

01;03;12

©1993

ЗОНДОВЫЙ ВАРИАНТ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ АВТОКОЛЕБАНИЙ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

А.С.Рудый

Основной недостаток существующих методов определения теплофизических характеристик веществ и материалов состоит в низкой точности измерений. В работе [1] было предложено повысить точность определения температуропроводности за счет сокращения числа экспериментально измеряемых параметров до одного. Этим параметром является ω — частота, на которой возникают автоколебания в системе, содержащей в цепи обратной связи исследуемый образец (см., например, рис. 1). В такой системе сигнал обратной связи передается через температурное поле образца в виде температурной волны и при малой тепловой инерционности нагревателя и датчика температуры, отстоящих друг от друга на расстояние x_0 , удовлетворяет условию $kx_0 = \text{const}$, где k — волновое число. Температуропроводность образца a находится из дисперсионного соотношения для температурной волны $k = \sqrt{\omega/2a}$. Этот метод реализован в работе [2], а его теория подробно изложена в [3]. Наиболее удобный с практической точки зрения зондовый вариант данного метода в системе с пропорциональным регулятором (П-регулятором) невозможен. Однако введение в систему дифференцирующего регулятора не только создает возможность для использования зонда, но и дает ряд дополнительных преимуществ.

Как правило, П-регулятор используется в инвертирующем включении, поэтому необходимые для возбуждения автоколебаний 2π сдвига фазы сигнала обратной связи распределяются между элементами системы следующим образом: π приходится на регулятор, $\sim \pi/4$ — на сдвиг фазы источником тепла, а остальные $kx_0 \approx 3\pi/4$ — на образец. Если источник тепла и датчик температуры объединяются в зонд ($x_0 = 0$), то сдвиг фазы в полной петле обратной связи становится меньше 2π , и автоколебаний не возникает. Вновь сделать систему автоколебательной можно, введя в нее интегрирующее или дифференцирующее звено. Далее исследуется только вторая возможность, как более перспективная.

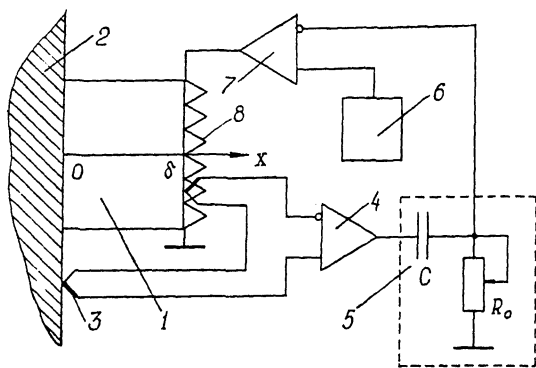


Рис. 1. Система с тепловой обратной связью и дифференцирующим регулятором.

Рассмотрим систему (рис. 1), состоящую из образца 1, термостата 2, дифтермопары 3, предусилителя 4, дифференцирующего звена 5, источника опорного напряжения 6, регулятора 7 и источника тепла 8. Уравнение системы имеет вид краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{T}(x, t) &= aT''(x, t) \\ T(x, t)|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с условием обратной связи

$$\begin{aligned} T'(x, t) &= (K^2/\lambda SR) \left[u_0 + \int_{-\infty}^t \exp\left(\frac{\tau-t}{\tau_0}\right) \alpha \dot{T}(\delta, \tau) d\tau \right]^2 \sigma \left[u_0 + \right. \\ &\quad \left. \int_{-\infty}^t \exp\left(\frac{\tau-t}{t_0}\right) \alpha \dot{T}(\delta, \tau) dt \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где δ — толщина образца, S — его площадь, a — температуропроводность образца, λ — теплопроводность, R — сопротивление нагревателя, K — коэффициент усиления регулятора, u_0 — опорное напряжение, α — коэффициент преобразования температуры в напряжение, σ — функция Хевисайда, τ — переменная интегрирования, $\tau_0 = R_0 C$ — постоянная времени дифференцирующего звена. Линеаризуя задачу (1,2) на стационарном решении

$$T(x) = (K^2 u_0 / \lambda SR) x \quad (3)$$

и рассматривая только периодические решения $T(x, t) = u(x) \exp(i\omega t)$, приходим к задаче Штурма-Лиувилля

$$u''(x) = \frac{i\omega}{a} u(x),$$

$$ux|_{x=0} = 0, u'(x)|_{x=0} = \frac{i\omega\tau_0}{1 + i\omega\tau} Au(\delta), \quad (4)$$

