Физика твердого тела, 2011, том 53, вып. 10

13

Влияние структурно-нарушенного поверхностного слоя изотропного твердого тела на дисперсию и затухание волн Рэлея

© В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин, С.Е. Муравьёв

Национальный исследовательский ядерный университет (МИФИ),
Москва, Россия

E-mail: kosachev@theor.mephi.ru

(Поступила в Редакцию 5 апреля 2011 г.)

Рассматривается влияние структурно-нарушенного изотропного поверхностного слоя, лежащего на свободной поверхности изотропного твердого тела на распространение волн Рэлея. Получены в аналитическом виде дисперсия фазовой скорости и обратная длина затухания волн Рэлея во втором порядке малости по отношению толщины структурно-нарушенного слоя к длине волны. Для дисперсии и обратной длины затухания исследован предел длинных волн, когда длина волны много больше характерного размера неоднородности слоя. Обратная длина затухания рассчитана численно.

1. Введение

В работе [1] с помощью модифицированного метода среднего поля были впервые получены дисперсия фазовой скорости и обратная длина затухания волн Рэлея на структурно-нарушенном изотропном слое, расположенном на изотропном полубесконечном твердом теле. При этом в отличие от других работ считалось, что коэффициенты Ламэ зависят от глубины нарушенного слоя произвольным образом. Однако граничное условие было получено в первом порядке по отношению толщины поверхностного нарушенного слоя к длине волны d/λ, что не позволяет получить правильное выражение для затухания рэлеевской волны. Работа [2] является обобщением [1] на случай, когда изотропный нарушенный слой располагается на поверхности гексагонального кристалла и решение получено во втором порядке по d/λ.

В настоящей работе рассматривается обобщение [1] на случай второго порядка малости по d/λ в граничных условиях. Это обусловлено следующими причинами: работа [1] опубликована в тезисном варианте; в работе [2] в предельном переходе к изотропному случаю результат не с чем сравнить, поскольку отсутствовали результаты для изотропного нарушенного слоя на изотропной подложке. Настоящая работа позволяет устранить эти недостатки. Полученные в ней результаты могут, с нашей точки зрения, быть достаточно интересными для экспериментаторов.

2. Постановка задачи

Изотропная упругая среда занимает верхнее полупространство $x_3 > 0$ и характеризуется плотностью массы ρ и тензором модулей упругости $C_{\alpha\beta\mu\nu}$. На поверхности изотропной среды расположен структурно-нарушенный изотропный слой толщины d, граничащий с вакуумом, с плотностью массы $\rho^{(0)}(\mathbf{x})$ и тензором модулей упругости $C^{(0)}_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{x})$. Вдоль поверхности распространяется поверхностная акустическая волна (ПАВ) Рэлея. Требуется найти дисперсию и обратную длину затухания поверхностной волны, вызванные наличием поверхностного структурно-нарушенного слоя. Толщина слоя d считается малой по сравнению с длиной поверхностной волны, $d \ll \lambda$. Решение будем искать во втором порядке малости по параметру d/λ.

3. Система уравнений для среднего поля ПАВ

Зависимость смещения среды от времени предполагается гармонической $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}|\omega)\exp(-i\omega t)$, тогда уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{cases} L^{(0)}_{\alpha\mu}(\mathbf{x}|\omega)u^{(0)}_{\mu}(\mathbf{x}|\omega) = 0, & -d < x_3 < 0, \\ L_{\alpha\mu}(\mathbf{x}|\omega)u_{\mu}(\mathbf{x}|\omega) = 0, & 0 < x_3 < +\infty, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$L_{\alpha\mu}(\mathbf{x}|\omega) = \rho(\mathbf{x})\omega^2\delta_{\alpha\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} C_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

