Письма в ЖТФ, том 19, вып. 10 26 мая 1993 г.

01; 04

ОПИСЫВАЕТ ЛИ МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА МЕДЛЕННЫЕ НЕАДИАБАТИЧЕСКИЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГОРЯЧЕЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ?

Ю.В. Вандакуров

В настоящее время магнитная гидродинамика (МГД) является наиболее простой и эффективной теорией, описывающей сравнительно низкочастотные движения плазмы в магнитном поле. Однако при изучении тепловой неустойчивости в плазме, характерной для нижней короны Солнца, были выявлены существенные расхождения между результатами, полученными при помощи МГД уравнений или на основе уравнений для двухжидкостной среды в магнитном поле [1, 2]. Ниже мы рассматриваем причину таких расхождений.

МГД уравнения выводятся из уравнений Максвелла:

$$\mathrm{rot}\, B = \frac{4\pi}{c}\left(j + j_d\right), \qquad \mathrm{rot}\, E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1}$$

и уравнений двухжидкостной среды [3] в предположении, что ток смещения $j_d = (1/4\pi)(\partial E/\partial t)$ является несущественным. Здесь и ниже $\rho_e = \sum e_\alpha n_\alpha$, $j = \sum e_\alpha n_\alpha v_\alpha \approx e_1 n_1 (v_1 - v_2)$, причем e_α, m_α, n_α, $\rho_\alpha = n_\alpha m_\alpha$, $p_\alpha = n_\alpha T_\alpha$, $\rho e_\alpha = e_\alpha n_\alpha$ и v_α – заряд, масса, концентрация, плотность, давление, плотность заряда и гидродинамическая скорость α-компоненты, E и B электрическое и магнитное поля, T_α – температура в энергетических единицах, c – скорость света и предполагается, что индексы α = 1 и 2 относятся соответственно к электронам и ионам, а суммирование производится по α = 1 и 2. Видно, что

$$\mathrm{div}\, j + \mathrm{div}\, j_d = 0, \tag{2}$$

или с учетом уравнения Пуассона ($\mathrm{div}\, E = 4\pi\rho_e$).

$$\mathrm{div}\, j + \partial\rho_e/\partial t = 0. \tag{3}$$

Если ток смещения опущен, то $\mathrm{div}\, j$ = 0 и

$$\partial\rho_e/\partial t = 0. \tag{3'}$$

В случае перехода к МГД приближению это соотношение квазинейтральности является дополнительным уравнением для всей системы двухжидкостных уравнений и уравнений Максвелла, в результате чего задача становится переопределенной и, вообще говоря, неразрешимой. Брагинский [3] обсуждал эту проблему и предложил следующую процедуру нахождения приближенного решения путем разложения по малому параметру $|\rho_e/\rho_{e1}|$.

На первом этапе рассматривается вся упомянутая система уравнений, но без уравнения Пуассона. Вместо последнего используется соотношение (3'), т.е. фактически условие $\rho_e = 0$. Брагинский, по-видимому, считает, что при таком допущении число неизвестных переменных находится в соответствии с числом уравнений и задача является разрешимой. Осуществляя переход к МГД уравнениям, можно определить поля и средние параметры плазмы. На втором этапе при помощи уравнения Пуассона вычисляется плотность заряда ρ_e.

Заметим кстати, что изложенная процедура в действительности не является решением путем разложения по малому параметру, поскольку в самом низшем приближении задача является неразрешимой. Нуждается в выяснении также то обстоятельство, что в случае потенциальных компонент плотностей токов отношение j_d/j, как видно из уравнения (2), вообще говоря, не мало. Утверждение о малой величине тока смещения, приведенное в § 6 работы [3] и во многих других работах, основано на оценке магнитной силы, которая определяется в основном вихревой составляющей плотности тока j.

