

01:09
©1993

СТОХАСТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В АНСАМБЛЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

А.А.Алексеев, В.Д.Шалфеев

Явление синхронизации имеет большое практическое значение в различных физических задачах [1]. Широкое внимание в связи с возможными физическими приложениями привлекает сейчас новое для физики колебаний явление — эффект взаимной синхронизации хаотических автоколебаний [2-4]. В данной работе приведены результаты изучения этого явления методами аналогового и численного моделирования в ансамбле двух связанных автоколебательных систем с обратной связью — систем управления частотой автогенератора. На практике подобные системы могут использоваться для управления параметрами различных физических объектов, например, элементов лазерных решеток и т.д. Выбирая для описания парциальной подсистемы трехмерную модель [5], можно записать уравнение, описывающее динамику процессов в ней в следующем виде:

$$\mu \frac{d^3 x}{d\tau^3} + \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \lambda \frac{dx}{d\tau} + x + \Phi(x) = \gamma, \quad \Phi(x) = \frac{2\beta x}{1 + \beta^2 x^2}, \quad \beta > 0, \quad (1)$$

где x — безразмерная переменная, μ , λ , γ — безразмерные параметры, τ — безразмерное время. Изучение динамики данной системы показало [4], что помимо синхронных режимов с различными остаточными расстройками частот опорного и управляемого сигналов, в данной модели могут существовать режимы биений как с периодически, так и с хаотически меняющейся во времени частотной расстройкой. Образами таких режимов в фазовом пространстве системы (1) являются предельные циклы и странные аттракторы.

Рассмотрим коллективную динамику ансамбля, состоящего из двух подобных взаимосвязанных автоколебательных систем.

Выбирая связь между парциальными подсистемами аналогично [6], т.е. так, чтобы влияние одной из них не подавляло режим, который существовал в другой до включения связи, можно записать уравнения, описывающие динамику

всей системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= y_1, & \frac{dy_1}{d\tau} &= z_1, \\ \mu_1 \frac{dz_1}{d\tau} &= \gamma_1 - \lambda_1 y_1 - z_1 - F[x_1 + \delta_1(x_2 - x_1)], \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= y_2, & \frac{dy_2}{d\tau} &= z_2, \\ \mu_2 \frac{dz_2}{d\tau} &= \gamma_2 - \lambda_2 y_2 - z_2 - F[x_2 + \delta_2(x_1 - x_2)], \\ F[x] &= x + \Phi(x). \end{aligned} \quad (2)$$

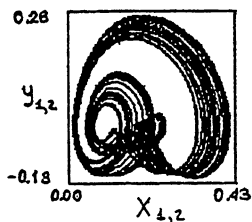
В случае симметричных связей $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ и фиксированных параметров $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\beta = 8$ было установлено, что если выбирать параметры $\mu_{1,2}$ и $\lambda_{1,2}$ из области существования хаотических автоколебаний в изолированных парциальных подсистемах, то в интервале значений параметра связи $\delta^* < \delta < \delta^{**}$ имеет место взаимная стохастическая синхронизация (в смысле определения данного в [3]). В частности, при $\mu_1 = \mu_2 = 2$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ это явление наблюдалось в диапазоне $0.21 \leq \delta \leq 0.6$. Выход на режим синхронизации фиксировался визуальным наблюдением проекций фазовых портретов системы на плоскость x_1, x_2 по устойчивому движению изображающей точки на многообразии $x_1 = x_2$. Так же сравнивались проекции хаотических аттракторов в каждой парциальной подсистеме на плоскости $x_1, \frac{dx_1}{d\tau}$ и $x_2, \frac{dx_2}{d\tau}$ соответственно. Результаты приведены на рисунке, а. В случае $\delta = 0.5$ было отмечено явление, заключающееся в синхронизации хаотических колебаний с постоянной разностью текущих координат $x_1 - x_2 = c$, где c зависит только от начальных условий (рисунок, б, с). Этому можно дать следующее объяснение. Переходя в случае $\delta = 0.5$ в системе (2) к новым координатам

$$x_n = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad x_\epsilon = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \quad \mu = \mu_1 = \mu_2, \quad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2,$$

