Письма в ЖТФ, том 19, вып. 5 12 марта 1993 г.

01; 04

АНАЛОГ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С ЭФФЕКТОМ ХОЛЛА

Л.М. Алексеева

В присутствии эффекта Холла на фоне потока плазмы, направленного поперек магнитного поля $\vec{H}$, могут распространяться волны акустической природы. Они были выявлены в работах [1–5] для фонового потока, в начальный момент соответствующего по своей структуре стационарному изомагнитному изобернуллиевому течению идеально проводящей бесхолловской плазмы, при определенных соотношениях констант, характеризующих поток.

Эти волны схожи по свойствам с типичными мелкомасштабными неоднородностями, которые известны по данным численного моделирования [6] потоков плазмы с эффектом Холла. Возможно, с такими волнами связаны характерные процессы в природной плазме магнитосферы Земли [7–8]. Так что существование этих волн, по-видимому, имеет довольно общий характер.

Настоящее исследование обобщает результаты работ [1–5] на широкий класс фоновых потоков и выявляет обширную область значений констант (параметра обмена ξ, магнитного числа Рейнольдса ν и отношения $\beta (\ll 1)$ газового давления к магнитному), при которых возмущения распространяются с газодинамической скоростью звука c. Магнитное поле влияет на этот процесс лишь в том отношении, что создает в плазме эффективную гравитацию, причем ускорение „силы тяжести" пропорционально отношению (ξ/ν). Возмущения такой среды аналогичны акустико-гравитационным волнам в земной атмосфере [9, 10]. Распространяясь „вверх" (в данном случае против направления электрического поля), они сильно увеличивают амплитуду.

В декартовой системе координат x, y, z рассмотрим не зависящий от z поток плазмы, текущий вдоль оси x:

$$\vec{v}=(v_x, v_y, 0), \quad |v_y| \ll |v_x|, \quad \vec{H}=(0,0,H), \quad \vec{E}=(E_x, E_y, 0).$$

При этом

$$j=H'_y \vec{e}_x - H'_x \vec{e}_y = -[\vec{e}_z \vec{H}]. \tag{1}$$

Будем считать, что плазма изотермична и описывается магнитогазодинамической системой уравнений с учетом эффекта Холла (ХМГД) [6]: Эйлера (где в силу (1) фигурирует $\nabla(p+H^2/2)$), непрерывности, состояния $p=c^2\rho$ ($c=const$ в силу изотермичности) и индукции

$$\partial\vec{H}/\partial t = \nu\Delta\vec{H} + \mathrm{rot}[\vec{v}\vec{H}] + \xi[\nabla(\rho^{-1})\nabla(H^2/2)]. \qquad (2)$$

Ниже использованы по существу те же единицы, что и в работах [1–6]. В качестве единицы длины берется некоторый подходящим образом выбранный характерный масштаб по x; за единицы плотности и магнитного поля – значения этих величин в некоторой верхней по потоку точке (x_*, y_*) в рассматриваемой области в момент времени t_*; альвеновская скорость в этой точке принимается за единицу скорости; отношение единицы длины к единице скорости имеет порядок пролетного времени и служит единицей времени. Параметры ξ, ν, β – суть константы и выражаются через значения величин в точке (x_*, y_*) (отметим, что $\beta = 2c^2$).

Решение ХМГД системы обозначим как $\Pi(x, y, z, t) = (\rho, \vec{v}, H)$. При $c \ll 1$ (т.е. $\beta \ll 1$) будем искать его в виде

$$\Pi(x,y,z,t) = N^\circ(x, y/\delta) + \tilde{\Pi}(x, y/\delta, \gamma y, \gamma ct). \qquad (3)$$

Здесь N° – некоторый известный (фоновый) стационарный поток с характерным поперечным масштабом δ (компоненты скорости в нем в таком случае связаны соотношением $v_y^\circ/v_x^\circ \sim \delta$); $\tilde{\Pi}$ – нестационарное отклонение от него; гамма-фактор [11]

$$\gamma \equiv \gamma(N^\circ) = -\Gamma(H^\circ/\rho^\circ)^2(H^\circ)'_x, \quad \Gamma \equiv \xi\nu^{-1}c^{-2} \qquad (4)$$

характеризует неоднородность распределения величин $\tilde{\Pi}$ поперек потока. В выбранных единицах $(\rho^\circ)'_x \sim (H^\circ)'_x \sim (v^\circ)'_x \sim \rho^\circ \sim H^\circ \sim v^\circ \sim 1$. Будем считать, что для любой (i-й) компоненты N° $\partial N_i^\circ/\partial y \leq 1$.

