Письма в ЖТФ, том 19, вып. 8 26 апреля 1993 г.

01; 04

ТРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ

Е.З. Гусаков, А.Н. Савельев

Трехволновое резонансное взаимодействие, играющее роль элементарного процесса в таких нелинейных явлениях, как, например, распадные параметрические неустойчивости плазмы, обычно рассматривается в приближении заданной сильной волны накачки и слабых дочерних волн, испытывающих в неоднородной среде пространственное усиление в узкой области вблизи резонансных точек [1, 2]. Однако для достаточно интенсивной накачки это приближение нарушается, так как коэффициент пространственного усиления, зависящий экспоненциально от квадрата амплитуды волны накачки [3], легко может стать настолько большим, что усиленные дочерние волны сравняются по интенсивности с волной накачки и должны будут вызвать ее заметное истощение. В работе [4] было впервые получено аналитическое решение задачи о нелинейной стадии трехволнового взаимодействия в неоднородной среде, свободное от ограничения на амплитуды волн, но для частного случая соотношения групповых скоростей. Настоящее сообщение обобщает результаты [4] на произвольные взаимные направления распространения волн, что может оказаться полезным для приложений в физике плазмы и нелинейной оптике.

Будем полагать, что вблизи точки резонанса $z_r = 0$,

$$\Delta k(z) = k_1(z, \omega_1) - k_2(z, \omega_2) - k_3(z, \omega_3) = z/l^2,$$

где $k_m(z, \omega_m)$ – проекции волновых векторов на направление неоднородности z, $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, а l – масштаб неоднородности среды.

В каждой конкретной физической задаче посредством подходящей замены переменных система укороченных уравнений для медленно меняющихся амплитуд всегда может быть сведена к стандартному виду.

$$
\begin{aligned}
&\nu_1 \cdot \frac{d}{dz} y_1 = i y_2 y_3 \exp\{-iz^2/2l^2\}, \\
&\nu_2 \cdot \frac{d}{dz} y_2 = i y_1 y_3^* e \exp\{iz^2/2l^2\}, \qquad (1) \\
&\nu_3 \cdot \frac{d}{dz} y_3 = i y_1 y_2^* \exp\{iz^2/2l^2\}.
\end{aligned}
$$

Здесь y_m пропорциональны амплитудам взаимодействующих волн, а ν_m – соответствующие групповые скорости. Случай $\Delta k = -z/l^2$ также сводится к системе (1) простой заменой $y_m \to -y_m^*$ ($*$ – комплексное сопряжение). Нетрудно убедиться, что решение системы уравнений (1) при $z/l \to \pm\infty$ имеет следующее асимптотическое поведение:

$$
\begin{aligned}
&y_1^{\nu_1} \approx A_1^{\nu_1} \cdot \exp\left\{i\left(\varkappa_2^{\nu_2} + \varkappa_3^{\nu_3}\right) \cdot \ln|z/l|\right\} + O_1(l/z), \\
&y_2^{\nu_2} \approx A_2^{\nu_2} \cdot \exp\left\{i\left(\varkappa_1^{\nu_1} - \varkappa_3^{\nu_3}\right) \cdot \ln|z/l|\right\} + O_2(l/z), \qquad (2) \\
&y_3^{\nu_3} \approx A_3^{\nu_3} \cdot \exp\left\{i\left(\varkappa_1^{\nu_1} - \varkappa_2^{\nu_2}\right) \cdot \ln|z/l|\right\} + O_3(l/z).
\end{aligned}
$$

Верхние индексы $\nu_m = sign(\nu_m \cdot z)$ обозначают принадлежность к уходящей волне при $\nu_m = (+)$ и к волне падающей на точку резонанса в случае $\nu_m = (-)$; $O_m(l/z)$ – быстроосциллирующие функции, убывающие как l/z при $|z/l| \to \infty$; $A_m^{\pm} = |A_m^{\pm}| \cdot \exp(i\varphi_m^{\pm})$ – комплексные амплитуды волн до (A_m^-) и после (A_m^+) взаимодействия, а безразмерные параметры $\varkappa_m^{\pm}$ имеют вид

$$
\varkappa_m^{\nu_m} = l^2 |A_m^{\nu_m}|^2 / \nu_n \nu_p, \qquad m \neq n \neq p. \qquad (3)
$$

Отметим, что $\varkappa_m^{\pm}$ могут быть как положительными, так и отрицательными в зависимости от знаков групповых скоростей.

