Письма в ЖТФ, том 19, вып. 10 26 мая 1993 г.

01; 10

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НА ДИНАМИКУ СГУСТКА ЧАСТИЦ

Н.Д. Наумов

Точные решения самосогласованных уравнений, описывающие движение сгустка заряженных частиц в электромагнитном поле, представляют несомненный интерес как для тестирования расчетных программ, так и для проведения оценок [1]. В рамках гидродинамического описания такие решения можно получить для автомодельных движений [2]. В этом случае при введении автомодельных переменных система гидродинамических уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь применяется другой способ – вначале строится решение нестационарного уравнения Власова для холодного газа кулоновских частиц, а затем находятся выражения для плотности частиц и скорости.

Рассмотрим движение шарообразного сгустка частиц в постоянном и однородном электрическом поле, направленном вдоль оси x. Плотность частиц запишем в виде

$$n(\vec{x},t)=n_p C(|\vec{X}|/R,a)/R^3, \qquad \vec{X}=\vec{x}-\vec{S}. \tag{1}$$

Здесь $C(x,a)$ – единичная внутри круга радиуса a функция, $R=R(t)$, $\vec{S}=\vec{S}(t)$ – некоторые функция времени. Если взять для определенности $R_0\equiv R(0)$ = 1, то n_p является начальной плотностью частиц. Пренебрегая собственным магнитным полем, для одиночной частицы найдем

$$\ddot{x}=\omega_p^2 X/3R^3+eE/m, \qquad \ddot{y}=\omega_p^2 Y/3R^3, \qquad \ddot{z}=\omega_p^2 Z/3R^3,$$

где $\omega_p^2=4\pi n_p e^2/m$, e,m – соответственно заряд и масса частицы, Переходя к переменной $\xi=X/R$, из первого уравнения получим

$$\ddot{\xi}R+2\dot{\xi}\dot{R}+\ddot{S}_x=\xi(\ddot{R}-\omega_p^2/3R^2)+eE/m. \tag{2}$$

Это уравнение упрощается, если подчинить функции R, S_x условиям:

$$\ddot{R}=\omega_p^2/3R^2, \qquad \ddot{S}_x=eE/m.$$

Тогда, как нетрудно убедиться непосредственной проверкой,

$$I_x = X/R - J_x \int_0^t dt'/mR^2, \qquad J_x = (p_x - m\dot{S}_x)R - mXR$$

являются интегралами движения. Аналогичные выражения можно найти и для движения вдоль остальных осей. Поэтому функция распределения

$$F(\vec{x}, \vec{p}, t) = n_p \delta(J_x)\delta(J_y)\delta(J_z)C(\chi, a), \quad \chi^2 = I_x^2 + I_y^2 + I_z^2, \tag{3}$$

будет решением уравнения Власова, поскольку (3) приводит к выражению (1) для плотности частиц. Скорость равна

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = (\dot{\vec{S}} + \vec{X}\dot{R}/R)C(|\vec{X}|/R, a)/R^3.$$

Таким образом, движение сгустка заключается в перемещении его центра по закону движения частицы в электрическом поле с одновременным увеличением радиуса под действием пространственного заряда; в частности, при $\dot{R}_0 = 0$ размер сгустка можно определить из соотношения

$$\sqrt{R(R-1)} + \ln\left(\sqrt{R} + \sqrt{R-1}\right) = \sqrt{2/3}\,\omega_p t.$$

Эта зависимость на рисунке изображена кривой 2.

Если наряду с электрическим полем $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$ присутствует также постоянное и однородное магнитное поле $\vec{B} = (0, 0, B)$, то под влиянием сил магнитного сжатия продольный и поперечный размеры сгустка будут различными, поэтому будем искать решение в виде вытянутого эллипсоида вращения с полуосями aR, bL:

$$n(\vec{x}, t) = n_p C(\chi, 1)/LR^2, \quad \chi^2 = \eta^*\eta/a^2R^2 + Z^2/b^2L^2, \quad \eta = X + iY. \tag{4}$$

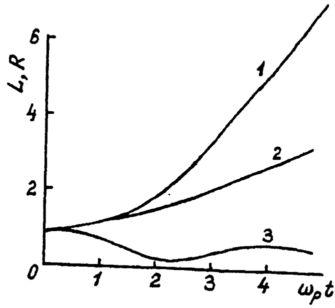
Тогда уравнения движения частицы в совокупности внешнего и собственного полей имеют вид

$$\ddot{x} = \omega\dot{y} + \varkappa\omega_p^2 X + eE_x/m, \quad \ddot{y} = \varkappa\omega_p^2 Y - \omega\dot{x}, \quad \ddot{z} = \lambda\omega_p^2 Z + eE_z/m.$$