Положим

$$\xi \gg c \gg \delta, \quad (\xi/c)\cdot(\delta/c) \gg \nu. \qquad (5)$$

В таком случае $\Gamma\delta \gg 1$, $\Gamma \gg 1$ и все операторы, действующие на $\tilde{\Pi}$, меняют порядки величин согласно соотношениям

$$\partial/\partial x \sim \Gamma\delta, \quad \partial/\partial y \sim \Gamma, \quad \partial/\partial t \sim \Gamma c, \quad 0 \leq t \leq \delta/c.$$

Сами же величины поля $\tilde{\Pi}$ будем считать малыми, положив

$$\nu^{-1}\Gamma^{-2}F(N^\circ) \ll |\tilde{H}| \ll \min(1/\Gamma\delta, c^2),$$
$$F(N^\circ) \equiv \left| \nu\Delta\vec{H}^\circ + \mathrm{rot}[\vec{v}^\circ\vec{H}^\circ] + \xi[\nabla(1/\rho^\circ)\nabla(H^\circ)^2/2] \right|. \qquad (6)$$

Для определенности будем считать далее, что N° выбрано удовлетворяющим системе ХМГД при $\partial/\partial t = \xi = \nu = 0$. Если N° является изомагнитным изобернуллиевым потоком, то производные $\partial\rho^\circ/\partial y$ и $\partial H^\circ/\partial y$ малы (их порядок δ – см., например, [3]). Тогда, если выполнены условия (5), то автоматически

$$\gamma^{-1}\Gamma^{-2}F(N^0) \ll min\,(1/\Gamma\delta,\ c^2) \tag{7}$$

и допустимо вводить требование (6). Вообще же для рассматриваемого класса потоков N^0 с $\partial|N_i^0|/\partial y \lesssim 1$ (7) не является следствием (5) и должно рассматриваться наряду с (5) как еще одно условие на параметры $\xi,\ \nu,\ c,\ \delta$.

Подстановка (3) в x-компоненту уравнения Эйлера показывает, что если нелинейные члены малы (так оно и окажется), то

$$\tilde{v}_x \sim max\{|\tilde{\rho}|/(\gamma c),\ |\tilde{v}_y|/(\gamma c),\ c\delta|\tilde{\rho}|,\ \delta|\tilde{H}|/c\}.$$

Используя это соотношение, можно убедиться, что y-компонента уравнения Эйлера сводится к виду

$$\partial\tilde{v}_y/\partial t = -\left[c^2\tilde{\rho}_y' + H^0\tilde{H}_y'\right]/\rho^0, \tag{8}$$

а уравнение индукции, проинтегрированное по y, имеет вид

$$\tilde{H}_y' = -(\xi/\nu)(H^0)_x'(\rho^0)^{-2}\tilde{\rho} \tag{9}$$

(мы считаем поле Π отличным от нуля лишь в некоторой ограниченной области, поэтому мы принимаем константу интегрирования равной нулю). Теперь непосредственными подстановками можно убедиться в том, что $|\tilde{\rho}| \ll 1,\ |\tilde{v}| \ll 1$ и нелинейные члены уравнения Эйлера действительно малы.

Подстановка (9) в (8) замыкает газодинамическую часть исходной ХМГД системы и показывает, что в рассматриваемой ситуации роль электромагнитных процессов сводится лишь к созданию силы в уравнении (8), пропорциональной $\tilde{\rho}$. Другими словами, возмущения $\tilde{\Pi}$ „чувствуют" эффективную силу тяжести с ускорением $g = -(\xi/\nu)(H^0/\rho^0)^2(H^0)_x'$. Остается решить полученную газодинамическую систему. Уравнение непрерывности аналогичной процедурой приводится к виду $(\tilde{\rho})_t' = -(\tilde{v}_y)_y'/\rho^0$ и дает после исключения $\tilde{v}_y$ с помощью (9), (8)

$$c^{-2}\tilde{\rho}_{tt}'' = \tilde{\rho}_{yy}'' + \gamma(x,y)\tilde{\rho}_y'. \tag{10}$$

