L. Это иллюстрируют приведенные на рис. 3 результаты расчетов каверн за диском в однородном неограниченном потоке: там кривая *1* — отношение объема каверны к $4\pi C^3$, *2* — значения величины $10\sigma + 2$, характеризующей режим изменения числа кавитации, *3* — отношение L к C, *4* — $5B/L$, где B — ширина каверны. Попытка [6] сохранить прием фиксации L для нестационарных задач, подбирая по L соответствующие значения σ, оказалась вполне успешной только для режимов с монотонным изменением $\sigma(\tau)$. Во-вторых, полученные квазилинеаризацией (2), (3) без учета соотношения малых величин h и τ^* уравнения (7), (8) при $\tau^* \ll 1$ содержат члены разных порядков, что препятствует устойчивости счета.

Перечисленные трудности привели к необходимости дальнейших модификаций метода [5,6], которые описываются ниже. Первая из них позволяет задавать σ, а не L. Не связанная именно с нестационарностью, она также может быть продемонстрирована и для стационарных задач. Так как (6) — сингулярное интегральное уравнение относительно q, то требовать $q(x_0) = q(x_0 + L) = 0$ возможно лишь при выполнении известного в теории сингулярных уравнений условия на их правые части. Из такого условия в [5] и отыскивается σ при $L = \text{const}$. Поскольку условия $h(x_0) = 0$ и $h(x_0 + L) = 0$ формально равноправны, то (5) можно интегрировать с любого конца S. Если же перед этим искать два различных q:

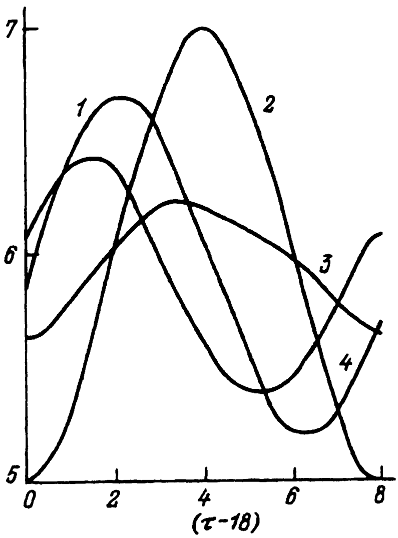

Рис. 3.

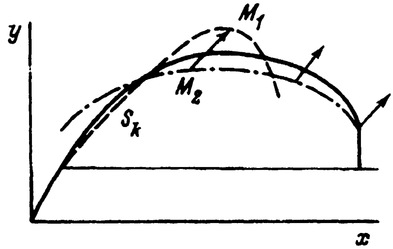

Рис. 4.

для передней части S, удовлетворяющее $q(x_0) = 0$, $|q(L + x_0)| \to \infty$, а для задней — $|q(x_0)| \to \infty$, $q(x_0 + L) = 0$, то σ можно задавать заранее, а к сингулярному уравнению не потребуется упомянутых условий. Построенные по двум решениям формы S будут разными, их мидели могут иметь различные абсциссы и ординаты. Поэтому к следующей итерации заднюю часть S_k (штриховая линия на рис. 4) надо подтянуть к передней (штрихпунктир), совместив мидели (точки M_1 и M_2) и сдвинув заднюю часть S_k так, как показано стрелками на схеме.

Вторая модификация направлена на то, чтобы квазилинеаризованные условия (7), (8) не содержали слагаемых разных порядков. Для этого на каждой итерации надо полагать либо $\alpha_3 = 0$, либо $\alpha_4 = 0$. Случай $\alpha_4 = 0$ сводится к стационарному, отличаясь от него лишь выражением для невязки в (6). При $\alpha_3 = 0$ уравнение (7) вырождается в

$$\varphi = \frac{\alpha_2}{\alpha_4} f \tau^*. \tag{9}$$

Вид функции f ясен из (7). Если, как и в (6), искать φ в (9) в виде потенциала простого слоя, то (9) станет уравнением Фредгольма первого рода, а нахождение его достаточно гладких решений окажется весьма затруднительным. Поэтому φ при $\alpha_3 = 0$ ищется в виде потенциала двойного слоя плотности μ. Обозначив правую часть (9) через F и учитывая что (1), (9) соответствуют внешней задаче Дирихле для потенциала φ, ищут μ из интегрального уравнения [7]

$$\mu\pi + \int\limits_{(S_k)} \mu \frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\left|\frac{1}{r}\right|\right) dS + \int\limits_{S_k} \mu dS = F. \tag{10}$$

