Письма в ЖТФ, том 19, вып. 18 26 сентября 1993 г.

01;03

О НЕКОТОРЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ РАСПАДА НЕЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

С.О.Ширяева, А.И.Григорьев

Задача расчета параметров распада незаряженной капли во внешнем электростатическом поле представляет значительный интерес в связи с проблемой разделения зарядов в грозовых облаках. Физический механизм реализации неустойчивости незаряженной капли по отношению к заряду, индуцированному внешним электрическим полем, качественно идентичен таковому для сильно заряженной капли в отсутствие внешнего поля [1,2]. Однако в отличие от случая рэлеевского распада сильно заряженной капли, изученного достаточно детально и теоретически и экспериментально (см., например, [2,3] и указанную так литературу), закономерности распада незаряженной капли во внешнем поле исследованы лишь экспериментально и только на качественном уровне.

1. Равновесная форма незаряженной капли в однородном электростатическом поле E_0 близка к сфероидальной. По мере увеличения напряженности внешнего поля капля все больше вытягвается, эксцентриситет e ее равновесной формы увеличивается. Связь эксцентриситета и напряженности поля в приближении первого порядка малости по квадрату эксцентриситета e^2 определяется формулой [1]:

$$e^2 \approx 9 \cdot w^2, \tag{1}$$

где $w^2 \equiv \frac{E_0^2 \cdot R}{16\pi\sigma}$ — безразмерный параметр Тейлора, характеризующий величину внешнего поля; R — радиус равновеликой по объему сферической капли; σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Когда напряженность поля E_0 достигает критического значения (при котором параметр Тейлора становится равным $w^2 \approx 0.0524$), капля претерпевает неустойчивость. При этом эксцентриситет капли начинает увеличиваться экспоненциально со временем. Поверхностная плотность электрического заряда на вершинах капли возрастает, что приводит к неустойчивости высоких мод капиллярных волн, суперпозиция которых вызывает формирование на противоположных вершинах капли эмиссионных выступов, с которых происходит отрыв маленьких сильно заряженных зарядами противоположных знаков капелек. После начала сброса массы в виде высокодисперсных заряженных капелек эксцентриситет исходной капли перестает увеличиваться и сохраняет постоянное значение ($e^2 \approx 0.7$).

В работе [4] показано, что критическое для развития неустойчивости значение параметра Тейлора является убывающей функцией эксцентриситета капли, и для $e^2 \approx 0.7$ критическая величина параметра Тейлора составляет всего $w^2 \approx 0.0383$. Потеря массы исходной каплей в результате эмиссии с ее полюсов маленьких капелек приводит к уменьшению параметра Тейлора за счет уменьшения R. Эмиссия будет продолжаться до тех пор, пока величина параметра Тейлора не станет меньше критического значения для данного фиксированного эксцентриситета (т.е. $w^2 \leqslant 0.0383$). После этого капля вновь станет устойчивой и вернется к равновесной сфероидальной форме с меньшим эксцентриситетом, определяемым формулой (1).

В связи с исследованием процессов микроразделения зарядов в грозовых облаках практический интерес представляют проблемы расчета спектров размеров и зарядов эмиттируемых капелек, нахождения суммарной величины разделенного заряда и суммарной потери массы исходной капли. Попытаемся из теоретических соображений получить оценки для перечисленных физических процессов распада капли, сформулировав задачу, аналогичную той, что рассматривалась в работе [3] для распыления сильно заряженной капли в отсутствие внешнего электрического поля.

2. Пусть капля радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости помещена во внешнее однородное электростатическое поле E_0, в котором она приняла сфероидальную форму с эксцентриситетом e. Пусть в результате развития неустойчивости с обоих полюсов исходной капли оторвалось одновременно по одной маленькой заряженной капельке. Предполагая осевую симметрию задачи, а также геометрическую симметрию относительно плоскости, проходящей через экватор капли, будем считать, что для обеих отрывающихся капелек одинаковы радиусы r и величины заряда q, а знаки зарядов у них противоположны. В итоге после акта эмиссии (т.е. после выброса двух дочерних капелек с противоположных концов родительской капли) исходная капля остается электронейтральной, уменьшится только ее размер и величина параметра Тейлора. Выпишем полное изменение потенциальной энергии системы, произошедшее вследствие описанного акта эмиссии:

$$\Delta F = 4\cdot\pi\cdot\sigma\cdot R^2\cdot\mathbf{A}(e)\left\{\left[1-2\frac{r^3}{R^3}\right]^{2/3}-1\right\}+8\cdot\pi\cdot\sigma\cdot r^2\cdot\mathbf{A}(e_0)+$$

$$+2\cdot\frac{q^2}{2\cdot r}\cdot\mathbf{B}(e_0)+2\cdot q\cdot\phi_\nu, \qquad (2)$$