Запишем граничные условия в плоскостях $x_3 = 0$ и $x_3 = -d$

$$C^{(0)}_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{(0)}_{\mu}}{\partial x_\nu}\Big|_{x_3=-d} = 0,$$
$$C_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x_\nu}\Big|_{x_3=0} = C^{(0)}_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial u^{(0)}_{\mu}}{\partial x_\nu}\Big|_{x_3=0}, \tag{2}$$
$$\lim_{x_3\to+\infty} u_\alpha(\mathbf{x}|\omega) = 0.$$

Заметим, что для изотропной среды

$$C_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \mu(\mathbf{x})(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}). \tag{3}$$

Для поверхностного слоя можно написать

$$\rho^{(0)}(\mathbf{x}_\parallel) = \rho_0\big(1 + f_1(\mathbf{x}_\parallel)\big),$$
$$\lambda^{(0)}(\mathbf{x}_\parallel) = \lambda_0\big(1 + f_2(\mathbf{x}_\parallel)\big),$$
$$\mu^{(0)}(\mathbf{x}_\parallel) = \mu_0\big(1 + f_3(\mathbf{x}_\parallel)\big). \tag{4}$$

При этом считаем, что

$$\langle f_i(\mathbf{x}_\parallel)\rangle = 0,$$
$$\langle f_i(\mathbf{x}_\parallel) f_j(\mathbf{x}'_\parallel)\rangle = \varepsilon_{ij} W_{ij}(|\mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}'_\parallel|),$$
$$W_{ij}(0) = 1, \quad \varepsilon_{ij} \ll 1, \tag{5}$$

где угловые скобки означают статистическое усреднение по различным реализациям неоднородностей поверхностного слоя, а $\mathbf{x}_\parallel = (x_1, x_2, 0)$. Считается, что слой слабо неоднороден, т. е.

$$f_\alpha(\mathbf{x}_\parallel) \ll 1, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Фурье-образ коррелятора (5) запишем в виде

$$\langle f_i(\mathbf{k}) f_j(\mathbf{q})\rangle = \varepsilon_{ij} g_{ij}(|\mathbf{k}|)(2\pi)^2 \delta(\mathbf{k}+\mathbf{q}), \tag{7}$$

где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, 0)$, а $g_{ij}(|\mathbf{k}|)$ — поверхностный структурный фактор, который выбирается в гауссовом виде

$$g_{ij}(|\mathbf{k}|) = \pi a_{ij}^2 \exp\left(-\frac{\mathbf{k}^2 a_{ij}^2}{4}\right), \tag{8}$$

a_{ij} — корреляционные радиусы неоднородностей поверхностного слоя.

Система уравнений для поля смещения во втором порядке малости по толщине слоя d для данной задачи получается так же, как и в работе [2], с той лишь разницей, что функция Грина берется для изотропной среды. В результате получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} F_1(\mathbf{k}|\omega) \\ F_3(\mathbf{k}|\omega) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} d_{11}t_{11} + d_{13}t_{31} & d_{11}t_{13} + d_{13}t_{33} \\ d_{33}t_{11} + d_{33}t_{31} & d_{31}t_{13} + d_{33}t_{33} \end{pmatrix}\right.$$
$$+ d^2 \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} g_{ij}(|\mathbf{k}-\mathbf{q}|)$$
$$\left.\times \begin{pmatrix} K_{11}^{ij}(\mathbf{k},\mathbf{q}|\omega) & K_{13}^{ij}(\mathbf{k},\mathbf{q}|\omega) \\ K_{31}^{ij}(\mathbf{k},\mathbf{q}|\omega) & K_{33}^{ij}(\mathbf{k},\mathbf{q}|\omega) \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{k}|\omega) \\ F_3(\mathbf{k}|\omega) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{k}|\omega)$ — Фурье-компоненты среднего поля смещения, $d_{ij} = d_{ij}(k|\omega)$ — функция Грина полубесконечной изотропной среды со свободной границей (получена в [3]), $t_{ij} = t_{ij}(\mathbf{k}|\omega)$ — матрица, содержащая параметры слоя, $K_{11}^{ij}(\mathbf{k},\mathbf{q}|\omega)$ — матрица, содержащая как функцию Грина, так и параметры поверхностного слоя.