Можно привести простой пример, показывающий, что вопрос о справедливости предложенной Брагинским процедуры нельзя признать окончательно решенным. Пусть речь идет о линейной задаче возбуждения поперечных однородному магнитному полю движений в полностью замагниченной, двухжидкостной, однородной, первоначально неподвижной плазме. Если ток смещения опущен, разность $v_1 - v_2$ выражается через $rot\, B$ и в уравнении движения для всей плазмы все силы являются потенциальными, т.е. $rot\, v = rot \times (\sum \rho_\alpha v_\alpha / \sum \rho_\alpha) = 0$. Здесь мы учитываем, что в случае поперечных полю движений $(B \cdot \nabla)\, B = 0$. Интересно, что, несмотря на условие $rot\, v = 0$, вся магнитная сила определяется лишь величиной $rot(v_1 - v_2)$, в чем можно убедиться, вычисляя дивергенцию уравнения движения, в котором магнитная сила представлена через векторное произведение $(v_1 - v_2) \cdot B$.

Если, кроме того, справедливо соотношение $E = -(v \cdot B)/c$, то с учетом соотношения $rot\, v = 0$ получим $div\, E = (v \cdot rot\, B - B \cdot rot\, v)/c = 0$. Значит, поступая согласно процедуре Брагинского и находя плотность заряда из уравнения Пуассона по той величине E, которая была рассчитана в результате решения МГД уравнений, мы можем получить нулевое значение ρ_e. Однако нулевая плотность заряда, вообще говоря, не является решением системы двухжидкостных уравнений, поскольку в этом случае система остается переопределенной. Не исключено, конечно, что уравнения идеальной магнитной гидродинамики недостаточно точны для вычисления плотности заряда ρ_e.

Все же нетрудно показать, что процедура Брагинского [3] не может привести к разрешению упомянутой проблемы переопределенности системы уравнений. Дело в том, что нахождение решения путем разложения по малому параметру, характеризующему суммарную плотность заряда в плазме, может быть проведено вне зависимости от того, является система уравнений переопределенной или нет (т.е. опущен ток смещения или нет). В частности, для случая возбуждения движений однородной замагниченной плазме (и с учетом тока смещения) такой метод решения рассматривался в работах [1, 2]. При этом те составляющие уравнений движения для ионов и электронов, которые содержат электрическое поле в виде $div\, E$, заменяются аналогичной составляющей для всей плазмы (она не содержит $div\, E$) и соотношением $div\, E = 0$ в остальных уравнениях. Для случая поперечных полю движений в однородной плазме эти уравнения выписаны ниже. Такое приближение как раз эквивалентно упомянутой процедуре отбрасывания уравнения Пуассона; очевидно, что оно не меняет общего числа уравнений.

В связи со сказанным возникает вопрос, насколько важным является то обстоятельство, что применение МГД уравнений связано с нахождением решения переопределенной системы уравнений. При каких-то условиях присутствие дополнительного соотношения (3') может быть несущественным.

Рассмотрим, например, линейную задачу возбуждения поперечных однородному магнитному полю движений в полностью ионизованной, однородной, излучающей энергию плазме. Считаем, что параметр замагниченности $x_\alpha = |\omega_\alpha \tau_\alpha| \gg 1$ и поправки порядка x_α^{-2} несущественны. Здесь ω_α – ларморова частота и τ_α – характерное время между столкновениями. Принимаем еще, что рассматриваемая мода характеризуется пространственно-временной зависимостью типа $exp(i\omega t + ik\cdot r)$, где $k \perp B$, k – волновой вектор и t – время. Удобно все частоты выражать в единицах электронной плазменной частоты ω_p, полагая, что $i\omega/\omega_p = \sigma$, $\omega_\alpha/\omega_p = \Omega_\alpha$, $k^2 c_s^2/\omega_p^2 = \vartheta_s^2$, $k^2 T_1/m_1 \omega_p^2 = \vartheta_1^2 (div\, v_\alpha)/\omega_p = D_\alpha$, $(b\, rot\, v_\alpha)/\omega_p = \Xi_\alpha$, где $c_s = (5p/3\rho)^{1/2}$ – звуковая скорость и $b = B/B$.

