Письма в ЖТФ, том 19, вып. 8 26 апреля 1993 г.

01; 03

О СТРУКТУРЕ РЕАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С.О. Ширяева, О.А. Григорьев,
А.И. Григорьев

Исследование периодических движений заряженной жидкости представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями неустойчивости Тонкса–Френкеля, проявляющейся в формировании на заряженной поверхности жидкости системы заостренных выступов, с вершин которых идет сброс заряда в виде высокодисперсных сильно заряженных капелек (см., например, обзоры [1–2]. Но, тем не менее, некоторые аспекты реализации этого эффекта до сих пор не исследованы. В частности, это касается влияния релаксационных процессов на капиллярное волновое движение на заряженной поверхности жидкости, хотя на важную роль релаксации вязкости и поверхностного натяжения в формировании волнового спектра было указано уже давно [3].

1. Пусть имеется однородно заряженная с поверхностной плотностью заряда λ неограниченная плоская поверхность вязкой электропроводной жидкости, заполняющей в поле сил тяжести полупространства $z<0$. Уравнение граничной поверхности в отсутствие возмущения записывается в виде $z = 0$. Пусть σ и ν – коэффициенты поверхностного натяжения и кинематической вязкости жидкости, а ρ – ее удельная плотность. В [4] проводится подробный вывод дисперсионного уравнения для капиллярных волн в подобной системе в отсутствие поверхностного заряда. Повторяя те же рассуждения, что и в [4], добавив лишь в динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений слагаемое, учитывающее давление электрического поля согласно [5], несложно получить дисперсионное соотношение для рассматриваемой системы:

$$\omega^2-4\cdot i\cdot\nu\cdot k^2\cdot\omega+4\cdot\nu^2\cdot k^4\left(1-\sqrt{1-i\frac{\omega}{\nu k^2}}\right)+\omega_0^2=0, \tag{1}$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{\rho}\left(g\rho+\sigma k^2-4\pi k\lambda^2\right),$$

где ω – комплексная частота во временной зависимости амплитуд капиллярных волн от времени: $\zeta\sim exp(-i\omega t)$; k – волновое число.

Примем согласно [3], что коэффициенты вязкости и поверхностного натяжения являются функциями частоты:

$$\nu=\nu_0(1-i\omega\tau_в)^{-1},$$
$$\sigma=\sigma_\infty-\sigma_*(1-i\omega\tau)^{-1}, \qquad \sigma_*=\sigma_\infty-\sigma_0, \tag{2}$$

где ν_0 и σ_0 – значения коэффициентов вязкости и поверхностного натяжения на нулевой частоте, σ_∞ – коэффициент поверхностного натяжения на высоких частотах (при $\omega\tau_n \gg 1$), $\tau_в$ и τ_n – характерные времена релаксации вязкости и поверхностного натяжения, i – мнимая единица.

Подставим (2) в (1) и получим дисперсионное уравнение для периодических волновых движений на заряженной поверхности жидкости с учетом релаксационных эффектов. Несложно видеть, что это уравнение будет уже пятой степени: к исходным двум модам, обусловленным действием гравитационных, электрических и стационарных капиллярных сил, добавятся две моды вязко-упругих колебаний и одна мода, связанная с эффектом динамического поверхностного натяжения. В безразмерной форме обсуждаемое уравнение имеет вид

$$(1-i\gamma y)\left[2-i\alpha y(1-i\delta y)\right]^2+\alpha^2(1-i\gamma y)(1-i\delta y)^2-$$
$$-i\cdot\beta^2\cdot\alpha^2\cdot\gamma\cdot y(1-i\delta y)^2=4(1-i\gamma y)\sqrt{1-i\alpha y(1-i\delta y)}\ ;$$
$$y=\frac{\omega}{\omega_0},\quad \gamma=\omega_0\cdot\tau_n,\quad \delta=\omega_0\cdot\tau_в;\quad \alpha=\frac{\omega_0}{\nu_0\cdot k^2}, \tag{3}$$
$$\beta=\frac{1}{\omega_0}\sqrt{\sigma_* k^3/\rho}\ .$$

Исследуем решения уравнения (3) в предельных ситуациях.