4. Дисперсионные соотношения для ПАВ Рэлея

Условие разрешимости системы (9) дает дисперсионное соотношение, которое можно записать в виде

$$\det(1 + \delta A) = 0. \tag{10}$$

Для любых матриц 2×2, если хотя бы одна из них симметрична,

$$\det(A + \delta A) = \det A + \det A \cdot \mathrm{Sp}\big((A^{-1})^T \delta A\big) + \det \delta A, \tag{11}$$

тогда (10) перепишется как

$$1 = -\mathrm{Sp}(\delta A) - \det \delta A. \tag{12}$$

В равенство (12) входит функция Грина, содержащая знаменатель, который может обращаться в нуль. Обозначим этот знаменатель как $A(k|\omega)$ и умножим на него выражения (12)

$$A(k|\omega) = Z(k|\omega). \tag{13}$$

При $d = 0$ выражение для $Z(k|\omega)$ обращается в нуль, и решение уравнения

$$A(k|\omega) = 0 \tag{14}$$

дает известное выражение для дисперсии волн Рэлея на свободной поверхности полубесконечной изотропной среды

$$\rho\omega_R^2 = \rho c_t^2 \varepsilon k^2. \tag{15}$$

Здесь ε определяется кубическим уравнением

$$\varepsilon^3 - 8\varepsilon^2 + 8\left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)\varepsilon - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{16}$$

где c_i — продольная, а c_t — поперечная скорость звука (известно, что для изотропной среды $c_l > c_t$). Далее разложим $A(k|\omega)$ в (13) в ряд Тейлора в окрестности $\omega = \omega_R + i\alpha$, где α — малая вещественная величина, определяющая затухание волны, и запишем закон дисперсии в виде

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_R} = \frac{\omega - \omega_R}{\omega_R} = \frac{1}{\omega_R\left(\frac{\partial A(k|\omega_R)}{\partial\omega}\right)} Z(k|\omega)|_{\omega\to\omega_R + i\alpha}, \tag{17}$$

где

$$Z(k|\omega) = A(k|\omega)(d_{11}t_{11} + d_{13}t_{31} + d_{31}t_{13} + d_{33}t_{33})$$
$$- A(k|\omega)\det\delta A + A(k|\omega) d^2 \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} g_{ij}$$
$$\times (|\mathbf{k}-\mathbf{q}|)\big(K_{11}^{ij}(\mathbf{k},\mathbf{q}|\omega) + K_{33}^{ij}(\mathbf{k},\mathbf{q}|\omega)\big). \tag{18}$$

В (18) учитываем члены, пропорциональные только d и d^2. Вводя переменные $\xi_{ij} = ka_{ij}$, $\eta = q/k$ и используя интегральное представление модифицированной функции Бесселя

$$I_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \exp(z\cos\theta)\cos m\theta, \tag{19}$$

проинтегрируем (18) по углам. Подынтегральное выражение (18) содержит в знаменателе функцию

$A(q, \omega_R + i\alpha)$, поэтому для вычисления интеграла в (18) используем равенство

$$\frac{1}{A(q,\omega_R+i\alpha)} = P\frac{1}{A(q,\omega_R)} - i\pi \mathrm{Sign}\left(\frac{\frac{\partial A(k,\omega_R)}{\partial\omega}}{\frac{\partial A(k,\omega_R)}{\partial q}}\right)\frac{\delta(\eta-1)}{k\,\frac{\partial A(k,\omega_R)}{\partial q}}, \quad (20)$$

где символ P означает интегрирование в смысле главного значения Коши. В результате получаем дисперсионное соотношение

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_R} = \beta\Big(kd\gamma + (kd)^2 v + (kd)^2 \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}\xi_{ij}^2 e^{-\frac{\xi_{ij}^2}{4}} \times \big(A_{ij}(\xi_{ij}) + B_{ij}(\xi_{ij}) + E_{ij}(\xi_{ij})\big)\Big) \quad (21)$$

(не встречающиеся ранее обозначения раскрыты в Приложении).