Если исходными являются точные уравнения Максвелла и двухжидкостные уравнения Брагинского [3], то дисперсионное соотношение для σ вытекает из условия разрешимости системы уравнений (5), (7) и (8) работы [1]. Здесь последние два уравнения вытекают из уравнения движения в результате применения к нему операций div и rot. Если рассматривать движение электронов и всей плазмы, то эти уравнения запишутся в виде

$$(1+\sigma/y_1)(D_1 - D_2) = \vartheta_1^2(\sigma\theta_1 - D_1) - \sigma(\sigma + G_1)D_1 + \sigma(\Omega_1 - J_1)\,\Xi_1, \tag{4}$$

$$\Omega_1 D_1 + (\sigma s + 1/y_1)(\Xi_1 - \Xi_2) = J_1 D_1 - (\sigma + I_1)\Xi_1 + 3\vartheta_1^2\theta_1/2x_1, \tag{5}$$

$$(\sigma^2\rho+\sigma\sum\rho_\alpha G_\alpha+\vartheta_s\rho)D_1-\sigma\rho_1\Omega_1(\Xi_1-\Xi_2)=-\sigma\sum\rho_\alpha J_\alpha\Xi_\alpha+$$
$$+[\sigma\rho_2(\sigma+G_2)+5p_2\rho_1\vartheta_1/3p_1](D_1-D_2)+$$
$$+\rho_1\vartheta_1\sum[(p_\alpha/p_1)(\sigma\theta_\alpha+2D_\alpha/3)], \tag{6}$$

$$\sigma\sum\rho_\alpha\Xi_\alpha=\sum\rho_\alpha(J_\alpha D_\alpha-I_\alpha\Xi_\alpha)-\rho_1\Omega_1(D_1-D_2), \tag{7}$$

где $y_1=\omega_p\tau_1$, $s=1/(\sigma^2+k^2c^2/\omega_p^2)$, $\rho=\sum\rho_\alpha=\rho_1+\rho_2$, $G_\alpha=g_\alpha\vartheta_\alpha y_\alpha$, $J_\alpha=\vartheta_\alpha/2\Omega_\alpha$, $I_\alpha=i_\alpha\vartheta_\alpha y_\alpha/x_\alpha^2$ – величины, обусловленные вязкостью среды, θ_α – относительная возмущенная температура, определяющаяся формулами (5) работы [1], и g_α, i_α – постоянные. Будем рассматривать низкочастотные движения плазмы, когда $s\approx\omega_p^2/k^2c^2\gg 1$ и параметры σ, ϑ_1 и ϑ_s являются малыми величинами. При таких условиях из уравнения (4) вытекает, что отношение $|(D_1-D_2)/D_1| = |\rho_e/\rho_{e1}|\ll 1$. С учетом последнего неравенства уравнение (4) можно приближенно заменить на $D_1=D_2$. Это эквивалентно рассматривавшейся выше процедуре отбрасывания уравнения Пуассона.

В случае, когда речь идет о приблизительно адиабатических движениях и пренебрежимо малых потерях на излучение, будем иметь $\theta_\alpha\approx-2D_\alpha/3\sigma$, что выполняется, если

$$\left|\frac{\vartheta_1}{x_2\Omega_1\sigma}\right|=\left|\frac{k^2T_1}{m_1x_2\omega_1\omega}\right|\ll 1,\quad \left|\frac{\rho_1}{\rho_2 y_1\sigma}\right|\ll 1. \tag{8}$$

При тех частотах, которые даются приведенной ниже формулой (9), несущественны как члены с J_α и I_α, так и другие члены в правых частях уравнений (5)–(7). Опуская еще содержащие y^{-1} поправки, получим приближенно

$$D_1\approx D_2,\quad \sigma_s(\Xi_1-\Xi_2)\approx-\Omega_1D_1,\quad \mathrm{rot}\,v\approx 0,$$

$$\frac{i\omega}{k}\approx-\frac{k}{2\rho}\sum g_\alpha\tau_\alpha p_\alpha\pm\left\{\left(\frac{k}{2\rho}\sum g_\alpha\tau_\alpha p_\alpha\right)^2-v_A^2-c_s^2\right\}^{1/2}, \tag{9}$$

где $v_A=B/(4\pi\rho)^{1/2}$. В случае однозарядных ионов $g_1=0.24$ и $g_2=0.32$. Справедливость формулы (9) подтверждается также сравнением с точными решениями системы уравнений (4)–(7).

