

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ТЕПЛООВОГО САМОВОЗДЕЙСТВИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Е.К.Гусева, Л.К.Зарембо, С.В.Титов, К.Э.Тоом

Ультразвуковые методы исследования конечных колебаний акустических резонаторов позволяют обнаруживать нелинейные поправки к закону теплоотдачи при существенно незначительных (несколько градусов) нагревах [1]. При больших амплитудах деформации резонаторов дрейф частоты связан с нелинейностью и температурным коэффициентом скорости. Однако благодаря безынерционности нелинейных эффектов и конечности времени изменения теплового ухода частоты эти эффекты удается разделить.

Настоящая работы посвящена анализу динамики саморазогрева акустических резонаторов, в том числе с выходом на нестационарный режим, при всевозможных сочетаниях параметров линейной (α) и нелинейной (β) теплоотдачи как по абсолютной величине, так и по знаку.

Для анализа воспользуемся уравнением теплового баланса, описывающим процесс квазистационарного нагрева резонатора источником постоянной плотности акустической мощности q с последующим выключением источника в момент времени τ_1 :

$$\rho CV \frac{dT}{D\tau} = -\alpha S(T - T_0) - \beta S(T - T_0)^2 + qV [\theta(\tau) - \theta(\tau - \tau_1)], \quad (1)$$

где T и τ — температура и текущее значение времени, α и β — коэффициенты линейной и нелинейной теплоотдачи, V и S — объем и площадь поверхности резонатора, $\theta(y)$ — единичная функция Хевисайда, равная 0 при $y < 0$ и 1 при $y > 0$.

Если время τ_1 достаточно велико, то при некоторых соотношениях между α , β , q , V и S температура резонатора может достигать стационарного значения. Положив в (1) $\frac{dT}{d\tau} = 0$ и вводя $\xi = T - T_0$, где T_0 — начальная температура до включения мощного звука, получим

$$\xi = \frac{1}{2} \left[-\frac{\alpha}{\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2} + 4\frac{qV}{\beta S}} \right]. \quad (2)$$

Покажем теперь, при каких соотношениях между параметрами система выйдет на стационарный режим, а при каких произойдет неконтролируемый саморазогрев.

1. Если $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, а также $\alpha > 0$, $\beta < 0$ при $\alpha^2 + 4\beta \frac{qV}{S} > 0$, то решение, найденное путем интегрирования (1), имеет вид

$$\xi = \frac{2\xi^0 \left(1 - e^{-\frac{\tau\varphi}{\tau_0}}\right)}{1 + \varphi - (1 - \varphi)e^{-\frac{\tau\varphi}{\tau_0}}}, \quad (3)$$

где

$$\varphi = \left(4\frac{\beta}{\alpha}\xi^0 + 1\right)^{1/2} = (1 + 2\varepsilon)^{1/2}, \quad \varepsilon = 2\frac{\beta}{\alpha}\xi^0,$$

$$\tau_0 = \frac{\rho CV}{\alpha S}, \quad \xi^0 = \frac{q\tau_0}{\rho C}$$

— линейный стационарный разогрев (при $\beta = 0$); $\xi_{ст} = \frac{2\xi^0}{1+\varphi}$ — нелинейный стационарный разогрев, находящийся как предел соотношения (3) при $\tau_1 \rightarrow \infty$.

2. Если $\alpha > 0$, $\beta < 0$ и $\alpha^2 + 4\beta \frac{qV}{S} = 0$, то при интегрировании соотношения (1) получаем

$$\xi = \frac{2\frac{\tau}{\tau_0}\xi^0}{\frac{\tau}{\tau_0} + 2}; \quad (4)$$

отсюда следует

$$\xi_{ст} = \lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} \xi = 2\xi^0.$$

Следовательно, при $\beta < 0$ нелинейный стационарный разогрев выше, чем при $\beta > 0$.

