Письма в ЖТФ, том 19, вып. 6 26 марта 1993 г.
01; 03

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОЙ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ РАЗЛИЧНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

С.О. Ширяева, О.А. Григорьев,
А.И. Григорьев

В самых различных физических явлениях и технических устройствах приходится встречаться с гидродинамическими неустойчивостями. Так, раскачка ветром волн на гладкой поверхности воды связана с неустойчивостью Гельмгольца или неустойчивостью в поле силы тяжести границы раздела двух несмешивающихся жидкостей, одна из которых совершает поступательное движение параллельно границе раздела [1, 2]. В современных установках для инерционного термоядерного синтеза приходится сталкиваться с неустойчивостью Тейлора, неустойчивостью в поле силы тяжести границы раздела тяжелой жидкости над легкой [1, 3]. В электрогидродинамических эмиттерах ионов неустойчивость заряженной пленки жидкого металла на игле эмиттера (неустойчивость Тонкса–Френкеля) приводит к появлению в ионном пучке паразитных капель жидкого металла [4–6]. Каждая из этих неустойчивостей исследовалась независимо от других в связи с возможностями практической реализации. И, тем не менее, легко видеть, что все эти три неустойчивости могут быть получены как частные случаи при анализе более общей задачи об устойчивости тангенциального разрыва двух несмешивающихся жидкостей разной плотности, ρ_1 и ρ_2, каждая из которых заполняет полубесконечное пространство, причем, верхняя жидкость движется со скоростью $\vec{U}$ вдоль оси X, а на границе раздела имеется электрический заряд с постоянной поверхностной плотностью σ. При решении такой задачи появляется возможность исследования взаимовлияния гравитационных, электрических и гидродинамических сил.

Нижеследующее рассмотрение проведем на простейшей модели идеальных несжимаемых жидкостей. Эволюция капиллярных волн в вышеописанной системе может быть определена как решение задачи для потенциалов скоростей волнового движения в верхней ψ_1 и нижней ψ_2 жидкостях в декартовой системе координат, плоскость XOY которой совпадает с невозмущенной границей раздела, а ось OZ направлена вниз, в направлении действия силы тяжести [1, 4]:

$$\Delta\psi_i = 0; \qquad i = 1, 2 \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$z \to -\infty \qquad \psi_1 \to 0 \tag{2}$$

$$z \to \infty \qquad \psi_2 \to 0 \tag{3}$$

$$z = \xi(x;t): \qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \approx U\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t} \tag{5}$$

$$\rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho_1 g\xi + \frac{1}{2}\rho_1 (\nabla\psi_1)^2 = \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \rho_2 g\xi + P_\sigma - \alpha\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где $\xi(x,t)$ – возмущение границы раздела, связанное с капиллярным волновым движением, которое будем считать независящим от координаты y; $\vec{U}$ – постоянная скорость движения верхней жидкости относительно нижней, направление которой определит ориентацию оси OX; α – коэффициент поверхностного натяжения границы раздела; $P_\sigma = 4\pi\sigma^2 k\xi$ – электростатическое давление на границу раздела [4], связанное с возмущением поверхности $z = \xi$; k – волновое число.

Решение задачи (1)–(6) естественно искать в виде бегущей волны [1, 4]:

$$\psi_1 = Ux + Ae^{kz}\cos(kx-\omega t),$$

$$\psi_2 = Be^{-kz}\cos(kx-\omega t), \qquad \xi(x,t) = C\sin(kx-\omega t), \tag{7}$$

где ω – частота капиллярной волны.

Подставим (7) в граничные условия (4)–(6), взятые на невозмущенной поверхности $z = 0$, как это принято в теории волн бесконечно малой амплитуды [1], и в линейном по малым амплитудам A, B, C приближении получим систему однородных алгебраических уравнений для определения коэффициентов A, B и C. Из условия разрешимости такой системы легко найти десперсионное уравнение для капиллярных волн в рассматриваемой системе:

$$\omega^2\frac{1}{k}(\rho_1+\rho_2) + 2\omega\rho_1 U + \left[k^2\alpha - k(\rho_1 U^2 + 4\pi\sigma^2) + g(\rho_2-\rho_1)\right] = 0 \tag{8}$$

или в безразмерном виде:

$$z(1+\eta) + 2z\gamma + \left[\zeta - \zeta(\gamma + W) + (\eta - 1)\right] = 0, \tag{9}$$

где

$$z^2 \equiv \omega^2 \frac{a}{g}, \quad \zeta \equiv ka, \quad a^2 \equiv \frac{\alpha}{\rho_1 g}, \quad W \equiv 4\pi\sigma^2 a\alpha^{-1},$$

$$\eta = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \gamma = U\left(\frac{\rho_1}{\alpha g}\right)^{1/4}. \tag{9}$$

В (8)-(9) a - капиллярная постоянная для верхней жидкости; W - параметр Тейлора, характеризующий устойчивость заряженной поверхности жидкости (определяющий неустойчивость Тонкса-Френкеля [4], которая реализуется при $W>2$); γ - параметр, характеризующий неустойчивость Гельмгольца; ζ - безразмерное волновое число.