Приведенные соотношения свидетельствуют, что в обсуждаемом случае, как и в случае холодной плазмы (см. [4]), среда может рассматриваться как одножидкостная. В отсутствие вязкости формула (9) дает обычное выражение для частоты поперечных магнитозвуковых волн в плазме. Под воздействием вязкости среды коротковолновые возмущения становятся экспоненциально затухающими, что имеет место при $k\geqslant k_0$, где k_0 определяется условием равенства нулю подкоренного выражения в формуле (9). При $k = k_0$ длина свободного пробега заряженных частиц l_α и характерное время электрон – ионных столкновений τ_1 становятся сравнимыми соответственно с длиной волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ и временем затухания $\tau_0 = (1/i\omega)_{k=k_0}$. Например, в случае, когда температура плазмы равна $6 \cdot 10^5$ K, концентрация электронов $n_1 = 10^{14}$ см$^{-3}$, поле $B = 10^3$ Гс и заряд $e_2 = |e_1|$, получим $\lambda_0 \approx 15$ см $\approx 0.4\ l_\alpha$, $\tau_0 \approx 1.1 \cdot 10^{-7}$ с $\approx 0.9\ \tau_1$.

Ситуация становится более сложной, если речь идет о возбуждении неадиабатических движений с очень низкими частотами, например тепловых мод. Из уравнения (7) видно, что в зоне малых значений параметра σ могут быть существенными малые поправки, обусловленные непотенциальными вязкими силами.

Рассмотрим в связи с этим приведенные в таблице работы [1] данные о характере тепловой неустойчивости в случае замагниченной, излучающей энергию плазмы, соответствующей верхней хромосфере Солнца. Здесь речь идет о перпендикулярных магнитному полю смещениях среды. Экстраполируя упомянутые данные, найдем, что существуют такие значения волнового числа $k = k_*$ при которых величина σ и отношение $|D_1/\Xi_\alpha|$ одновременно обращаются в нуль. Подобные полностью вихревые возмущения можно рассчитать при помощи уравнений (4)–(7), если перейти в них к переменным D_α/σ, $/\Xi_\alpha$ и устремить σ к нулю. В предельном случае нулевых σ переменные D_α/σ и θ_α остаются конечными величинами, при этом вместо обычного уравнения $rot\, v \approx 0$, эквивалентного соотношению $\sum \rho_\alpha \Xi_\alpha = 0$, теперь будет $\sum \rho_\alpha I_\alpha \Xi_\alpha = 0$. Из условия разрешимости полученной системы уравнений найдем величину k_*. Например, в случае модели А упомянутой таблицы $k_* = 1.7 \cdot 10^{-4}\ \omega_p/c$. Для таких вихревых возмущений $div\, v = 0$, тогда как $rot\, v$ является конечным. В противоположность этому в МГД приближении было бы $rot\, v = 0$.

В рассмотренном случае низкочастотных движений двухжидкостные уравнения не приводятся к одножидкостным, хотя отношение j/j_d является малой величиной. Существенным является также вывод о возможности колебательной тепловой неустойчивости [1, 2]. Если бы мы использовали МГД приближение, то неустойчивость была бы экспоненциальной. В случае верхней хромосферы Солнца периоды колебательно растущих мод могут находиться в районе нескольких минут и выше, а длина волны порядка километра [1]. Если угол между направлением равновесного магнитного поля и волновым вектором близок, но не равен прямому углу, то обычно происходит даже расширение области колебательной неустойчивости, хотя при дальнейшем уменьшении этого угла имеет место переход к экспоненциальной неустойчивости [2].

Изложенное свидетельствует в пользу того, что область пригодности МГД приближения может быть ограничена не только со стороны высоких, но также и низких частот.

Список литературы

[1] Вандакуров Ю.В. // Письма в Астрономич. журн. 1991. Т. 17. В. 1. С. 86.
[2] Вандакуров Ю.В. // Письма в Астрономич. журн. 1991. Т. 17. В. 11. С. 1031.
[3] Брагинский С.И. // Вопросы теории плазмы. 1963. В. 1. С. 183.
[4] Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. Электродинамика плазмы. М., 1974.

Физико-технический
институт им. А.Ф. Иоффе
РАН, С.-Петербург

Поступило в Редакцию
15 апреля 1993 г.