Комплексный сдвиг частоты содержит вещественную и мнимую части

$$\Delta\omega(k) = v_1(k) - iv_2(k). \quad (22)$$

При этом $v_1(k)$ есть дисперсия фазовой скорости, а $v_2(k)$ связана с обратной длиной затухания

$$\frac{1}{l(k)} = 2k\,\frac{v_2(k)}{\omega_R}. \quad (23)$$

В работе [2] решена задача, аналогичная настоящей работе, но с тем отличием, что вместо изотропного полупространства был взят гексагональный кристалл с осью симметрии шестого порядка, направленной перпендикулярно поверхности. Поэтому, положив в работе [2] коэффициенты тензора модулей упругости такими же, как в изотропном материале,

$$c_{11} = \rho c_l^2, \quad c_{44} = \rho c_t^2, \quad c_{33} = c_{11} = \rho c_l^2,$$

$$c_{13} = c_{12} = \rho c_l^2 - 2\rho c_t^2, \quad (24)$$

получаем результаты настоящей работы. Сравнение показывает их полную идентичность. Отметим, что для подтверждения правильности результатов обеих работ настоящая публикация была выполнена независимо от [2].

5. Длинноволновый предел

Рассмотрим частный случай длинных волн, когда длина волны много больше всех корреляционных радиусов неоднородностей поверхностного слоя

$$\xi_{ij} = ka_{ij} \sim \frac{a_{ij}}{\lambda} \ll 1. \quad (25)$$

Следовательно, аргумент модифицированных функций Бесселя мал, поэтому можно написать

$$I_m(z) \approx \frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m \big(1 + O(z)\big). \quad (26)$$

Заметим, что в (21) интегралы в $A_{ij}(\xi_{ij})$ и $B_{ij}(\xi_{ij})$ набирают свое основное значение при $\xi_{ij}\eta \approx 1$; кроме того, в подынтегральные выражения входят комплексные функции $\tilde{a}_{11}$ и $\tilde{a}_{22}$, которые не содержат мнимой части при $\eta > \sqrt{\varepsilon}$. С учетом этого получаем вещественную и мнимую части (21)

$$\frac{v_1(k)}{\omega_R} = kd\gamma\beta - (kd)^2\beta\,\frac{\sqrt{\pi}(\alpha_{11}+\alpha_{22})}{2} \times \left(\frac{\mu_0^2}{(\rho c_t^2)^2}\frac{\varepsilon_{33}}{a_{33}} + \frac{1}{2\Big(1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\Big)}\sum_{i,j=2}^{3}\frac{\varepsilon_{ij}Q_{ij}}{a_{ij}}\right), \quad (27)$$

$$\frac{v_2(k)}{\omega_R} = \beta k^4 d^2 \sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}a_{ij}^2 \times \left(\int_0^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\eta P_0^{ij}(\eta)}{\sqrt{\varepsilon-\eta^2}}\,d\eta + \mathrm{Im}\left(\int_0^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\eta Q_0^{ij}(\eta)}{A(\eta)}\,d\eta + E_{ij}(0)\right)\right); \quad (28)$$

входящие сюда величины приведены в Приложении.

Из (27) следует, что дисперсия фазовой скорости $v_1 \sim k^2 \sim \omega^2$, а обратная длина затухания $1/l \sim k^5 \sim \omega^5$. Выражение (36) работы [2] при переходе к изотропной среде совпадают с выражениями (27) и (28).

