01

УНИВЕРСАЛЬНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СКИН-ЭФФЕКТА В СИСТЕМАХ ДЛИННЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДНИКОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО РЕЖИМА ПРОПУСКАНИЯ ТОКА

С.В.Юферев

В последние годы для расчета тонких скин-слоев в системах проводников широкое распространение получил метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) [1], обеспечивающий для случая синусоидального изменения внешнего поля практически идеальную схему решения задачи: для гармонических в области диэлектрика функций (например, напряженность электрического поля, скалярный и векторный потенциалы магнитного поля) записывается интегральное уравнение по поверхности проводника с использованием фундаментального решения уравнения Лапласа, а лишние неизвестные исчключаются посредством граничных импедансных соотношений [2–5]. В случае импульсного режима пропускания тока указанные граничные соотношения могут быть получены из аналитического решения одномерного (в приближении пограничного слоя) уравнения диффузии поля в проводник [6]. Однако построенные по рассмотренной схеме математические модели имеют один общий недостаток: интегральные уравнения содержат параметры режима пропускания тока, поэтому при изменении указанных параметров интегральные уравнения необходимо решать заново, а для импульсного режима и на каждом шаге по времени. Поэтому представляется интересным и практически важным построить формулировку задачи, в которой интегральные уравнения для данной системы проводников определяются только ее геометрическими параметрами и не зависят от способа пропускания тока.

Рассмотрим систему k длинных параллельных проводников, в которых от внешних источников протекают квазистационарные токи силой $\mathbf{I}_i(t)$, $\mathbf{I_i} = \mathbf{a}_i I(t)$, $i = 1.2\ldots k$. Магнитную проницаемость проводников и разделяющей их диэлектрической среды будем считать постоянной и равной 1. Введем локальную прямоугольную декартову систему ткоординат скин-слоя (ξ, η), связанную с контуром поперечного сечения проводника (ξ — касательная координата, η — нормальная координата, направленная вглубь проводника; характерными масштабами изменения указанных переменных будем считать, соответственно, минимальный радиус кривизны поверхности проводника D и толщину скин-слоя σ).

Дальнейшие преобразования будем проводить в рамках двух независимых формализмов: $\mathbf{E}-\mathbf{H}$ и $\mathbf{A}-\mathbf{Y}$ ($\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{A}$ — напряженность и векторный потенциал магнитного поля, $\mathbf{Y}$ — поверхностная плотность тока).

В случае длинных параллельных проводников вектора **I**, **E**, **Y**, **A** имеют только одну компоненту и в плоской постановке их можно считать скалярами. Функции E и A представлены в виде [7]:

$$E(\xi,\eta,t) = E_c(t) + E_\epsilon(\xi,\eta,t);$$

$$A(\xi,\eta,t) = A_c(t) + A_\epsilon(\xi,\eta,t),$$

где индексы "c" и "ϵ" обозначают приложенное и индуцированное поля соответственно.

Перейдем к безразмерным переменным, выбрав следующие масштабы:

$$[I] = I_*; \quad [t] = \tau; \quad [\xi] = D; \quad [\eta] = pD; \quad p = (\tau/\alpha\mu_0)^{-1/2}D^{-1};$$

$$[E] = \mu_0 I_* \tau^{-1}; \quad [H] = I_* D^{-1}; \quad [Y] = I_* D^{-1}; [A] = I_*, \tag{1}$$

где I_*, τ — масштабы полного тока и времени соответственно. При этом в качестве последнего естественно выбрать длительность импульса τ_u в случае импульсного режима пропускания тока или $2\omega^{-1}$ в случае гармонического изменения тока. Параметр p в (1) является малым, поскольку пропорционален δ/D.

Главным отличием предлагаемого подхода от рассмотренной выше стандартной схемы является представление искомых функций в виде разложений по малому параметру p:

$$F = F_0 + pF_1 + 0(p^2), \tag{2}$$

где F обозначает любую из функций E_c, E_ϵ, H_ξ в случае **E-H** формализма, или A_c, A_ϵ, Y для **A-Y** формализма. Первый член разложений (2) является решением задачи в т.н. высокочастотном пределе, а второй дает поправку (порядка приближения пограничного слоя), описывающую процесс индукционного перераспределения параметров поля вдоль поверхности проводника со временем [6]. Полученные уравнения для коэффициентов разложений, в отличие от формулировок для исходных функций, допускают разделение переменных на "пространственные" и "временные" компоненты для любого режима пропускания тока. При этом оказывается, что все 12 искомых функций для обоих формализмов (E_{cm}, E_{em}, $H_{\xi m}$, A_{cm}, A_{em}, Y_m, $m = 0.1$) могут быть выражены комбинациями лишь четырех "пространственных" (Q_m, $W_m(\xi)$, $m = 0.1$) и двух "временных" ($T_m(t)$, $m = 0.1$) функций. Указанные комбинации помещены в таблицу. Функции $T_m(t)$ имеют вид:

$$T_0(t) = \begin{cases} \tilde{I}\exp(2jt) & \text{для гармонического режима} \\ I(t) & \text{для импульсного режима} \end{cases} \tag{3}$$

$$T_1(t) = \begin{cases} \frac{1-j}{2}\tilde{I}\exp(2jt) & \text{для гармонического режима} \\ -(2\pi)^{-1/2}\int\limits_0^t \frac{\partial I(\tau)}{\partial\tau}(t-\tau)^{1/2}d\tau & \text{для импульсного режима,} \end{cases} \tag{4}$$