Здесь r — расстояние от контрольной до произвольной точки S_k, n — нормаль к S_k в ней. Затем производятся преобразования (8): во-первых, используя непрерывность производной по n [7] от суммы $\varphi(\mu) + \partial\Psi/\partial n(\mu)$, где Ψ — потенциал простого слоя, выражают $\partial\varphi/\partial n$ через $\partial^2\Psi/\partial n^2$; во-вторых, используя гармоничность Ψ и опуская пропорциональные $\varkappa$ члены в $\partial\Psi/\partial T^*$, уравнения для определения h приводят к виду

$$U^* h + \int\limits_{l(x_i)}^{l(x)} \frac{h}{\tau^*} dl = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{l(x_0)}^{l(x_1)} \mu\left(\frac{1}{l - x_i} - \frac{1}{l - x}\right) dl; \quad i = 0; 1; \ x_1 = x_0 + L. \tag{11}$$

Сращивание двух решений этого уравнения производится также на миделе S_k.

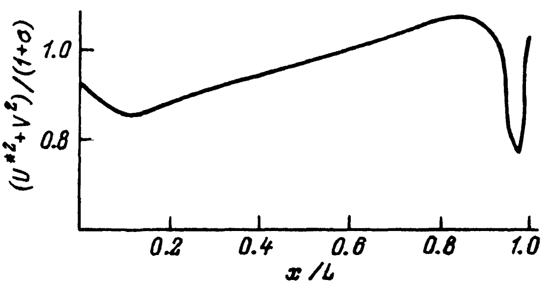

Рис. 5.

Итак, для каждого нового момента времени сначала h вычисляется по правилу $h = V\tau^*$, а потом форма S уточняется с помощью (7), (8) и (9)–(11) поочередно. Именно так получены приведенные на рис. 3 результаты для течения с периодическими и заметно сдвинутыми по фазе характеристиками и показанное на рис. 5 типичное распределение $\partial\Phi/\partial\tau$ вдоль S_k.

Несмотря на показанный выше некоторый прогресс в решении нестационарных нелинейных задач, в их теории остаются многочисленные проблемы. Для кавитационных течений, в частности, не ясно, следует ли в нестационарном случае из принципа Бриллюэна условие Бриллюэна–Вилля [1] для точек схода струй на телах с плавно изменяющейся кривизной поверхности. Далее, в ходе эволюции свободных границ в нестационарном потоке на них часто появляются вогнутые участки. Как следует из [8], этот эффект не связан с погрешностями приближенных вычислений: схожие аномалии получались в [8] и при аналитическом решении одной нестационарной задачи. В численном методе эти аномалии настолько затрудняют сходимость итераций, что зачастую не удается продолжить счет для столь больших промежутков времени, чтобы можно было сопоставить расчет и опыт, и, видимо, в местах потери выпуклости надо вводить такие же схемы замыкания, как и в хвосте каверн.

Кроме того, отсутствующее здесь сопоставление расчетов и опытов потребовало бы пересчета результатов наблюдений в гидродинамических трубах на неограниченный поток. В стационарных кавитационных течениях такой пересчет основан на точном или приближенном [5,9] решении задач типа (1)–(4) для труб или каналов неограниченной длины; но этот подход не удается скопировать в нестационарном случае, поскольку изменение объема каверны в заполненной несжимаемой жидкостью трубе индуцирует незатухающие по всей ее длине возмущения скорости, что приводит к нефизичному неограниченному росту потенциала вызванной скорости и давления с удалением от каверны.

Однако указанные трудности лишь затрагивают вопрос об адекватности математической теории частным экспериментом и не связаны с особенностями предлагаемого расчетного метода, который может быть рекомендован для использования в различных разделах физики.

Список литературы

[1] *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1961.

[2] *Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1979. С. 81–88.

[3] *Амромин Э.Л., Капорская Г.Н., Новгородцев А.Б.* и др. // Электричество. 1989. № 3. С. 40–46.

[4] *Амромин Э.Л.* // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 2. С. 176–179.

[5] *Иванов А.Н.* Гидродинамика развитых кавитационных течений. Л.: Судостроение, 1980.

[6] *Амромин Э.Л., Бушковский В.А.* // ПММ. 1985. № 6. С. 1032–1035.

[7] *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968.

[8] *Кузнецов А.В., Троепольская О.В.* // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1988. С. 153–170.

[9] *Карликов В.П., Хомяков А.Н., Шоломович.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 73–81.

Центральный научно-исследовательский
институт им. А.Н.Крылова
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
20 апреля 1992 г.
В окончательной редакции
4 ноября 1992 г.