где $A = 2K^2\alpha u_0/\lambda SR$ — обобщенный коэффициент усиления. Собственные функции оператора (4) имеют вид $u(x) = C \operatorname{sh}(1+i)kx$. Подстановка $u(x)$ во второе граничное условие (4) после разделения действительной и мнимой частей дает два условия для обобщенного коэффициента усиления

$$A = (\operatorname{ch}2k\delta + \cos 2k\delta)(1 + \omega\tau_0)k/\omega\tau_0 \operatorname{sh}2k\delta,$$

$$A = -(\operatorname{ch}2k\delta + \cos 2k\delta)(1 - \omega\tau_0)k/\omega\tau_0 \sin 2k\delta. \quad (5)$$

Исключая A из (5) и вводя обозначение $k\delta = \nu$, получим задачу на волново число

$$(\operatorname{sh}2\nu + \sin 2\nu) / (\operatorname{sh}2\nu - \sin 2\nu) = \omega\tau_0 \quad (6)$$

или

$$(\operatorname{sh}2\nu + \sin 2\nu) / (\operatorname{sh}2\nu - \sin 2\nu) = Fo\nu^2, \quad (7)$$

где $Fo = a\tau_0/\delta^2$ — критерий Фурье. Графики левой и правой частей уравнения (7) представлены на рис. 2. Сопоставляя (6) с аналогичным условием [3], отметим, что в отличие от [3], корень уравнения (7) $\nu_c = k_c\delta$ не является константой, а зависит от частоты автоколебаний. Теперь при измерении температуропроводности необходимо для каждого экспериментального значения частоты находить корень уравнения (7) и вычислять температуропроводность как $a = \omega\delta^2/\nu_c^2$, что лишь незначительно усложнит процедуру измерений. Более серьезным недостатком является снижение относительной чувствительности $S_\omega = (d\omega/\omega)/(da/a)$. Если в системе с П-регулятором этот параметр был постоянным и равным единице, то теперь он зависит от критерия Фурье и в интервале $Fo = 2 - 10$ растет от 0.42, асимптотически приближаясь к своему максимальному значению 0.5. При $Fo < 2$ чувствительность быстро падает до нуля. Как видно из приведенных на рис. 2 графиков, максимальной чувствительности метода соответствует область малых значений ν . Задавая при помощи τ_0 необходимые значения Fo , можно

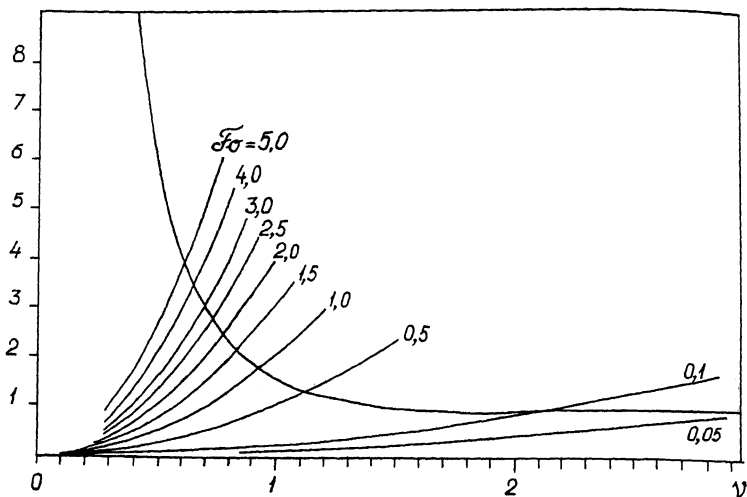


Рис. 2. Графики левой и правой частей уравнения (7). Графики правой части приведены для различных значений Fo в интервале от 0.05 до 5.