Рассмотрим возможные варианты проявления неустойчивости в осуждаемой системе.

1. Пусть $\sigma \neq 0$, $U \neq 0$ ($W \neq 0$, $\gamma \neq 0$); $\rho_1 < \rho_2$. Тогда из требования вещественности частоты для любых значений волновых чисел несложно получить из (9) критическое минимальное значение параметра $\gamma = \gamma_*$ (скорости верхней жидкости) $U = U_*$, при которой исчезают устойчивые состояния системы [1]:

$$\gamma_*^2 = (1 + \eta^{-1}) \left[2 \cdot (\eta - 1)^{1/2} - W\right]. \tag{10}$$

Несложно видеть, что с увеличением поверхностной плотности заряда на границе раздела критическая для реализации неустойчивости заряженного тангенциального разрыва величина скорости снижается.

При фиксированных значениях U и σ (γ и W), когда $U > U_*$ ($\gamma > \gamma_*$) существует область значений волновых чисел (в которой свободный член дисперсионного уравнения отрицателен), соответствующая неустойчивым состояниям. Чтобы найти волновое число наиболее неустойчивой моды, приравняем нулю производную по k от свободного члена дисперсионного уравнения. В безразмерной форме волновое число ζ_0 моды с максимальным значением инкремента неустойчивости имеет вид:

$$\zeta_0 = \frac{1}{2}(\gamma + W).$$

Несложно видеть, что с увеличением U и σ (γ и W) величина волнового числа наиболее неустойчивой моды растет.

При $\sigma = 0$ ($W = 0$) соотношение (10) сводится к известному выражению, определяющему критическое условие реализации неустойчивости Гельмгольца на незаряженной поверхности [1].

При $U = 0$ и $\rho_2 > \rho_1$ (10) сводится к известному выражению для критического условия реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля [4] (если капиллярную постоянную, входящую в W переопределить для нижней жидкости):

$$W > W_* = 2.$$

При $W > 2\cdot(\eta-1)^{1/2}$, а также при $\rho_1 > \rho_2$ (при $\eta < 1$) граница раздела неустойчива изначально, потому что в этих случаях реализуются неустойчивости Тонкса–Френкеля и Тейлора.

2. Пусть $\rho_1 > \rho_2$, $U = 0$, $\sigma = 0$ ($\gamma = 0$; $W = 0$). В этом случае последнее слагаемое свободного члена дисперсионного уравнения становится отрицательным, и при любых значениях U и σ существует область значений волновых чисел, в которой граница раздела является неустойчивой по отношению к случайным флуктуациям амплитуды капиллярных волн. При произвольных U и σ (γ и W) положение правой границы области неустойчивости k_* (в безразмерном виде ζ_*) можно найти, приравнивая нулю свободный коэффициент дисперсионного уравнения, разрешая получившееся квадратное по k (по ζ) уравнение, и беря положительный корень:

$$\zeta_* = \frac{1}{2}\left\{\frac{\eta}{1+\eta}\gamma^2 + W + \sqrt{\left[\frac{\eta}{1+\eta}\gamma^2 + W\right]^2 + 4\cdot(1-\eta)}\right\}. \qquad (11)$$

Левая граница области неустойчивости есть $k = 0$ ($\zeta = 0$). Несложно видеть, что наличие движения верхней жидкости, так же как и наличие заряда на границе раздела, приводит к увеличению ζ_*, т.е. область значений волновых чисел, в которой возможна неустойчивость, расширяется с увеличением U и σ (γ и W).

При $U = 0$ и $\sigma = 0$ из (11) получится известный результат для минимального значения волнового числа, ограничивающего область значений k (в безразмерном виде ζ), в которой возможна реализация неустойчивости лора [1]: $\zeta_* = \sqrt{1-\eta}$.

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 733 с.

[2] Власов В.П., Жданов С.К., Трубников Б.А. // Изв. АН СССР. // МЖГ. 1991. № 3. С. 10–16.

[3] Book D.L. // Encyclopedia of Fluid Mechanics. V. 1 Flow Phenomena and Mesurement. Huston, London, Paris, Tokyo: Gulf Publishing Company. 1986. P. 213–236.

[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехтеоризддат. 1957. 532 с.

[5] Григорьев А.И., Земсков А.А., Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. № 18. С. 1637-1640.

[6] Wagner A., Uenkatesan Y., Petroff P.M., Barr D. // J. Vac. Sci. Technol. 1981. V. 19. N 4. P. 1186-1189.

Поступило в Редакцию
1 марта 1993 г.