3. Если $\alpha < 0$, $\beta > 0$ и $\alpha^2 + 4\beta \frac{qV}{S} > 0$, то при интегрировании соотношения (1) получаем

$$\xi = \frac{2\tilde{\xi}^0 \left(1 - e^{-\frac{\tau\varphi}{\tilde{\tau}_0}}\right)}{(1 + \varphi)e^{-\frac{\tau\varphi}{\tilde{\tau}_0}} + \varphi - 1}, \quad (5)$$

где

$$\tilde{\tau}_0 = -\tau_0, \quad \tilde{\xi}^0 = -\xi^0, \quad \xi_{ст} = \lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} \xi = \frac{2\tilde{\xi}^0}{\varphi - 1}, \quad (\varphi > 1).$$

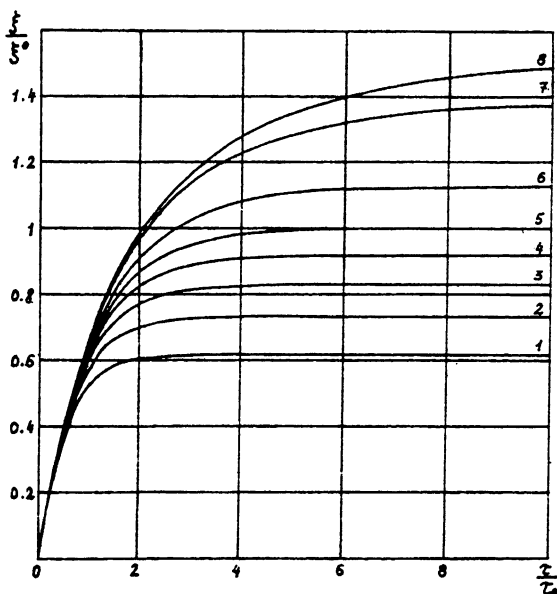


Рис. 1. Саморазогрев акустического резонатора при различных значениях параметра ϵ для $\alpha > 0, \beta > 0$ и $\alpha > 0, \beta < 0, \alpha^2 + 4\beta \frac{qV}{S} \geq 0$. Кривые 1-8 отвечают соответственно значениям $\epsilon = 2, 1, 0.5, 0.2, 0, -0.2, -0.4, -0.45$.

4. Представляет интерес и такой “экзотический” случай, реализуемый при $\alpha > 0, \beta < 0$ и $\alpha^2 + 4\beta \frac{qV}{S} < 0$. Здесь интегрирование соотношения (1) приводит к выражению

$$\xi = \frac{2\xi^0 \operatorname{tg} \left(-\frac{\tau}{\tau_0} \frac{\psi}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(-\frac{\tau}{\tau_0} \frac{\psi}{2} \right) - \psi}, \quad (6)$$

где $\psi = [-(1 + 2\epsilon)]^{1/2}, 1 + 2\epsilon < 0$.

В данном случае температура не стремится к стационарному значению и возможен неконтролируемый саморазогрев.

Проиллюстрируем полученные зависимости графиками. На рис. 1 приведены графики нормированного прироста температуры акустического резонатора $\frac{\xi}{\xi^0}$ при разных $\epsilon = 2 \frac{\beta}{\alpha} \xi^0$ ($\alpha > 0$). Видно, что при $\epsilon > 0$ (кривые 1-4) нелинейный стационарный разогрев $\xi_{\text{ст}}$ меньше линейного ξ^0 , тогда как при $\epsilon < 0$ (кривые 6-8) нагрев сопровождается уменьшением теплоотдачи ($\beta < 0$), что приводит к увеличению нелинейного стационарного разогрева $\xi_{\text{ст}} > 2\xi^0$. Для