6. Численный расчет

Дисперсионное соотношение (21) содержит 15 независимых параметров, характеризующих поверхностный слой: это ρ_0, λ_0, μ_0 и по шесть независимых компонент симметричных матриц ε_{ij} и a_{ij}. Тем не менее мнимую часть (21) можно записать в виде

$$\mathrm{Im}\,\frac{\Delta\omega}{\omega_R} = -\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ij}\,\frac{d^2}{a_{ij}^2}\,v_{ij}(\xi_{ij}), \quad (29)$$

где функции $v_{ij}(\xi_{ij})$ зависят только трех величин, характеризующих слой: ρ_0, λ_0, μ_0, а $\xi_{ij} = ka_{ij}$ является параметром. Функции $v_{ij}(\xi_{ij})$ были просчитаны численно для любых изотропных сред подложки и поверхностного слоя. Графики $v_{ij}(\xi_{ij})$ для различных изотропных сред отличаются друг от друга в основном знаком и амплитудой и похожи на соответствующие графики работы [2].

В частном случае, когда флуктуирует только плотность, сумма в (29) будет содержать только одно слагаемое с $i, j = 1$. В этом случае нарушенный слой будет характеризоваться только двумя параметрами — корреляционным радиусом a_{11} и среднеквадратичной флуктуацией плотности. Заметим, что такая упрощенная модель может оказаться весьма полезной при исследовании параметров неоднородностей аморфных пленок, например пленки аморфного германия на подложке из плавленого кварца.

7. Заключение

В работе исследовано влияние изотропного структурно-нарушенного поверхностного слоя изотропного твердого тела на дисперсию и затухание ПАВ Рэлея. Получены в аналитическом виде выражения для дисперсии фазовой скорости и обратной длины затухания ПАВ Рэлея, обусловленные структурно-нарушенным слоем, с учетом второго порядка малости по отношению толщины структурно-нарушенного поверхностного слоя к длине волны Рэлея. Для дисперсии и обратной длины затухания рассмотрен предел длинных волн, когда длина волны много больше характерного размера неоднородности слоя. При этом получено, что дисперсия фазовой скорости пропорциональна второй степени частоты, а обратная длина затухания — пятой. Обратная длина затухания просчитана численно, полученные графики качественно похожи на соответствующие графики [2]. Сравнение показало переход результатов [2] в выражения, полученые в настоящей работе.

Поскольку дисперсионное соотношение содержит 15 параметров, характеризующих слой, обсуждается упрощенная модель, когда флуктуирует только плотность. В этом случае остается всего два свободных (подгоночных) параметра, характеризующих слой: это корреляционный радиус нарушенного слоя и среднеквадратичная амплитуда шероховатости. Эта модель может оказаться полезной при исследовании параметров неоднородностей аморфных пленок.

Приложение

$$\beta = \frac{\alpha_{11}\alpha_{22}(1-\varepsilon)}{\varepsilon\Big((1-\varepsilon)\Big(2\alpha_{11}\alpha_{22}+2-3\varepsilon\,\frac{c_i^2}{c_l^2}\Big)+\varepsilon\Big(1-\varepsilon\,\frac{c_t^2}{c_l^2}\Big)\Big)}, \tag{30}$$

$$\gamma = -(\alpha_{11}+\alpha_{22})\left(\frac{\rho_0}{\rho}\,\varepsilon-\frac{b_0+2\mu_0}{\rho c_t^2}+\frac{\rho_0}{\rho}\,\varepsilon\,\frac{1-\varepsilon\,\frac{c_t^2}{c_l^2}}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right), \tag{31}$$

$$\upsilon = \left(2\,\frac{c_t^2}{c_l^2}-1+\frac{1-\varepsilon\,\frac{c_t^2}{c_l^2}}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right)\left(-b_1\,\frac{\rho_0}{\rho}\,\varepsilon+\frac{b_0+2\mu_0}{\rho c_t^2}\right)$$
$$+\frac{\rho_0}{\rho}\,(4-\varepsilon)\left(1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)\left(-\frac{\rho_0}{\rho}\,\varepsilon+\frac{b_0+2\mu_0}{\rho c_t^2}\right), \tag{32}$$