Такое же уравнение ([9], с. 679) описывает акустико-гравитационные волны в нейтральной атмосфере [9, 10], распространяющиеся по вертикали. Направлению вверх в атмосфере соответствует отрицательное направление оси y (т.е. против y-компоненты поля $\vec{E}$). Величина γ^{-1} играет роль локальной высоты однородной атмосферы. Аналогичные волны, описываемые уравнением (10), будем называть квазиакустикогравитационными (КАГ). В случае γ, постоянного по y, дисперсионное уравнение КАГ волн имеет вид $k^2c^2 = \omega^2 - \omega_a^2$, где $\omega_a = c\gamma/2$ – нижняя граница частот бегущих волн. Фазовая и групповая скорости КАГ волн равны соответственно $v_p = \omega/k = c/Q$, $v_g = cQ$, $Q = \sqrt{1-(\omega_a/\omega)^2}$, а возмущение плотности $\tilde{\rho}$ изменяется по закону

$$\tilde{\rho} = \chi_A \exp(-\gamma y/2)\exp[i(\omega t - ky)]$$

(χ_A – амплитудный множитель). Если волна распространяется „вверх" – в сторону анода, то, проходя характерный поперечный масштаб потока δ, она увеличивает амплитуду в $\exp(\gamma\delta/2)$ раз, причем, как мы знаем, $\gamma\delta \gg 1$.

В случае переменного $\gamma(y)$ волна с частотой ω должна отражаться от области, где $\omega \approx \omega_a$. Это позволяет сделать техническую рекомендацию: чтобы КАГ волны от источника шумов не разрушали поток, следует выбрать структуру потока так, что область отражения была достаточно близка к источнику в направлении „вверх" от него (заметим, что $\omega_a \propto \gamma(y)$).

Для переменного $\gamma(y)$ вдали от областей отражения решение уравнения (10) может быть найдено методом ВКБ и имеет вид

$$\tilde{\rho} = \{A\exp[i\omega(t-S)] + B\exp[i\omega(t+S)]\}\exp\int\gamma d(-y)/2,$$

$$S = c^{-1}\int Q\, d(-y), \quad A = const, \quad B = cost.$$

В заключение обратим внимание на то, что достаточным условием справедливости проведенного анализа и, как следствие, возможности распространения (с раскачкой) КАГ волн являются неравенства (5), (7). В случае изобернуллиева изомагнитного потока N^o (практически однородного по сечению) при малых ν это условие сводится к $\xi/c \gg 1$, при бóльшем ν – к $\xi \gg c^2\nu/\delta$. Граница этих режимов соответствует $\nu \equiv \nu_\delta = \delta/c$. Отсюда видно, что сравнительно узкие потоки N^o оказываются более надежными по отношению к „порче" КАГ волнами, чем широкие.

Список литературы

[1] Алексеева Л.М. Течения плазмы при наличии эффекта Холла. Препринт № 88-38/59. М.: НИИЯФ МГУ, 1988. 42 с.

[2] Алексеева Л.М. // ДАН СССР. 1990. Т. 310. № 3. С. 567–571.

[3] Алексеева Л.М. // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 2. С. 64–73.

[4] Алексеева Л.М. // ЖТФ. 1992. Т. 62. В. 2. С. 74–83.

[5] Алексеева Л.М. // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 13, С. 6–10.

[6] Брушлинский К.В., Морозов А.И. // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. В. 8. М.: Атомиздат, 1974. С. 88–163.

[7] А л е к с е е в а Л.М. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 4. С. 826-828.
[8] А л е к с е е в а Л.М. // Итоги науки и техники. Физика плазмы / Под ред. В.Д. Шафранова. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1983. С. 113-193.
[9] Л а м б Г. Гидродинамика. М. – Л.: ОГИЗ, 1947. 928 с.
[10] H i n e s C.O. // Con. J. Phys. 1960. V. 38. P. 1441-1481.
[11] А л е к с е е в а Л.М. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 10. С. 1-4.

Поступило в Редакцию
5 февраля 1993 г.