Письма в ЖТФ, том 19, вып. 1 12 января 1993 г.

01; 03

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОСРЕДСТВОМ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

А.В. Порубов, А.М. Самсонов

Исследование деформаций свободных поверхностей слоев сильновязких жидкостей, находящихся в неоднородном поле температур, является, в частности, очень важным для разработки современных технологий получения изображений в инфракрасном диапазоне – эвапорографии и термотензографии [1, 2]. При этом установлено, что фактором, влияющим на возмущение свободной поверхности, является термокапиллярный эффект, обусловленный зависимостью коэффициента поверхностного натяжения α от температуры T [1]. Для большинства жидкостей справедлива формула $\alpha = \alpha_0(T_a) - \alpha(T - T_a)$ [3], где T_a – некоторая температура, принятая в качестве начала отсчета, а α – постоянная. Методика измерения этой постоянной пока недостаточно разработана [3].

В данной работе исследуется возможность определения α при помощи оценки параметров волн, возникающих на свободной поверхности слоя жидкости. Нелинейным волнам предпочтение отдается потому, что, возникая в результате взаимной компенсации нелинейности, дисперсии и диссипации, они могут распространяться на довольно большие расстояния без существенных искажений. Параметры нелинейных волн (амплитуда, фазовая скорость), как ниже будет показано, могут быть связаны с α при помощи алгебраических соотношений. Определенная трудность, однако, заключается в том, что условие прилипания на твердой нижней границе слоя приводит к быстрому затуханию волн [4], а для существования бегущей волны требуется наличие постоянного течения, например развитого течения Пуазейля [5]. Однако нижняя граница слоя может быть и не твердой, а свободной от касательных напряжений [6]. Такое граничное условие возникает на поверхности раздела жидких слоев, когда отношение величины динамического коэффициента вязкости нижней жидкости к коэффициенту вязкости верхней есть величина $\delta \ll 1$, например, на границе масла (парафинового, силиконового, касторового) или глицерина и слоя ртути. Экспериментально отсутствие напряжений на границе раздела было установлено, в частности, для пары силиконовое масло–ртуть [7]. Если толщина слоя нижней жидкости много меньше верхней, то границу раздела можно считать плоской [6]. Градиентом температуры поперек нижнего слоя можно пренебречь и считать поверхность раздела изотермической, если нижний слой находится на твердом теплопроводящем основании (например, на металле). В итоге термогидродинамическую задачу для верхнего слоя можно рассматривать отдельно.

Предположим, что через верхнюю деформируемую свободную границу $z=\eta(x,t)$ слоя жидкости толщиной H течет постоянный тепловой поток Q ($Q>0$ – нагрев снизу). Рассмотрим длинные волны на тонком слое, имеющие такие амплитуду A и длину L, что $\frac{A}{H}=\gamma\ll 1$, $\frac{H}{L}=\varepsilon\ll 1$, причем $\gamma=O(\varepsilon^2)$. Положим для простоты слой достаточно тонким, чтобы его плотность ρ считать постоянной. Подробно постановка и решение такой модельной задачи изложена в [8]. Отметим лишь, что при обезразмеривании в качестве масштаба для возмущения свободной поверхности η было выбрано A, а для фазовой скорости волны $V-\frac{\chi^2}{H}$, где χ – коэффициент температуропроводности. В результате асимптотического решения задачи с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ в [8] было выведено следующее уравнение для безразмерной функции возмущения свободной поверхности $\bar\eta$

$$\bar\eta_{tt}-a\bar\eta_{xx}+b\bar\eta_{xxt}-c(\bar\eta)^2_{xx}-d\bar\eta_{xxxx}=0, \qquad (1)$$

в котором коэффициенты определяются равенствами $a=Pr^2G-MaPr$, $b=\varepsilon Pr^{-1}\left(4+\frac{1}{3}Ma\right)$, $c=\varepsilon^2\left(\frac{3}{2}Pr^2G-MaPr\right)$, $d=\varepsilon^2\Big(Pr^2G\left(\frac{1}{3}-Bo^{-1}\right)-$ $-Ma\,Pr\left(\frac{5}{3}+\frac{2}{15}Pr^2G\right)+Ma^2Pr\left(\frac{1}{45}+\frac{2}{15}Pr\right)\Big)$ и зависят, в свою очередь, от характеристических чисел Прандтля $Pr=\frac{\nu}{\chi}$, Марангони $Ma=\frac{\alpha QH^2}{\rho\nu\chi\lambda}$, Галилея $G=\frac{gH^3}{\nu^2}$, Бонда $Bo=\frac{\rho gH^2}{\alpha_0}$ (ν, λ – соответственно коэффициенты вязкости и теплопроводности, g – ускорение свободного падения). Отметим, что при отбрасывании слагаемых порядка ε^3, сделанном при выводе уравнения (1), условие отсутствия касательных напряжений на нижней границе слоя соответствует условию непрерывности напряжений на границе раздела исходной двуслойной системы при ε, большем или равном $\sqrt[3]{\delta}$ по порядку величины.

