

01

© 1993

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ
 ДВУХ СИММЕТРИЧНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
 (НЕАВТОНОМНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР ДУФФИНГА
 И АВТОГЕНЕРАТОР С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ)

В.В. Афанасьева

Известно, что в неавтономных нелинейных осцилляторах, описываемых уравнением типа

$$\ddot{x} + k\dot{x} + f(x) = B \cos \omega t \quad (1)$$

и обладающих симметрией вида

$$S: (x, \dot{x}, t) \longrightarrow (-x, -\dot{x}, t + \pi/\omega), \quad (2)$$

бифуркации удвоения периода предшествует бифуркация разрушения симметрии [1]. В результате такой бифуркации симметричный цикл Γ_S , существовавший в фазовом пространстве системы (1), становится седловым, а в его окрестности рождается пара несимметричных циклов $\{\Gamma_{\alpha}^{1,2}\}$, сосуществующих в одной и той же области параметров. При этом возникает вопрос, как при переходе к хаосу симметричного осциллятора (1) ведет себя каждый из пары антисимметричных циклов $\{\Gamma_{\alpha}^{1,2}\}$: взаимодействуют ли они при хаотизации движения или ведут себя независимо?

Для ответа на этот вопрос проведено численное моделирование динамики нелинейного симметричного осциллятора ДUFFинга

$$\ddot{x} + k\dot{x} - x + x^3 = B \cos \omega t \quad (3)$$

с отрицательной линейной жесткостью (k – параметр диссипации, B, ω – амплитуда и частота внешнего воздействия). Вычислительный эксперимент включал расчеты реализаций и спектров процессов, мультипликаторов периодических движений, ляпуновских показателей и ляпуновской размерности притягивающих множеств, строились фазовые портреты и сечения Пуанкаре. Основные результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 1, а в виде бифуркационной диаграммы на плоскости параметров (k, B) . На основе этих результатов можно предложить следующую картину развития хаотической динамики осциллятора (1). С увеличением амплитуды внешнего воздействия в фазовом пространстве системы (1) рождается симметричный предельный цикл (ПЦ) Γ_S (линия 1 на рис. 1, а). На линии 2 цикл становится седловым и в его окрестности рождается пара антисимметричных циклов

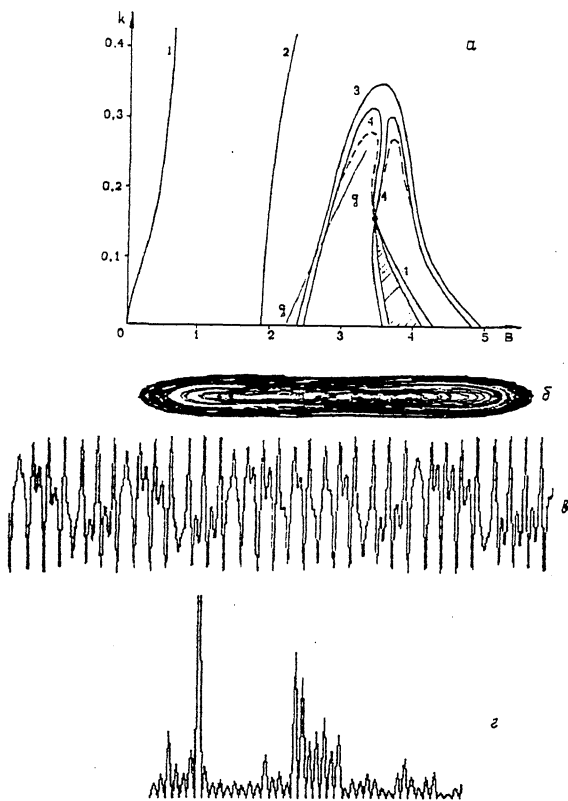


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма (а), фазовый портрет $\{x, \dot{x}\}$ (б), временная реализация $x(t)$ (в) и спектр (г) хаотических колебаний в режиме симметричного нефейгенбаумовского СА симметричного неавтономного осциллятора Дуффинга $\ddot{x} + k\dot{x} - x^3 = B \cos \omega t$ при $k = 0.14$, $B = 3.05$.