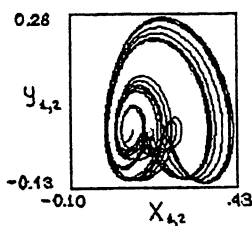
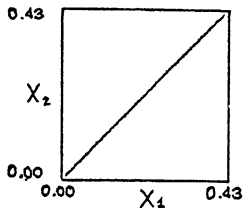
можно переписать ее в следующем виде:

$$\mu \frac{d^3 x_n}{d\tau^3} + \frac{d^2 x_n}{d\tau^2} + \lambda \frac{dx_n}{d\tau} + x_n + \Phi(x_n) = \gamma, \quad (3a)$$

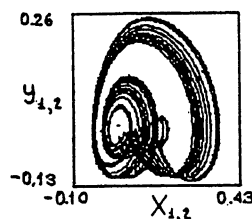
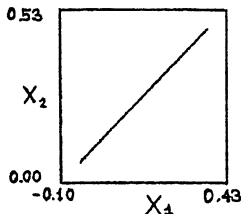
$$\mu \frac{d^3 x_\epsilon}{d\tau^3} + \frac{d^2 x_\epsilon}{d\tau^2} + \lambda \frac{dx_\epsilon}{d\tau} = 0. \quad (3b)$$



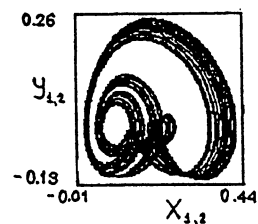
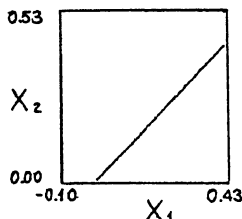
a



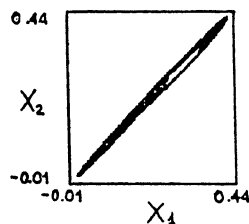
b



c



d



Первое уравнение в точности совпадает с уравнением (1), описывающим динамику частичной подсистемы и было изучено ранее [4], а второе есть обыкновенное линейное дифференциальное уравнение, решение которого описывает осцилляторно затухающие процессы в окрестности прямой $x_\varepsilon = \frac{c}{\lambda}$, где $c = \text{const}$, зависящая от начальных условий. Выход на режим синхронизации осуществляется так: стартуя из точки на фазовой плоскости x_1, x_2 , лежащей в области начальных условий, отвечающих движению на хаотическом аттракторе уравнения (3a), фазовая траектория под дей-

ствием синхронизирующего эффекта, описываемого (3b), приближается к прямой $x_\epsilon = \frac{c}{\lambda}$, на которой при $\tau \rightarrow \infty$ движение определяется (3a).

Если имеет место малое различие между параметрами, μ_1 , μ_2 или λ_1 , λ_2 парциальных систем, то синхронизация разрушается, но это происходит мягко, т.е. движения происходят на некотором аттракторе (см. рисунок, d), сильно вытянутом вдоль многообразия $x_1 = x_2$. Как видно из (3), учет такой расстройке не влечет за собой возникновения новых центров притяжения траекторий системы, а только изменяет скорость движения изображающей точки в фазовом пространстве.

Таким образом, установлено, что при определенных условиях в ансамбле двух автоколебательных систем с обратной связью реализуется режим взаимной синхронизации хаотических автоколебаний. Отмечено, что несмотря на различие физических моделей взаимная стохастическая синхронизация, рассматривавшаяся в данной работе и ранее [2,3,6], может объясняться как синхронизация странных аттракторов парциальных подсистем. То есть, это явление обладает той же универсальностью, что и обыкновенная синхронизация периодических автоколебаний. Характер процессов вхождения в синхронизм и выхода из него сильно зависит от параметров парциальных подсистем и связи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-15424).

Список литературы

- [1] Блетман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
- [2] Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. // УМН. 1987. Т. 42. В. 4. С. 135-136.
- [3] Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 19. В. 9. С. 1050-1060.
- [4] Волковский А.Р., Рувльов Н.Ф. // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 7. С. 5-10.
- [5] Заулин И.А., Пономаренко В.П. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 36. В. 5. С. 732-742.
- [6] Rulkov N.F. et. al. // International Journal of Bifurcations and Chaos. 1992. V. 2. N 3. P. 669-676.

Нижегородский государственный
университет
им. Н.И.Лобачевского

Поступило в Редакцию
21 августа 1993 г.