$$A_{ij}(\xi_{ij}) = \frac{1}{2\rho^2c_l^2c_t^2}\int\limits_0^\infty d\eta\eta\,\frac{e^{-\frac{\xi_{ij}^2\eta^2}{4}}}{\tilde\alpha_{22}(\eta)}\sum_{m=0}^4 P_m^{ij}(\eta)I_m\left(\frac{\eta\xi_{ij}^2}{2}\right), \tag{33}$$

$$B_{ij}(\xi_{ij}) = \frac{1}{2\rho^2c_l^2c_t^2}\,P\int\limits_0^\infty d\eta\eta\,\frac{e^{-\frac{\xi_{ij}^2\eta^2}{4}}}{\tilde\alpha_{22}(\eta)}\sum_{m=0}^4 Q_m^{ij}(\eta)I_m\left(\frac{\eta\xi_{ij}^2}{2}\right). \tag{34}$$

Символ P означает интегрирование в смысле главного значения Коши, полюс находится в точке $\eta = 1$.

$$E_{ij}(\xi_{ij}) = -i\pi$$
$$\times\,\mathrm{sign}\left[\frac{(1-\varepsilon)\Big(2\alpha_{11}\alpha_{22}+2-3\,\frac{c_t^2}{c_l^2}\,\varepsilon\Big)+\varepsilon\Big(1-\frac{c_i^2}{c_l^2}\,\varepsilon\Big)}{(1-\varepsilon)\big(8(1-\frac{c_t^2}{c_l^2})\alpha_{11}\alpha_{22}-\varepsilon\big)+\varepsilon(1-\frac{c_i^2}{c_l^2}\varepsilon)}\right]$$
$$\times\,\frac{\alpha_{11}\alpha_{22}(1-\varepsilon)e^{-\frac{\xi_{ij}^2}{4}}}{(1-\varepsilon)\Big(8\Big(1-\frac{c_t^2}{c_l^2}\Big)\alpha_{11}\alpha_{22}-\varepsilon\Big)+\varepsilon\Big(1-\frac{c_i^2}{c_l^2}\,\varepsilon\Big)}$$
$$\times\sum_{m=0}^4 Q_m^{ij}(1)I_m\left(\frac{\xi_{ij}^2}{2}\right), \tag{35}$$

$$A(\eta) = \frac{c_l^2}{c_t^2}\left(\left(1-2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)^2\eta^2+\left(\eta^2-\varepsilon\,\frac{c_t^2}{c_l^2}\right)\left(\frac{c_t^2}{c_l^2}\,\frac{\varepsilon}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}}-1\right)\right), \tag{36}$$

$$P_m^{ij}(\eta) = P_m^{ji}(\eta), \quad Q_m^{ij}(\eta) = P_m^{ji}(\eta), \tag{37}$$

$$P_0^{11} = -\frac{1}{4}\,\varepsilon^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2(\alpha_{11}+\alpha_{22}), \tag{38}$$

$$P_2^{11} = \frac{1}{4}\,\varepsilon^2\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2(\alpha_{11}+\alpha_{22}), \tag{39}$$

$$P_1^{13} = \frac{1}{4}\,\frac{\rho_0\mu_0}{\rho^2c_t^2}\,\eta\varepsilon(\alpha_{11}+\alpha_{22}), \tag{40}$$

$$P_3^{13} = -\frac{1}{4}\,\frac{\rho_0\mu_0}{\rho^2c_t^2}\,\eta\varepsilon(\alpha_{11}+\alpha_{22}), \tag{41}$$

$$P_0^{33} = -\frac{1}{4}\,\eta^2\,\frac{\mu_0^2}{\rho^2c_t^4}\,(\alpha_{11}+\alpha_{22}), \tag{42}$$

$$P_4^{33} = \frac{1}{4}\,\eta^2\,\frac{\mu_0^2}{\rho^2c_t^4}\,(\alpha_{11}+\alpha_{22}). \tag{43}$$