2. Длинные капиллярные волны в маловязкой жидкости $\alpha^{-1}\ll 1$, $\gamma\ll 1$, $\delta\ll 1$. Уравнение (3) в линейном по малым параметрам γ,δ и α^{-1} приближении будет лишь третьего порядка по y:

$$i\cdot(\gamma+2\cdot\delta)\cdot y^3-y^2-i\cdot\left[(1+\beta^2)\cdot\gamma+2\cdot\delta+4\cdot\alpha^{-1}\right]\cdot y+1=0.$$

Корни этого уравнения в линейном же по малым параметрам приближении имеют вид

$$y_{1,2}=\pm 1-i\left[\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{2}\beta^2\cdot\gamma\right],\quad y_3=-i\left[\frac{1}{\gamma+2\cdot\delta}-\frac{4}{\alpha}-\beta^2\cdot\gamma\right]\cdot \tag{4}$$

Первые два решения описывают обычные капиллярно-гравитационные волны на заряженной поверхности жидкости с добавкой к коэффициенту затухания от эффекта релаксации поверхностного натяжения. Третье решение описывает затухание вязко-упругих волн, которое оказывается весьма большим, а основное его слагаемое, определяющее величину затухания, не зависит от волнового числа. Собственно говоря, в последнем случае речь должна идти не о волнах, но об апериодическом, экспоненциально быстро затухающем движении. Но интересен сам факт наличия таких движений в пределе малых вязкостей и малых частот.

Несложно видеть из выражения для y_1 и y_2, что при реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля (когда ω_0^2 проходит через ноль и становится отрицательным) корни y_1 и y_2 становятся чисто мнимыми, причем решение y_1 определит ветвь неустойчивых апериодических движений, амплитуда которых будет экспоненциально нарастать со временем, а y_2 даст ветвь апериодических же экспоненциально затухающих движений жидкости.

3. Короткие волны в сильновязкой жидкости ($\alpha \ll 1$, $\gamma \gg 1$, $\delta \gg 1$). Пусть γ и δ настолько велики, что в выражениях (2) можно принять: $\sigma = \sigma_\infty$, $\nu = -\nu_0/i\omega\tau_B$. В этом случае остается лишь два варьируемых параметра α и δ, которые удобно объединить в один параметр $\varkappa^2 = \alpha\cdot\delta$, который считается весьма большим $\varkappa \gg 1$. Уравнение (1) в квадратичном по $\varkappa^{-2}$ приближении записывается в безразмерной форме в виде

$$y^4 - \left[(1+\beta^2) + 4\cdot\varkappa^{-2}\right]\cdot y^2 - 4\cdot i\cdot\varkappa^{-3}\cdot y + 4\cdot\varkappa^{-4} = 0.$$

Четыре корня этого уравнения имеют релаксационную природу:

$$y_{1,2} = \pm\varkappa^{-1}\cdot R(\beta,\varkappa), \quad y_{3,4} = \pm 2\cdot\varkappa^{-1}\cdot R^{-1/2}(\beta,\varkappa) - i\cdot 2\cdot\varkappa^{-1}\cdot R^{-1}(\beta,\varkappa),$$

$$R(\beta,\varkappa) \equiv \sqrt{(1+\beta^2)\cdot\varkappa^2 + 4}\,. \qquad (5)$$

Несложно видеть из (1), что при достаточно высокой плотности электрического заряда λ, когда выполняется условие реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля, ω_0^2 (а вместе с ним β^2 и $\varkappa^2$) станет отрицательным, а ω_0 – мнимым. Из (5) несложно видеть, что в такой ситуации в некоторой области значений физических параметров β и $\varkappa$ выражение под радикалом сменит знак. Тогда первые два корня будут описывать апериодические движения: одно с убывающей, а другое с нарастающей амплитудой, а последние два корня определят чисто периодические релаксационные движения. Критическое условие смены вида движений жидкости в размерной форме имеет вид