	A-Y подход			E-H подход		
	A_{em}	A^0_{em}	Y_m	E_{em}	E^0_{em}	$(H^0_\xi)_m$
Высокочастотный предел ($m = 0$)	$Q_0 T_0$	0	$W_0 T_0$	$-Q_0 \frac{\partial T_0}{\partial t}$	0	$-W_0 T_0$
Приближение пограничного слоя ($m = 1$)	$-Q_1 T_1$	$-W_0 T_1$	$-W_1 T_1$	$Q_1 \frac{\partial T_1}{\partial t}$	$W_0 \frac{\partial T_1}{\partial t}$	$W_1 T_1$

а функции Q_m, W_m определяются решением систем интегральных уравнений:

$$\begin{cases} Q_{0i} - \sum_{j=1L_j}^{K} \oint G W_0 d\xi' = 0 \\ \oint W_0 d\xi' = a_i, \qquad i = 1 \ldots K \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} Q_{1i} - \sum_{j=1L_j}^{K} \oint G W_1 d\xi' = -cW_0 - \sum_{j=1L_j}^{K} \oint W_0 \frac{\partial G}{\partial \eta} d\xi' \\ \oint W_1 d\xi' = 0. \qquad i = 1 \ldots K. \end{cases} \tag{6}$$

где L_i — контур поперечного сечения i-го проводника, а $G(\xi', \xi)$ — фундаментальное решение Лапласа в плоскости диэлектрика.

Таким образом, процедура вычисления распределений функций E, A, H и Y вдоль поверхности проводников состоит в следующем: из решения систем (5)-(6) находятся функции Q_m, W_m, и коэффициенты E_m, $(H^0_\xi)_m$, A_m, Y_m определяются умножением на функции T_m согласно комбинациям, приведенным в таблице. Коэффициенты подставляются в разложения (2) и размерные результаты получаются умножением на соответствующие масштабы (1).

Распределения функций E_{em} и A_{em} по толщине скин-слоя определяются аналитическими решениями одномерного уравнения диффузии с функциями E^0_{em} и A^0_{em} в качестве граничных условий (индекс "0" обозначает величины на поверхности проводника).

Подчеркнем основные достоинства построенной модели:

1. Вид интегральных уравнений, включая правую часть, не зависит от режима пропускания тока, а определяется только геометрическими параметрами рассматриваемой системы проводников. Поэтому, решив единожды интегральные уравнения для данной системы проводников и умножая полученный результат на соответствующую "временную" функцию, можно получать решения для любого режима пропускания тока.

2. Для импульсного режима пропускания тока (как и в случае гармонического его изменения) отпадает необходимость решать интегральные уравнения на каждом шаге по времени.

3. Интегральные уравнения для обоих приближений отличаются лишь видом правой части и могут быть решены посредством одной и той же программной процедуры, поэтому не возникает новых вычислительных сложностей по сравнению с решением задачи в высокочастотном пределе.

4. Интегральные уравнения едины для **E-H** и **A-Y** базовых формализмов.

В заключение автор выражает глубокую признательность Г.А.Шнеерсону и В.С.Юфереву за ценные замечания и внимание к работе.

Список литературы

[1] *Brebbia C.A., Telles J.S., Wrobel L.C.* Boundary Element Techniques. Springer Verlag, 1984. 466 p.
[2] *Nicolas A.* // IEEE Trans. on Magn. 1988. V. 24. N 1. P. 130–133.
[3] *Subramaniam S., Hoole S.R.H.* // IEEE Trans. on Magn. 1988. V. 24. N 6. P. 2503–2505.
[4] *Ahmed M.T., Lavers J.D., Burke P.E.* // IEEE Trans. on Magn. 1989. V. 25. N 5. P. 3937–3939.
[5] *Deeley E.M., Xiang J.* // IEEE Trans. on Magn. 1990. V. 26. N 5. P. 2762–2764.
[6] *Юферев С.В., Юферев В.С.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 11. С. 23–31.
[7] *Cao M., Biringer P.P.* // IEEE Trans. on Magn. 1990. V. 26. N 5. P. 2768-2770.

Физико-технический институт
им. А.Ф.Иоффе РАН
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
12 мая 1993 г.