Остальные элементы P_m^{ij} равны нулю.

$$Q_0^{11} = \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2\varepsilon^2\Bigg((\alpha_{11}+\alpha_{22})(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22})$$
$$+2\,\frac{\Big(\frac{c_t^2}{c_l^2}\,\varepsilon-1\Big)(\alpha_{11}+\alpha_{22})}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\,\frac{\Big(\frac{c_t^2}{c_l^2}\,\varepsilon-\eta^2\Big)(\tilde\alpha_{11}+\tilde\alpha_{22})}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}}\Bigg), \tag{44}$$

$$Q_1^{11} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \varepsilon^2 \left(2\frac{c_t^2}{c_l^2} - 1 + \frac{1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right)$$

$$\times \left(2\frac{c_t^2}{c_l^2} - 1 + \frac{\eta^2 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}}\right), \tag{45}$$

$$Q_2^{11} = \frac{1}{4}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 \varepsilon^2(\alpha_{11} + \alpha_{22})(\tilde\alpha_{11} + \tilde\alpha_{22}), \tag{46}$$

$$Q_0^{12} = -\frac{\rho_0}{\rho}\frac{g_1}{\rho c_t^2}\eta\varepsilon^2 \left(2\frac{c_t^2}{c_l^2} - 1 + \frac{1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right)$$

$$\times \left(2\frac{c_t^2}{c_l^2} - 1 + \frac{\eta^2 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}}\right), \tag{47}$$

$$Q_1^{12} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{g_1}{\rho c_t^2}\eta\varepsilon(\alpha_{11} + \alpha_{22})(\tilde\alpha_{11} + \tilde\alpha_{22}), \tag{48}$$

$$Q_0^{13} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{g_2 + \mu_0}{\rho c_t^2}\eta\varepsilon \left(2\frac{c_t^2}{c_l^2} - 1 + \frac{1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right)$$

$$\times \left(2\frac{c_t^2}{c_l^2} - 1 + \frac{\eta^2 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}}\right), \tag{49}$$

$$Q_1^{13} = -\frac{1}{4}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{2g_2 + 3\mu_0}{\rho c_t^2}\eta\varepsilon(\alpha_{11} + \alpha_{22})(\tilde\alpha_{11} + \tilde\alpha_{22}), \tag{50}$$

$$Q_2^{13} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\mu_0}{\rho c_t^2}\eta\varepsilon^2 \left(2\frac{c_t^2}{c_l^2} - 1 + \frac{1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon}{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right)$$

$$\times \left(2\frac{c_t^2}{c_l^2} - 1 + \frac{\eta^2 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon}{\tilde\alpha_{11}\tilde\alpha_{22}}\right), \tag{51}$$

$$Q_3^{13} = -\frac{1}{4}\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\mu_0}{\rho c_t^2}\eta\varepsilon(\alpha_{11} + \alpha_{22})(\tilde\alpha_{11} + \tilde\alpha_{22}), \tag{52}$$

$$Q_0^{22} = \frac{1}{2}\frac{g_1^2}{(\rho c_t^2)^2}\eta^2(\alpha_{11} + \alpha_{22})(\tilde\alpha_{11} + \tilde\alpha_{22}), \tag{53}$$

$$Q_0^{23} = \frac{1}{2}\frac{g_1(g_2 + \mu_0)}{(\rho c_t^2)^2}\eta^2(\alpha_{11} + \alpha_{22})(\tilde\alpha_{11} + \tilde\alpha_{22}), \tag{54}$$

$$Q_2^{23} = \frac{1}{2}\frac{g_1\mu_0}{(\rho c_t^2)^2}\eta^2(\alpha_{11} + \alpha_{22})(\tilde\alpha_{11} + \tilde\alpha_{22}), \tag{55}$$