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4\cdot\pi}\left(\sigma_\infty\cdot k + 4\cdot\nu_0\cdot\rho\cdot\tau_B^{-1} + g\cdot\rho\cdot k^{-1}\right). \qquad (6)$$

При фиксированной величине поверхностной плотности заряда, удовлетворяющей (6), это условие определяет максимальную величину волнового числа капиллярной волны, принимающей участие в развитии неустойчивости Тонкса–Френкеля, а выражение (5) – величины инкрементов неустойчивости различных мод капиллярных волн. Максимальным инкрементом в приближении

$$256\cdot(\pi\cdot\lambda^2\cdot\rho^{-1}-\nu_0\cdot\tau_B)^2 \gg 12\cdot\delta_\infty\cdot g\cdot\rho^{-1}$$

будет обладать волна с волновым числом $k=k_*$:

$$k_*=\frac{g}{16}\left(\frac{\pi\cdot\lambda^2}{\rho}-\frac{\nu_0}{\tau_B}\right)^{-1}.$$

Из (5) можно видеть, что в некотором диапазоне значений физических параметров β и $æ$ в жидкости могут одновременно существовать движения соответствующие различным решениям дисперсионного уравнения.

4. Подводя итог вышесказанному, отметим, что учет релаксационных явлений приводит к заметному усложнению структуры спектра возможных мелкомасштабных движений заряженной поверхности жидкости. Как отмечено в [3] (см, также [6]), характерные времена τ_B и $\tau_n \sim 10^{-5}$ с. И хотя, как следует из (4), релаксационные явления обнаруживаются уже на невысоких частотах и длинных капиллярных волнах (при γ и $\delta \ll 1$) существенным их вклад в физическую картину волнового движения жидкости становится при $\gamma,\delta > 1$, т.е. при $\omega > 10^5$ Гц. На временных интервалах $t < 10^{-5}$ с жидкость ведет себя как вязко-упругое тело и, следовательно, вряд ли можно говорить о капиллярном волновом движении с частотами $\omega > 10^5$ Гц.

Следствием сказанного будет ограничение на максимальную величину волновых чисел капиллярных волн, принимающих участие в формировании конусов Тейлора на неустойчивой заряженной поверхности жидкости, а, следовательно, и на величину инкремента нарастания неустойчивости Тонкса–Френкеля и на минимальный размер заряженных капель, эмиттируемых с вершин „конусов Тейлора". Следствием демпфирующего влияния релаксационных эффектов будет и изменение направления эволюции функции распределения по размерам сильно заряженного высокодисперсного жидко-капельного аэрозоля. Неустойчивые сильно (выше рэлеевского предела) заряженные капельки с радиусами $r < 1$ мкм из-за влияния релаксации вязкости будут делиться на две части сравнимых размеров [7], а не сбрасывать заряд в виде множества субмикронных сильно заряженных капелек, образующихся в серии каскадных процессов рэлеевских распадов [8].

В заключение авторы выражают признательность П.П. Полуэктову, обратившему их внимание на обсуждаемую проблему.

Список литературы

[1] Габович М.Д. // УФН. 1983. Т. 140. В. 1. С. 137–151.
[2] Шевченко С.И., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Научное Приборостроение. 1991. Т. 1. В. 4. С. 3–21.
[3] Быковский Ю.А., Маныкин Э.А., Полуэктов П.П. и др. // ЖТФ. 1976. Т. 46. В. 10. С. 2211–2213.
[4] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
[5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
[6] Бадмаев Б.Б., Лайдабон Ч.С., Дерягин Б.В., Базарон У.В. // ДАН СССР. 1992. Т. 322. В. 2. С. 307–311.
[7] Григорьев А.И., Лазарянц А.З. // ЖВММФ. 1992. Т. 32. В. 6. С. 929–938.
[8] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 3. С. 19–28.

Ярославский государственный
университет

Поступило в Редакцию
22 марта 1993 г.