где

$$\phi_\nu = E_0\cdot R\cdot\Omega(e,\nu),$$

$$\mathbf{A}(e)=\frac{1}{2}(1-e^2)^{-1/6}\left[(1-e^2)^{1/2}+\frac{1}{e}\arcsin e\right];$$

$$\mathbf{B}(e_0)=\frac{1}{e_0}(1-e_0^2)^{1/3}\,\mathrm{arcth}\, e_0;$$

$$\Omega(e,\nu)=\frac{e(\nu-1)-\nu\,\mathrm{arth}\left[e\frac{\nu-1}{\nu-e^2}\right]}{(1-e^2)^{1/3}[\mathrm{arth}\, e-e]};$$

e_0 — величина эксцентриситета эмиттированных капелек; ν — расстояние между центрами исходной и отрывающейся капель в момент отрыва, обезразмеренное на большую полуось исходной капли.

В (2) первые два слагаемых описывают изменение поверхностной энергии исходной капли и двух эмиттированных капелек; третье слагаемое соответствует собственной электростатической энергии двух маленьких капелек; последнее слагаемое дает энергию взаимодействия дочерних капелек с внешним полем.

Как следует из (2), выражение для ΔF является функцией двух независимых величин: радиуса и заряда эмиттированных капель r и q). Согласно принципу минимальности скорости рассеяния энергии Онзагера реальные значения величин r и q соответствуют тем, при которых изменение энергии системы ΔF экстремально. Вводя безразмерные переменные $X\equiv\frac{r}{R}$ и $Y\equiv\frac{q}{E_0\cdot R^2}$, из условий экстремальности ΔF по r и q получим уравнение для определения искомых значений X и Y:

$$\mathbf{A}(e)\cdot X^2-\left\{\mathbf{A}(e_0)\cdot X-w^2\cdot\frac{Y^2}{X^2}\right\}\cdot\left[1-2\cdot X^3\right]^{1/3}=0,$$

$$Y+\frac{\Omega(e,\nu)}{\mathbf{B}(e_0)}X=0. \qquad (3)$$

В уравнениях (3) неопределенными величинами остаются ν и e_0. Для определения расстояния отрыва ν выпишем условие баланса сил, действующих на отрывающуюся капельку:

$$2 \cdot \pi \cdot r_* \cdot \sigma = E \cdot q, \qquad (4)$$

где

$$E = e \cdot \mathbf{T}(e, \nu),$$

$$\mathbf{T}(e, \nu) = 1 - \left[\operatorname{arth} \frac{e}{\nu} - \frac{e \cdot \nu}{\nu^2 - e^2}\right] [\operatorname{arth} e - e]^{-1}.$$

В (4) r_* — радиус перетяжки, соединяющий большую и маленькую капли в момент отрыва; E — напряженность электрического поля вблизи поверхности исходной капли в точке, совпадающей с центром отрывающейся капельки. Переходя к безразмерным переменным и вводя новый безразмерный параметр $\alpha = r_*/b_0$, где $b_0 = r \cdot (1 - e_0^2)^{1/3}$ [3], запишем уравнение для определения растояния ν в окончательном виде:

$$\frac{1}{8}\alpha \cdot (1 - e_0^2)^{1/6} \cdot X - w^2 \cdot \mathbf{T}(e, \nu) \cdot Y = 0. \qquad (5)$$

Эксцентриситет эмиттированной капельки определим, пользуясь приближенным выражением для равновесного эксцентриситета заряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле [5]:

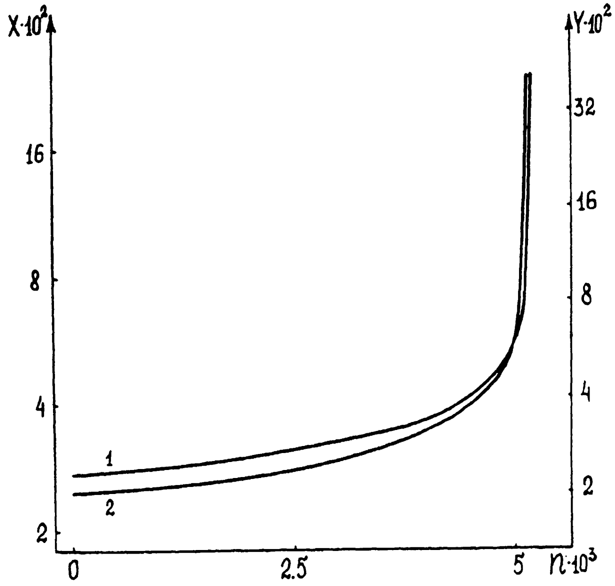
$$e_0^2 \approx 9 \cdot w_*^2 \cdot (1 + W_*^2). \qquad (6)$$

Здесь W_*^2 и $\dot{W}_*^2$ — параметры Тейлора и Рэлея для эмиттированных капелек:

$$w_*^2 \equiv \frac{E^2 \cdot r}{16 \cdot \pi \cdot \sigma} = w^2 \cdot \mathbf{T}^2(e, \nu) \cdot X;$$

$$W_*^2 \equiv \frac{q^2}{16 \cot \pi \cdot \sigma \cdot r^3} = w^2 \frac{Y^2}{X^3}.$$

Из системы уравнений (3), (5), (6) можно определить радиус и заряд отрывающихся капелек при заданных значениях параметра Тейлора w^2, эксцентриситета исходной капли e и параметра α. Параметр α возьмем равным 0.9, как и для случая рэлеевского распада заряженной капли, т.к. именно для такого значения α достигается наилучшее согласие с экспериментальными данными [3]. Начальные значения остальных определяющих параметров возьмем следующими: $w^2 = 0.052, e^2 = 0.7$. Решая с принятыми значениями параметров α, w^2, e^2 систему (3), (5), (6), найдем значения радиуса X и заряда Y эмиттированной капельки. По рассчитанным значениям X и Y определим изменившееся



Зависимости от порядкового номера акта эмиссии (от порядкового номера капельки) безразмерного размера X (кривая *1*) и безразмерного заряда Y (кривая *2*) дочерних капелек.

(уменьшившееся) значение параметра Тейлора w^2 и размера R исходной капли, а затем с новым значением w^2 расстоянием X и Y для следующей эмиттированной капельки. Эту процедуру будем продолжать до тех пор, пока значение параметра w^2 для исходной капли не станет равным ≈ 0.0383, при этом исчезают решения системы (3), (5), (6).

Результаты расчетов представлены на рисунке в виде зависимостей X и Y от порядкового номера акта эмиссии (от порядкового номера капельки). Отметим, что в процедуре обезразмеривания r и q во всех случаях использовалось неизменное исходное значение радиуса R родительской капли.

В проведенных расчетах выяснилось, что: для принятых значений параметров w^2, ϵ^2, α общее количество эмиттированных капелек равно 10342; отношение объема остатка большой капли к ее начальному объему ≈ 0.26; суммарная величина разделенного заряда определяется соотношением $Q \approx \cdot E_0 \cdot R^2$. Сравнение с закономерностями рэлеевского распада заряженной капли по данным работы [3] показывает, что в случае распада незаряженной капли в сильном электростатическом поле количество дочерних капелек на порядок больше, а сами они крупнее в три-четыре раза. Интересно отметить, что ограничение на количество дочерних капелек, эмиттированных при рэлеевском распаде заряженной капли, накладывается потерей заряда родительской капли, а в случае распада незаряженной капли в электростатическом поле — потерей ее массы.

Список литературы

[1] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Шевченко С.И.* // Научное приборостроение. 1991. Т. 1. В. 3. С. 25–43.
[2] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // J. Phys.D: Appl. Phys. 1990. V. 23. N 11. P. 1361–1370.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. В. 3. С. 19–28.
[4] *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. В. 6. С. 10–15.
[5] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. В. 6. С. 27–34.

Ярославский государственный университет

Поступило в Редакцию 12 июля 1993 г.