$\{\Gamma_2^{1,2}\}$ того же периода. Начиная с этой линии, бифуркационная диаграмма симметричного осциллятора становится двулистной. Характер перехода к хаосу каждого из этих ПЦ зависит от величины параметра диссипации. При $0.14 < k < 0.3$ каждый из возникающих антисимметричных ПЦ совершает последовательные удвоения, в результате которых в фазовом пространстве возникает пара несимметричных фейгенбаумовских странных аттракторов (СА). Линия, на которой мультипликатор $\mu = -1$, обозначена на рис. 1, а цифрой 3, для двухтактного ПЦ – цифрой 4. Пунктиром показана линия рождения фейгенбаумовского СА. Внутри области стохастичности происходит глобальная бифуркация, меняющая структуру фазового пространства (линия ρ), в результате чего два несимметричных флейгенбаумовских СА сливаются, образуя единый „большой”

СА, имеющий сложную структуру. С уменьшением k число наблюдаемых удвоений уменьшается, и уже при $k < 0.1$ больше одного удвоения наблюдать не удается. В этой области параметров еще до первого удвоения или после него появляется метастабильное хаотическое множество, и выходу фазовой точки на ПЦ предшествует длительный переходной хаотический процесс. После того как одноктактный или двухтактный цикл теряют устойчивость ($\mu = -1$), в фазовом пространстве рождается СА, имеющий нефейгенбаумовскую структуру и по топологии повторяющий СА, возникший в результате слияния двух фейгенбаумовских СА. Реализация такого хаотического процесса содержит короткие участки, соответствующие движению по двум антисимметричным седловым циклам и „симметричные“ хаотические всплески; спектр имеет низкочастотный выброс (рис. 1, б-г). Бифуркационная диаграмма при этом становится однолистной, так как в системе существует единое хаотическое движение, объединяющее пару или несколько пар седловых несимметричных ПЦ и хаотическое множество, бывшее до этого метастабильным. Сказанное позволяет предположить, что возможен следующий механизм рождения такого СА. С ростом амплитуды воздействия (B) устойчивое и неустойчивое многообразия симметричного седлового ПЦ Γ_s пересекаются, образуя гомоклиническую структуру. В зависимости от того, произошла ли эта бифуркация до первого удвоения, после нескольких удвоений или после рождения фейгенбаумовских СА, она может приводить либо к обрыванию каскада бифуркаций удвоения после одного или нескольких удвоений и рождению нефейгенбаумовского СА, либо к слиянию фейгенбаумовских СА. Таким образом, антисимметричные движения, родившиеся после бифуркации разрушения симметрии, при переходе к хаосу начинают взаимодействовать, образуя симметричные хаотические движения. К сожалению, строгого доказательства реализации указанного механизма нет.

Аналогичный переход к хаосу обнаружен нами и в вычислительных экспериментах с моделью симметричного генератора с запаздывающей обратной связью (ЗОС). Можно показать, что система с ЗОС, описываемая уравнением

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) = F[x(t - \tau)], \quad (4)$$

где $F(x)$ – нелинейная нечетная функция, будет обладать симметрией вида

$$S: (x, \dot{x}, t) \longrightarrow (2x_{cp} - x, -\dot{x}, t + \tau). \quad (5)$$

Последнее означает, что ПЦ, существующие в фазовом пространстве этой системы, будут симметричными относительно собственных центров. Симметрия такой системы перед каскадом бифуркаций удвоения должна разрушаться, а возникшие несимметричные движения в этом случае могут взаимодействовать между собой при хаотизации. Нами проведено численное моделирование динами-