Если число Марангони $Ma=-12$, то $b=0$, и уравнение (1) есть вполне интегрируемое уравнение Буссинеска [9], которое имеет решение, в частности, в виде уединенной волны. Нами было показано [10, 11], что при $b\neq 0$ уравнение (1) имеет формальное точное решение в виде кинка:

$$\bar\eta=-\frac{6b^2\bar V^2}{25dc}\,\frac{exp(2k(x-\bar Vt))}{(1+exp(k(x-\bar Vt)))^2}+D, \qquad (2)$$

где $k=-\frac{b\bar{V}}{5d}$, а постоянная D и безразмерная фазовая скорость волны $\bar{V}$ связаны соотношением

$$(25d+6b^2)\bar{V}^2=(a+2cD)25d. \qquad (3)$$

Для того, чтобы это решение уравнения (1) было пригодно для асимптотического решения исходной задачи, дополнительно нужно потребовать, чтобы $\bar{\eta}=O(1)$. Из (2), (3) следует, что для этого необходимы ограничения на диапазон значений чисел Марангони: (I) Ma = 12 $+\varepsilon Ma_1$, где Ma_1 – произвольное число порядка единицы, или (II) $Ma=PrG(1+\varepsilon^2 D)$ при $\bar{V}=O(\varepsilon)$ и $d=\frac{6}{25}b^2$. Случай (I) реализуется при нагреве сверху, а случай (II) – при нагреве снизу. При других значениях числа Марангони квазистационарного возмущения свободной поверхности слоя, по-видимому, не существует [12]. Строго говоря, для существования уединенных волн и кинков требуется начальное условие специального вида. Однако можно аналитически указать довольно широкий класс начальных импульсов произвольной формы, которые могут распадаться на последовательность уединенных волн [9] или на кинки [13].

Исходя из полученных результатов, можно предположить следующую методику определения α. При заданном начальном возмущении поверхности длиной L и с амплитудой A следует получить либо исследовательность уединенных волн, либо волну в виде кинка, изменяя величину теплового потока Q. Если удалось первое, то величина α определяется из формулы $\alpha=-\frac{12\rho\nu\chi\lambda}{QH^2}$. Если при нагреве сверху получен кинк, то $\alpha=\frac{\rho\nu\chi\lambda}{QH^2}\left(-12+\frac{H}{L}Ma_1\right)$. Отметим, что поскольку при выводе уравнения (1) были отброшены слагаемые порядка ε^3, то Ma_1 может входить только в выражения для коэффициентов a и b. Переходя к размерным величинам, выразим, следуя (2), постоянную через измеренные скорость V и амплитуду B волны в виде $D=\frac{6b^2V^2H^2}{25d\chi^2c}+\frac{B}{A}$. Тогда соотношение (3) оказывается алгебраическим квадратным уравнением для Ma_1. Условие $d=-\frac{6}{25}b^2$, необходимое для существования кинка при нагреве снизу, представляет собой квадратное уравнение для толщины слоя H, величину которой следует найти до эксперимента. Тогда, измерив амплитуду B и скорость V возникшего при данных H и Q кинка, постоянную α вычисляем из формулы $\alpha=\frac{\rho\lambda gH}{Q}\left(1+\frac{2V^2}{gH}+\frac{B}{H}\right)$.

Рассмотрим в качестве примера определение α для силиконового масла, тонкий слой которого расположен на слое ртути. Отношение коэффициентов вязкостей этих жидкостей показывает, что построенная модель становится пригодной для описания длинноволновых возмущений свободной поверхности силиконового масла при

$\varepsilon \geqslant 0.3$. Выберем толщину слоя масла H равной 1 мм, а параметры начального импульса равными $A = 0.1$ мм, $L = 3.13$ мм ($\varepsilon = 0.32$). Тогда для возбуждения уединенной волны необходим тепловой поток сверху величиной $Q = -1.33 \cdot 10^2$ Дж. При этом перепад температур поперек слоя будет величиной порядка тысячных долей градуса, и, следовательно, эксперимент возможен при естественных условиях. Возникновение кинка при нагреве сверху сопровождается перепадом температур того же порядка. Отметим, однако, что при нагреве снизу значение H, требуемое для существования кинка, оказывается слишком большим, чтобы можно было пренебречь изменением плотности поперек слоя. Таким образом, для уточнения при помощи предложенной модели значения α, найденного ранее для силиконового масла, следует возбуждать нелинейные поверхностные волны при нагреве сверху.

Список литературы

[1] Безуглый Б.А., Майоров В.А. // Журн. научн. прикл. фото и кинематографии. 1981. Т. 26. В. 6. С. 422–429.

[2] Безуглый Б.А., Майоров В.А. // Журн. науч. прикл. фото и кинематографии. 1982. Т. 27. В. 1. С. 69–71.

[3] Адамсон А. Физическая химия поверхностей. М.: Мир, 1979. 568 с.

[4] Miles J. // Ann. Rev. Fluid. Mech. 1980. V. 12. P. 11–45.

[5] Johnson R.S. // Phys. Fluids. 1972. V. 15. N 10. P. 1693–1697.

[6] Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947 928 с.

[7] Goldstein R.J., Graham D.J. // Phys. Fluids. 1969. V. 12. P. 1133–37.

[8] Порубов А.В. Препринт № 1502 ФТИ им. А.Ф. Иоффе АН СССР, 1991. 28 с.

[9] Захаров В.Е. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 219–225.

[10] Samsonov A.M. In: Nonlinear Waves and Dissipative Effects, ed. by D. Fusco, A. Jeffrey. Longman. 1991, p. 123–132.

[11] Porubov A.V. // In: Notes on Numerical Fluid Mechanics. 1992. (to be published).

[12] Benguria R.D., Depassier M.C. // Phys. Fluids A. 1989. V. 1. P. 1123–30.

[13] Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, С.-Петербург

Поступило в Редакцию 11 декабря 1992 г.