добиться максимальной чувствительности и точности измерений. Методика измерений в этом случае мало отличается от изложенной в [3].

В области малых Fo (рис. 2) выполняется условие $\omega\tau_0 = 1$, т.е. частота автоколебаний определяется только постоянной времени регулятора и не зависит от теплопроводности. Для заданного τ_0 автоколебания будут возбуждаться на фиксированной частоте $\omega = 1/\tau_0$ всякий раз, как только параметр A превысит критическое значение, определяемое условием

$$A_c = 2k_c \frac{\text{ch}2\nu_c + \cos 2\nu_c}{\text{sh}2\nu_c}, \text{ где } k_0 = 1/\sqrt{2a\tau_0}. \quad (8)$$

Величина A регулируется коэффициентом усиления K , который будет играть роль экспериментального параметра. Если известна теплопроводность, то выражение (8) можно использовать для определения a . Однако целесообразнее поступить следующим образом: задать постоянные K и u_0 , зафиксировав тем самым A , и, изменяя τ_0 , подобрать частоту, для которой данное значение A будет критическим. Таким образом, экспериментальным параметром будет τ_0 , а определяемой величиной — тепловая активность $\beta = \lambda/\sqrt{a}$. Покажем это для области больших значений ν , где $\text{ch}2\nu \gg \cos 2\nu$, а $\text{cth}\nu \approx 1$ и, следовательно, $A = 2k_c$.

Учитывая, что $A = 2K^2\alpha u_0/\lambda SR$, получим

$$\beta = \frac{\sqrt{2}K^2\alpha u_0}{SR}\sqrt{\tau_0} = C'K^2u_0\sqrt{\tau_0}, \quad (9)$$

где C' — приборная константа. Легко видеть, что в этом случае относительная чувствительность $S_\tau = 2$. Кроме того, возбуждение автоколебаний при помощи параметра τ_0 не изменяет стационарную температуру образца. Действительно, в рассматриваемой системе не от обратной связи по постоянному сигналу и мощность нагревателя определяется только усиленным опорным напряжением $W = K^2u_0^2/R$. Поэтому при увеличении K будет расти и стационарная температура $T(x)$, чего не происходит, если добиваться автоколебаний, изменяя τ_0 .

В заключение рассмотрим основные источники погрешности в предлагаемом варианте метода автоколебаний. При измерении температуропроводности они те же, что и в [3], но теперь появляется возможность снизить основной вклад в погрешность, уменьшив толщину термодпары и теплоемкость нагревателя. Для этого можно использовать тонкопленочную технологию, либо применять бесконтактные методы измерения температуры. Если измеряется тепловая активность, то, как следует из (9), систематическая погрешность будет зависеть от точности определения приборной константы, а случайная — от точности фиксации момента возбуждения автоколебаний. Заметим также, что при измерении β качество теплового контакта образца с термостатом существенной роли не играет, поскольку на высоких частотах (в области больших значений ν) глубина проникновения температурной волны меньше толщины образца. Перечисленные особенности позволяют проводить измерения *in situ*, что делает метод перспективным для изготовления приборов экспресс-контроля.

Список литературы

- [1] Алексеев В.П., Биркган С.Е., Бурцев Ю.Н. и др. // ИФЖ. Т. 52. В. 2. С. 255–260.
- [2] Рудый А.С., Рудь Н.А. // ПТЭ. 1992. В. 3. С. 211–215.
- [3] Rudyi A.S. // Int. J. Thermophys. 1993. V. 14. N 1. P. 159–172.

Ярославский государственный
университет

Поступило в Редакцию
24 сентября 1993 г.