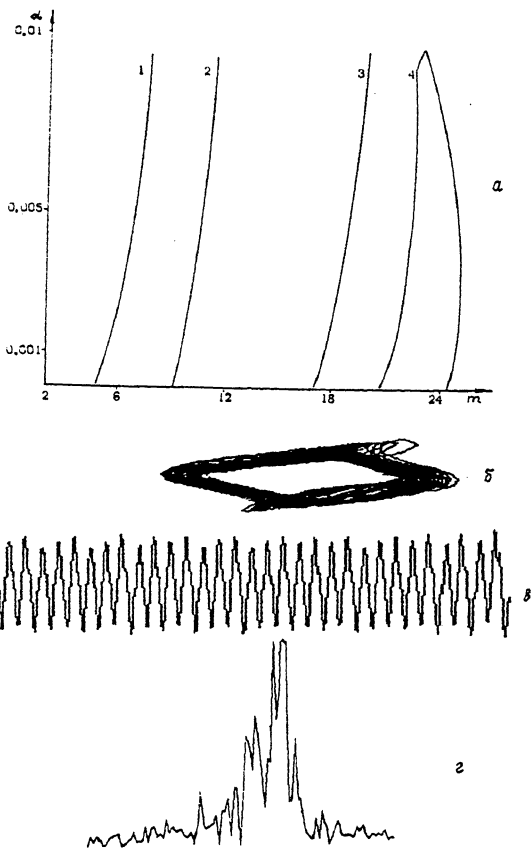


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма (а), фазовый портрет $\{x(t), x(t-\tau)\}$ (б), реализация $x(t)$ (в) и спектр хаотических колебаний (г) симметричного генератора с запаздывающей обратной связью $\dot{x} + \alpha x = mJ_1[x(t-\tau)]$ при $\alpha = 0.001$; $m = 23.0$.

ки клистронного генератора с запаздывающей обратной связью, в простейшем случае описываемого уравнением (4) с нелинейной функцией

$$F(x) = mJ_1[x(t-\tau)].$$

Результаты численного анализа показали следующее. С ростом m в фазовом пространстве системы появляется симметричный ПЦ Γ_s (линия 1 на рис. 2, а). На линии 2 происходит бифуркация разрушения симметрии, при этом рождается пара циклов $\{\Gamma_a^{1,2}\}$. С некоторого значения m в фазовом пространстве появляется метастабильное хаотическое множество (линия 3 рис. 2, а). Даль-

нейшее увеличение m приводит к тому, что движение становится хаотическим (рис. 2, б-г), но бифуркаций удвоения периода не наблюдается. Реализация хаотического процесса по виду напоминает реализации наблюдаемого ранее переходного процесса. Возникающий СА симметричен (область его существования показана на рис. 2, а линией 4). Такой переход к хаосу аналогичен переходу, наблюдаемому в симметричном осцилляторе Дuffинга. Можно предположить, что и здесь объединяются пара несимметричных ПЦ и метастабильное хаотическое множество, возникающее в результате пересечения многообразий симметричного седлового ПЦ. Об этом свидетельствует и симметрия СА, возникающего из несимметричного предельного цикла.

Таким образом, в симметричном неавтономном осцилляторе Дuffинга и симметричном генераторе с запаздывающей обратной связью при переходе к хаосу симметричные ПЦ разрушаются, а возникающие несимметричные парные ПЦ взаимодействуют друг с другом, совместно участвуя в рождении СА. Каскад бифуркаций удвоения при этом может не развиваться.

Представляется, что полученные результаты могут оказаться общими для симметричных систем с постоянной отрицательной дивергенцией, хотя строгие математические доказательства этого сейчас отсутствуют.

Автор благодарит Д.И. Трубецкова за внимание к работе и плодотворные обсуждения.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] S w i f t J., W i e s e n f i e l d K. // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. N 9. P. 705-711.

Поступило в Редакцию
25 февраля 1993 г.