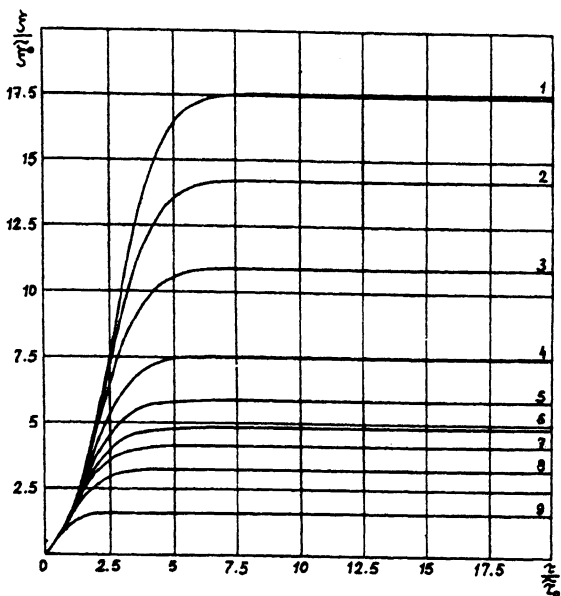


Рис. 2. Саморазогрев акустического резонатора при различных значениях параметра ε для $\alpha < 0$, $\beta > 0$.

Кривые 1-9 отвечают соответственно значениям $\varepsilon = 0.12, 0.15, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 2.0$.

$\varepsilon = 0$ (кривая 5) $\xi_{\text{ст}} = \xi^0$ и для $\alpha^2 + 4\beta \frac{qV}{S} = 0$ $\xi_{\text{ст}} = 2\xi^0$. На рис. 2 приведены температурные зависимости саморазогрева акустического резонатора при разных ε ($\alpha < 0$, $\beta > 0$ и $\alpha^2 + 4\beta \frac{qV}{S} > 0$), — формула (5). Введены новые обозначения $\tilde{\xi}^0 = -\xi^0$ и $\tilde{\tau}_0 = -\tau_0$, поскольку формально $\xi^0 < 0$ и $\tau_0 < 0$. Видно, что с увеличением значения ε нелинейный стационарный разогрев уменьшается за счет нелинейного тепловыделения (β). На рис. 3 показана динамика выхода на нестационарный режим разогрева акустического резонатора. Приводятся температурные кривые для случая положительной линейной теплоотдачи ($\alpha > 0$) при различных значениях и знаках параметра ε от 0.3 (кривая 1) до -0.7 (кривая 7). Кривые 1-3 построены по формуле (3) и отвечают выходу на стационарную температуру $\xi_{\text{ст}} = \frac{2\xi^0}{1+\varphi}$. Начиная с $\varepsilon \leq -0.5$ формула (3) становится непригодной, а интеграл от выражения (1) берется в форме соотношения (6). Возникает тепловая неустойчивость, приводящая к неконтролируемому саморазогреву. В частности, для $\frac{\tau\psi}{2\tau_0} < \pi$

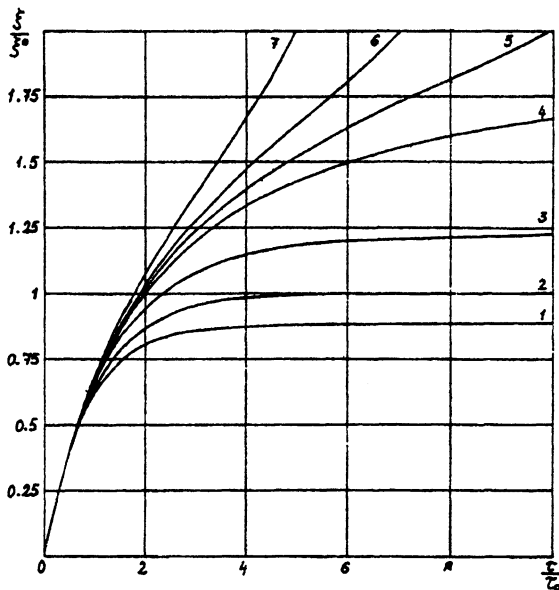


Рис. 3. Саморазогрев акустического резонатора при различных значениях параметра ε для $\alpha > 0$.

Кривые 1-7 отвечают соответственно значениям $\varepsilon = 0.3, 0, -0.3, -0.5, -0.55, -0.6, -0.7$.