Целью настоящей работы является вычисление амплитуд A_m^+ волн, испытавших взаимодействие, по заданным амплитудам A_m^- падающих на точку резонанса волн, когда никаких ограничений не накладывается ни на интенсивности волн, ни на соотношение между их групповыми скоростями. Для решения этой задачи была использована разработанная в [4] регулярная процедура, основная идея которой заключается в переходе от стационарного к физически эквивалентному нестационарному взаимодействию волновых пакетов с плавно меняющимися амплитудами, масштаб неоднородности которых намного превышает характерный размер l области резонансного взаимодействия. Переход к пространственно-временной задаче, осуществляемый заменой в системе уравнений (1) операторов $v_m d/dz$ на $\partial/\partial t + v_m \partial/\partial z$, усложняет теоретический анализ, но вместе с тем и позволяет использовать мощную математическую технику метода обратной задачи теории рассеяния [5]. Успешному применению этой техники к рассматриваемому случаю $\Delta k = z/l^2$ способствует найденное в работах [6] и [7] преобразование амплитуд

$$u_m(z,t) = y_m(z,t)\cdot \exp\left\{iq_m(z-v_m t)^2\right\}, \quad q_m = const, \quad m=1,2,3,$$

которое трансформирует взаимодействие плавных волновых пакетов $y_m(z,t)$ в неоднородной среде во взаимодействие быстроосциллирующих пакетов $u_m(z,t)$, но уже в однородной среде. При этом оказывается, что изначально нелинейная задача сводится к последовательности линейных задач, а именно: к нахождению матрицы рассеяния $S(\tau)$ линейного дифференциального оператора специального вида [8], в котором преобразованные амплитуды $u_m^-(z,\tau)$ (взятые в некоторый момент времени τ, когда падающие на точку резонанса волновые пакеты еще не перекрываются) играют роль рассеивающих потенциалов; к продолжению вычисленной при $t=\tau$ матрицы $S(\tau)$ до момента времени $t=\tau'>\tau$, когда уходящие от точки резонанса провзаимодействовавшие волновые пакеты уже не перекрываются); и, наконец, к восстановлению „потенциалов" $u_m^+(z,\tau')$ по матрице рассеяния $S(\tau')$ с последующим возвратом к первоначальным пакетам $y_m^+(z,t)$ и извлечением из них значений асимптотических амплитуд A_m^+ после учета дополнительного фазового набега, возникающего из-за прохождения волновых пакетов друг через друга вдали от точки резонанса. Из этих трех задач вторая является элементарной вследствие тривиальности временной зависимости $S(\tau') = S(\tau)\exp(i\lambda(\tau'-\tau))$, где λ – некоторая константа [8], а две другие удается решить из-за факторизации полной матрицы рассеяния $S(t) = S_m(t)\cdot S_n(t)\cdot S_p(t)$, $m\neq n\neq p$, в те моменты времени, когда волновые пакеты можно считать не перекрывающимися. При этом каждая „частичная" матрица $S_m(t)$ оказывается существенно проще полной и ее можно вычислить в явном виде. Так как и вид частичных матриц, и порядок их перемножения до и после взаимодействия определяется соотношением групповых скоростей, то и результат восстановления „потенциалов" $u_m^+(z,\tau')$ тоже зависит от взаимного направления распространения волн. Это обстоятельство потребовало рассмотрения по отдельности всех возможных соотношений между групповыми скоростями для вывода общих формул связи, которые могут быть записаны в следующем относительно простом виде.

Модуль асимптотической амплитуды $|A_1^+|$ для волны с наибольшей частотой $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, находится по формулам (4) с учетом (3).

$$2\pi|\varkappa_1^+| = -\ln\left\{1 - \left[1 + \varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1 \cos\zeta\right] \cdot \left(1 - e^{-2\pi|\varkappa_1^-|}\right) \cdot e^{-2\pi(|\varkappa_2^-| + |\varkappa_3^-|)}\right\},$$

$$\varepsilon_1^2 = \left[e^{2\pi|\varkappa_2^-|} - 1\right] \cdot \left[e^{2\pi|\varkappa_3^-|} - 1\right] \cdot \left[1 - e^{-2\pi|\varkappa_1^-|}\right]^{-1}, \tag{4}$$

$$\zeta = \Phi_1^- - \Phi_2^- - \Phi_3^- + 3\pi/4 + \arg\left\{\Gamma(1 - i\varkappa_1^-) \cdot \Gamma(1 + i\varkappa_2^-) \cdot \Gamma(1 + i\varkappa_3^-)\right\}.$$

