Письма в ЖТФ, том 19, вып. 10 26 мая 1993 г.

01; 09

СТРУКТУРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФРАКЦИИ H-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

С.И. Эминов

Интегральное уравнение дифракции H-поляризованных волн интенсивно изучается в течение многих десятилетий [1]. В последнее время построены эффективные прямые численные методы решения интегрального уравнения: метод Галёркина, метод моментов и т.д.

Однако нерешенной остается проблема обоснования сходимости приближенного решения к точному. Данная работа посвящена решению этой проблемы. С этой целью ниже будет доказано, что интегральный оператор задачи может быть представлен в виде суммы симметричного положительно определенного оператора A и вполне непрерывного оператора B в гильбертовом пространстве $L_2[-1, 1]$. Тогда в энергетическом пространстве положительно определенного оператора A оператор $A^{-1}\cdot B$ будет вполне непрерывен. Эти свойства будут обеспечивать сходимость приближенного решения к точному [2].

Вначале приведем необходимые вспомогательные утверждения.

Т е о р е м а 1. Интегральный оператор $A_1 : L_2 \to L_2$,

$$(A_1 u)(\tau) = \int_0^{+\infty} \varkappa \int_{-1}^{1} \cos[\varkappa(\tau - t)] u(t)\, dt\, d\varkappa \qquad (1)$$

является симметричным положительно определенным.

Доказательство этой теоремы имеется в работе автора [3].

Т е о р е м а 2. Интегродифференциальный оператор $A : L_2 \to L_2$,

$$(Au)(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-1}^{1} u(t) \left[\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|\tau - t|} \right] dt \qquad (2)$$

является симметричным положительно определенным.

Доказательство следует из теоремы 1 и известного соотношения [4]:

$$\ln \frac{1}{|x|} = C + \int_0^1 \frac{\cos(\varkappa x) - 1}{\varkappa} d\varkappa + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\varkappa x)}{\varkappa} d\varkappa, \qquad (3)$$

где C – постоянная Эйлера.

4 Заказ 186

Л е м м а. Пусть $H_0^{(2)}(x)$ – известная функция Ханкеля, тогда имеет место представление

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[H_0^{(2)}(x)-\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{|x|}\right]=\frac{i}{\pi}\ln|x|+f(x), \tag{4}$$

где $f(x)$ – гладкая функция.

Эта лемма получается из (3) и следующего представления интегралом Фурье функции Ханкеля [4]:

$$H_0^{(2)}(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\cos(\varkappa x)}{\sqrt{1-\varkappa^2}}d\varkappa+\frac{2i}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\varkappa x)}{\sqrt{\varkappa^2-1}}d\varkappa.$$

Перейдем к рассмотрению интегрального уравнения. Пусть S – идеально проводящая незамкнутая цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси z. Контур Γ, образованный пересечением поверхности S с плоскостью $z = 0$ будем считать кусочно-гладкой и зададим в параметрической форме

$$x=\xi(t),\quad y=\eta(t),\quad -1\leq t\leq 1. \tag{5}$$

Определение плотности $j(t)$ поверхностных электрических токов сводится к интегральному уравнению [1]:

$$\frac{1}{4\omega\varepsilon h(\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}j(t)\frac{\partial}{\partial t}H_0^{(2)}(kL)dt-$$

$$-\frac{\omega\mu}{4h(\tau)}\int_{-1}^{1}j(t)\cdot S(\tau,t)\cdot H_0^{(2)}(kL)dt=-E^0(\tau), \tag{6}$$

где

$$L=\sqrt{[\xi(\tau)-\xi(t)]^2+[\eta(\tau)-\eta(t)]^2},$$

$$h(\tau)=\sqrt{\xi'^2(\tau)+\eta'^2(\tau)},$$

$$S(\tau,t)=\xi'(\tau)\xi'(t)+\eta'(\tau)\eta'(t).$$

Исследуем левую часть уравнения (6). Интегральный оператор, представленный вторым слагаемым, имеет логарифмическую особенность в ядре, он является вполне непрерывным в L_2 [2]. Первое слагаемое преобразуем, опуская коэффициент,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int_{-1}^{1} j(t)\frac{\partial}{\partial t}H_0^{(2)}(kL)\,dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau}\int_{-1}^{1} j(t)\frac{\partial}{\partial t}\left[H_0^{(2)}(kL) - \frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{|\tau - t|}\right]dt + \tag{7}$$

$$+ \frac{2i}{\pi}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_{-1}^{1} j(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau - t|}\,dt.$$

Первый оператор в (7) будет также вполне непрерывным согласно лемме и того, что контур Γ является кусочно-гладким.

Таким образом, получено упомянутое выше представление интегрального оператора в виде суммы симметричного положительно определенного и вполне непрерывного операторов.

В работе [3] предложен базис, ортогональный в энергетическом пространстве оператора А. Однако важно подчеркнуть, что приближенное решение, найденное методом Галёркина, будет сходиться к точному и при использовании другого базиса, полного в энергетическом пространстве.

Список литературы

[1] Захаров Е.В., Пименов Ю.В. Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982. 184 с.

[2] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

[3] Эминов С.И. Теория интегрального уравнения тонкого вибратора. ВИНИТИ, № 2464-В92 27.07.92.

[4] Предников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.Н. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 700 с.

Новгородский политехнический институт

Поступило в Редакцию 3 февраля 1993 г.
В окончательной редакции 10 апреля 1993 г.