($\tau > 0$) формулу (6) можно представить в виде

$$\xi = \frac{2\xi^0}{1 - \psi \operatorname{ctg} \left(-\frac{\tau\psi}{2\tau_0} \right)}, \quad (7)$$

что означает существенный рост $\frac{\xi}{\xi^0}$ при стремлении аргумента ctg к π .

В заключение кратко остановимся на механизме нагрева, сравнениях теории с экспериментом и физической реальностью рассмотренных случаев, в том числе "экзотического" неконтролируемого саморазогрева. По результатам экспериментов с поликристаллическими феррогранатами в форме пластин размерами $\sim 32 \times 13 \times 2$ мм на частоте нижней продольной планарной моды $f \sim 97\,023$ Гц при деформациях $\sim 5 \cdot 10^{-5}$ на электромагнитно-акустической автоматизированной установке [1,2], были сделаны следующие оценки. Определенное по линейному участку графика

$$\ln \frac{\Delta f_{\text{ст}}}{\Delta f_{\text{ст}} - \Delta f} = f(\tau)$$

τ_0 составило 3.6 ± 0.1 мин, а так как $\tau_0 \frac{\rho V C}{\alpha S}$, то линейный коэффициент теплоотдачи составил $\alpha = 13 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К} \pm 5\%$.

Контроль саморазогрева пластины мощным звуком осуществлялся термопарой и составил $\xi^0 \simeq 3^\circ$. Сравнение теоретических и экспериментальных кривых $\frac{\xi}{\xi^0} = f\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)$ дало $Z = 0.1$ ($Z = \frac{\beta \xi^0}{\alpha}$) и, следовательно, $\varepsilon = 2 \frac{\beta}{\alpha} \xi^0 = 0.2$. Отсюда нелинейный коэффициент теплоотдачи $\beta \simeq 0.4 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^2$. Таким образом, эксперименты отвечают $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\varepsilon = 0.2$ (см. рис. 1, кривая 4).

При стационарных колебаниях резонатора (а только такие здесь и рассматриваются) энергия, поступающая от источника, расходуется на а) излучение звука; б) потери в креплении; в) теплопередачу из-за нагрева резонатора под действием звука. Если пренебречь а) и б), то величина плотности мощности q в уравнении теплового баланса следующим образом связана с энергией, диссипируемой в полуволновом резонаторе за период ($E_{\text{дис}}$):

$$q = E_{\text{дис}} \cdot f = \frac{\rho v_0^2}{2Q} f = \frac{\rho \varepsilon_0^2 c^2 f}{Q},$$

где v_0 и ε_0 — амплитуды колебательной скорости и деформации резонатора, Q — акустическая добротность резонатора ($\sim 10^3$), c — скорость звука в феррогранате (~ 7000 м/с). Тогда при $\tau_0 = 216$ с, $C = 564$ Дж/кг · К, $\varepsilon \simeq 5 \cdot 10^{-5}$ стационарный разогрев составляет

$$\xi^0 = \Delta T_{\text{ст}} = \frac{q \tau_0}{\rho C} = \frac{\varepsilon_0^2 c^2 f \tau_0}{2CQ}, \quad \Delta T_{\text{ст}} = 2.3^\circ \text{С}.$$

Полученное значение согласуется по порядку величины с измеренным экспериментально термопарой разогревом феррограната на 3°С . "Экзотический" случай неконтролируемого саморазогрева, видимо, во всех мыслимых акустических экспериментах не имеет места. Возможно, что реальный интерес представляют вакуумированные кварцевые (или другие) резонаторы в радиотехнике. Теплоотдача в них идет по контактному соединению и, если она будет недостаточной, возможны существенные разогревы с уходом частоты.

Список литературы

- [1] Зарембо Л.К., Гусева Е.К., Титов С.В., Тоом К.Э. // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 7. С. 141-145.
- [2] Гусева Е.К., Титов С.В., Тоом К.Э. // Дефектоскопия. 1990. В. 12. С. 25-27.

Санкт-Петербургский
государственный технический
университет
Московский государственный
университет им. М.В.Ломоносова

Поступило в Редакцию
16 июля 1993 г.