Фаза этой же волны $\Phi_1 = \arg(A_1^+)$ записывается в виде

$$\Phi_1^+ = \Phi_1^- + \arg\left\{\left[1 + \varepsilon_1 e^{i(\pi - \zeta)}\right] \cdot \frac{\Gamma(1 + i\varkappa_1^+)}{\Gamma(1 + i\varkappa_1^-)}\right\}, \tag{5}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция от комплексного аргумента.

Модули амплитуд остальных волн связаны с $|\varkappa_1^+|$ соотношениями Мэнли–Роу

$$|\varkappa_2^+| = |\varkappa_2^-| + |\varkappa_1^-| - |\varkappa_1^+|, \qquad |\varkappa_3^+| = |\varkappa_3^-| + |\varkappa_1^-| - |\varkappa_1^+|, \tag{6}$$

а их фазы даются следующими выражениями

$$\Phi_2^+ = \Phi_2^- + \arg\left\{\left[1 + \varepsilon_2 e^{i\zeta}\right] \cdot \frac{\Gamma(1 + i\varkappa_2^+)}{\Gamma(1 + i\varkappa_2^-)}\right\},$$

$$\Phi_3^+ = \Phi_3^- + \arg\left\{\left[1 + \varepsilon_3 e^{i\zeta}\right] \cdot \frac{\Gamma(1 + i\varkappa_3^+)}{\Gamma(1 + \varkappa_3^-)}\right\}, \tag{7}$$

где функции $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ определяются формулами

$$\varepsilon_2^2 = \left[1 - e^{-2\pi|\varkappa_1^-|}\right] \cdot \left[e^{2\pi|\varkappa_3^-|} - 1\right] \cdot \left[e^{2\pi|\varkappa_2^-|} - 1\right],$$

$$\varepsilon_3^2 = \left[1 - e^{-2\pi|\varkappa_1^-|}\right] \cdot \left[e^{2\pi|\varkappa_2^-|} - 1\right] \cdot \left[e^{2\pi|\varkappa_3^-|} - 1\right]. \tag{8}$$

Комбинируя формулы (4), (6) и (8) выражения для $|\varkappa_2^+|$, $|\varkappa_3^+|$ можно также представить в следующем симметричном и удобном виде:

$$2\pi|\varkappa_2^+| = \ln\left\{1+\left[1+\varepsilon_2^2+2\varepsilon_2\cos\zeta\right]\cdot\left(e^{2\pi|\varkappa_2^-|}-1\right)\cdot e^{2\pi(|\varkappa_1^-|-|\varkappa_3^-|)}\right\},$$

$$2\pi|\varkappa_3^+| = \ln\left\{1+\left[1+\varepsilon_3^2+2\varepsilon_3\cos\zeta\right]\cdot\left(e^{2\pi|\varkappa_3^-|}-1\right)\cdot e^{2\pi(|\varkappa_1^-|-|\varkappa_2^-|)}\right\}. \qquad (9)$$

В заключение следует отметить, что общие формулы (4)–(9), в отличие от частного случая [4], обладают необходимой симметрией и оказываются заметно более простыми.

Список литературы

[1] Piliya A.D. Proc. of 10-th Conf. on Phenom. in ionized gases. Oxford, 1971. P. 320.

[2] Rosenbluth M.N. // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 29. P. 565.

[3] Пилия А.Д. // ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 1237.

[4] Гусаков Е.З., Савельев А.Н. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94(4). С. 89.

[5] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. С. 21.

[6] Reiman A., Bers A., Kaup D. // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 39. P. 245.

[7] Андреев А.А. // Письма в ЖТФ. 1979. Т. 5. С. 377.

[8] Захаров В.Е., Манаков С.В. // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 1654.

Физико-технический
институт им. А.Ф. Иоффе
РАН, С.-Петербург

Поступило в Редакцию
22 марта 1993 г.