$$Q_0^{33} = \frac{1}{4}\frac{2g_2^2 + 4\mu_0 g_2 + 3\mu_0^2}{(\rho c_t^2)^2}\eta^2(\alpha_{11} + \alpha_{22})(\tilde\alpha_{11} + \tilde\alpha_{22}), \tag{56}$$

$$Q_2^{33} = \frac{\mu_0(g_2 + \mu_0}{(\rho c_t^2)^2}\eta^2(\alpha_{11} + \alpha_{22})(\tilde\alpha_{11} + \tilde\alpha_{22}), \tag{57}$$

$$Q_4^{33} = \frac{1}{4}\frac{\mu_0^2}{(\rho c_t^2)^2}\eta^2(\alpha_{11} + \alpha_{22})(\tilde\alpha_{11} + \tilde\alpha_{22}), \tag{58}$$

$$\tilde\alpha_{11} = \begin{cases} \sqrt{\eta^2 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon}, & \eta^2 > \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon, \\ -i\sqrt{\frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon - \eta^2}, & \eta^2 < \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon, \end{cases} \tag{59}$$

$$\tilde\alpha_{22} = \begin{cases} \sqrt{\eta^2 - \varepsilon}, & \eta^2 > \varepsilon, \\ -i\sqrt{\varepsilon - \eta^2}, & \eta^2 < \varepsilon, \end{cases} \tag{60}$$

$$\alpha_{11} = \sqrt{1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\varepsilon}, \quad \alpha_{22} = \sqrt{1 - \varepsilon}, \tag{61}$$

$$b_0 = g + g_3\varepsilon_{23} + g_4\varepsilon_{22} + g_5\varepsilon_{33}, \tag{62}$$

$$b_1 = \frac{g}{\lambda_0} + \frac{g_2}{\lambda_0}\varepsilon_{13} + \frac{g^3}{4\lambda_0\mu_0^2}\varepsilon_{22} + \left(\frac{g^3}{\mu_0\lambda_0^2} - \frac{g^3}{2\mu_0\lambda_0}\right)\varepsilon_{23}$$

$$+ \frac{g_5}{\lambda_0}\varepsilon_{33} - \frac{g^2}{2\mu_0\lambda_0}\varepsilon_{12}, \tag{63}$$

$$g = \frac{2\lambda_0\mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad g_1 = g - \frac{g^2}{2\mu_0}, \quad g_2 = g - \frac{g^2}{\lambda_0},$$

$$g_3 = g + \frac{g^3}{\lambda_0\mu_0} - \frac{g^2}{\lambda_0} - \frac{g^2}{2\mu_0}, \tag{64}$$

$$g_4 = \frac{g^3}{4\mu_0} - \frac{g^2}{2\mu_0}, \quad g_5 = \frac{g^3}{\lambda_0^2} - \frac{g^2}{\lambda_0}, \tag{65}$$

где λ_0 и μ_0 — поэффициенты Ламэ поверхностного нарушенного слоя.

$$Q_{22} = 2\frac{g_1^2}{(\rho c_t^2)^2}, \quad Q_{23} = Q_{32} = 2\frac{g_1(g_2 + \mu_0)}{(\rho c_t^2)^2},$$

$$Q_{33} = \frac{2g_2^2 + 4\mu_0 g_2 + 3\mu_0^2}{(\rho c_t^2)^2}. \tag{66}$$

Список литературы

[1] V.V. Kosachev. Prog. IV Int. Symp. on surfase waves in solid and layered structures. St.Petersburg (1998). P. 1-7.
[2] В.В. Косачёв, Ю.Н. Гандурин. ФТТ **50**, *4*, 751 (2008).
[3] A.A. Maradudin, D.L. Mills. Ann. Phys. (N.Y.) **100**, 262 (1976).