Введены обозначения: $\omega = eB/mc$, $\epsilon^2 = 1 - a^2R^2/b^2L^2$, $\lambda = 1/LR^2 - 2\varkappa$,

$$\varkappa = \frac{1}{2\epsilon^2 LR^2}\left(1 - \frac{1-\epsilon^2}{2\epsilon}\ln\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right).$$

Для переменных $\xi = \eta/\Lambda$, $\zeta = Z/L$ найдем аналогичные (2) уравнения, которые позволяют получить интегралы движения



Зависимость размеров сгустка от времени.

$$K=\left[\Lambda(R_x+iP_y)-m\dot{\Lambda}\eta\right]e^{i\omega t},\qquad H=\eta/\Lambda-K\int_0^t dt' e^{-i\omega t}/m\Lambda^2,$$

$$I_z=Z/L-J_{z_0}\int_0^t dt'/mL^2,\qquad J_z=R_zL-mZ\dot{L}.$$

Здесь $\vec{P}=\vec{p}-m\dot{\vec{S}}$, функции Λ, L удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\Lambda}+i\omega\dot{\Lambda}=\varkappa\omega_p^2\Lambda,\qquad \ddot{L}=\lambda\omega_p^2 L, \tag{5}$$

а $\vec{S}$ совпадает с известным [3] законом движения частицы в однородном поле. Полагая $\Lambda=Re^{i\psi}$, $H=I_x+il_y$, $K=J_x+iJ_y$, нетрудно видеть, что в этом случае из функции распределения (3) следует выражение (4) для плотности частиц.

Воздействие магнитного поля проявляется не только в изменении размеров сгустка, но также и в его вращении. Действительно, если в системе отсчета, связанной с центром сгустка, ввести цилиндрические координаты ρ, φ, то K принимает вид

$$K=\left[RP_\rho-m\rho\dot{R}+iR(P_\varphi-m\rho\dot{\psi})\right]e^{i\sigma},\qquad \sigma=\varphi+\psi+\omega t.$$

Отсюда следует, что в этой системе отсчета радиальная и азимутальная компоненты скорости соответственно равны $\rho\dot{R}/R$, $\rho\dot{\psi}$. Для R, ψ из (5) найдем:

$$\ddot{R}-(\varkappa\omega_p^2+\omega\dot{\psi}+\dot{\psi}^2)R=0,\qquad \dot{\psi}=(\dot{\psi}_0+\omega/2)R^2-\omega/2, \tag{6}$$

т.е. скорость вращения зависит от поперечных размеров сгустка, за исключением случая $\dot{\psi}_0=-\omega/2$, когда скорость вращения сгустка не изменяется в процессе движения. Результаты численного решения системы уравнений для L, R в случае

$$a=b,\ R_0=L_0=1,\ \dot{R}_0=\dot{L}_0=0,\ \dot{\psi}_0=-\omega/2 \qquad (7)$$

и $\omega^2=2\omega_p^2$ представлены на рисунке кривыми 1 и 3, что иллюстрирует удержание частиц в поперечном направлении.

Изложенная схема может быть использована для описания динамики заряженных частиц в ловушке Пеннинга и в радиочастотной ловушке. В этих устройствах вместо однородного электрического поля приложено неоднородное поле, генерируемое потенциалом $\Phi=A(2z^2-x^2-y^2)$, причем в радиочастотной ловушке для удержания частиц в поперечном направлении вместо магнитного поля используется периодическое изменение электрического поля, т.е. $A=A_1+A_2\cos\Omega t$ [4].

Рассмотрим вкратце движение сгустка частиц в ловушке Пеннинга. Закон движения одиночной частицы, согласно которому перемещается центр сгустка, получен в [5]. Для изменения размеров эллипсоида найдем аналогичные (5), (6) уравнения, где надо заменить $\varkappa\to\varkappa+2eA/m\omega_p^2$, $\lambda\to\lambda-4eA/m\omega_p^2$. Если наряду с условиями (7) $A=m\omega^2/24e$, то будут сохраняться заданные вначале скорость вращения и шарообразная форма сгустка, причем для радиальных колебаний получается уравнение

$$6\ddot{R}+\omega^2R-2\omega_p^2/R^2=0.$$

Решение этого уравнения выражается через эллиптические интегралы; в случае $\omega^2/2\omega_p^2=1+\delta$, где δ – малая величина, соотношение

$$R=1-\frac{2}{3}\,\delta\sin^2\delta\left(1+\frac{\delta}{6}\right)\frac{\omega_p t}{2}$$

приближенно описывает пульсации сгустка.

Список литературы

[1] Молоковский С.И., Сушков А.Д. Интенсивные электронные и ионные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1991. 303 с.
[2] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.
[3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
[4] Тошек П.Э. // УФН. 1982. Т. 137. В. 1. С. 173–184.
[5] Павленко Ю.Г. Гамильтоновы методы в электродинамике и в квантовой механике. М.: МГУ, 1985. 303 с.

Поступило в Редакцию
1 апреля 1993 г.