

01;05

©1993 г.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА В КОМПОЗИТАХ

А.Х.Зайнутдинов, М.А.Магзупов

Статистическим методом условных моментов в двухточечном приближении получена формула для компонент эффективного тензора обобщенной проводимости на примере теплопроводности анизотропных и изотропных композитов с включениями в виде трехосных эллипсоидов. Показано, что результаты работы позволяют прогнозировать получение новых композитов с учетом геометрической формы включений.

Введение

При изучении процессов переноса в неоднородных материалах сформулировались два основных направления [1]. Первое связано моделированием реального хаотического материала упорядоченной системой с учетом возможности образования непрерывной сетки. Второе направление основано на применении методов теорий случайных функций. Неоднородный материал стохастической структуры моделируется средой, физико-механические свойства которой являются случайными функциями координат, и задача по определению коэффициентов переноса сводится к решению стохастических дифференциальных уравнений. Такой подход позволяет охватить все виды структур неоднородных материалов с произвольным характером связности, форм и расположения структурных элементов, образующих материал.

Основной особенностью стохастических дифференциальных уравнений неоднородных материалов является их статистическая нелинейность, что приводит в общем случае к бесконечной системе взаимосвязанных уравнений различных типов и порядков. Решение таких дифференциальных уравнений связано с проблемой замыкания, характерной для статистически нелинейных задач, и требует задания многоточечных моментов произвольного порядка, характеризующих распределение физико-механических свойств [2,3].

Одним из наиболее эффективных методов решения стохастических дифференциальных уравнений в механике неоднородных материалов является метод условных моментов [3,4]. Он позволяет свести задачу к бесконечной системе уравнений относительно условных многоточечных

моментов только первого порядка, что существенно упрощает их решение и дает возможность исследовать достаточно широкий класс структур неоднородных материалов.

В данной работе изложены постановка задачи расчета эффективно-го коэффициента переноса в неоднородных материалах стохастической структуры на примере теплопроводности, принципы ее решения, основанные на применении метода условных моментов. В двухточечном приближении решена задача об определении эффективных коэффициентов переноса в неоднородных материалах с включениями в виде трехосных эллипсоидов для анизотропных и изотропных структур. Получены формулы для определения эффективных коэффициентов переноса в неоднородных материалах слоистой, волокнистой и зернистой структур. Исследованы закономерности влияния геометрических параметров включения на эффективный коэффициент переноса в неоднородных материалах.

Предлагаемая методика расчета обобщенной проводимости неоднородных бинарных сред с эллипсоидальными включениями позволяет прогнозировать получение новых материалов с учетом геометрической формы включений. Полученные результаты дают хорошее соответствие с экспериментальными.

Постановка задачи

Рассмотрим неограниченное твердое тело, тензор теплопроводности которого κ_{jk} образует статистически однородное случайное поле. Масштабы корреляции функцией κ_{jk} будем считать конечными, тем самым предполагая выполнение условий эргодичности случайных полей. Этим условиям обычно удовлетворяют реальные неоднородные материалы, структура которых случайна, а средние размеры компонентов пренебрежимо малы по сравнению с размерами тела. Вследствие стохастичности свойств материала при неравномерном нагреве температура θ и тепловые потоки q_j также будут случайными функциями координат. При этом зависимости между тепловыми потоками и градиентами температуры выражаются законом Фурье

$$q_j = -\kappa_{jk}\theta_{,k} \quad (j, k = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Уравнение баланса тепла в условиях стационарной теплопроводности и отсутствия внутренних источников тепла имеет вид

$$q_{j,j} = 0. \quad (2)$$

Задача состоит в том, чтобы при известных статистических характеристиках случайного поля тензора теплопроводности κ_{jk} определить эффективный тензор теплопроводности κ_{jk}^* .

Предположим, что неоднородный материал находится в таких условиях неравномерного стационарного нагрева, при которых случайные поля тепловых потоков q_j и градиентов температуры $\theta_{,j}$ являются статистически однородными. В этом случае их можно считать эргодическими, т.е. средние по статистическому ансамблю тепловые потоки $\langle q_j \rangle$ и градиенты температуры $\langle \theta_{,j} \rangle$ равны соответствующим средним по объему

$$\langle q_j \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V q_j dV; \quad \langle \theta_{,j} \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \theta_{,j} dV. \quad (3)$$

Зависимости между средними тепловыми потоками и градиентами температуры выражаются законом Фурье

$$\langle q_j \rangle = \kappa_{jk}^* \langle \theta_{,k} \rangle. \quad (4)$$

В работе [3] рассматривались постановка задачи об эффективных свойствах композитных материалов стохастической структуры и методы ее решения в корреляционном и одноточечном приближении. Результаты, полученные на основе корреляционной теории, применимы только для расчетов свойств материалов с малыми флуктуациями коэффициента теплопроводности. Более точные решения, справедливые при больших флуктуациях коэффициента теплопроводности, можно получить, учитывая одноточечные моменты высших порядков. Одноточечные приближения достаточно хорошо описывают эффективные свойства композитных материалов зернистой структуры, а также материалов, армированных однонаправленными непрерывными волокнами. В то же время существуют также виды структур, специфику свойств которых одноточечные приближения не учитывают. Например, в рамках этого приближения свойства материалов, армированных хаотически расположенными сферическими включениями и хаотически непрерывными бесконечными волокнами, неразличимы. Одноточечное приближение не позволяет получить анизотропию, связанную с формой и ориентацией структурных элементов. Уточнение одноточечного приближения путем учета моментов последующих порядков приводит к существенному усложнению уравнений. Задачу можно значительно упростить, если вместо метода моментов воспользоваться методом условных моментов [4].

Метод условных моментов

Пусть неоднородный материал состоит из n компонентов с объемными концентрациями и коэффициентами теплопроводности C_ν, κ_{jk}^ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$). Осредняя (1), получим

$$\langle q_j \rangle = - \sum_{\nu=1}^n C_\nu \kappa_{jk}^\nu \langle \theta_{,k}^\nu \rangle, \quad (5)$$

где $\langle \theta_{,k}^\nu \rangle$ — средний градиент температуры, ν — номер компонента.

Отсюда следует, что для определения эффективного тензора теплопроводности необходимо найти средние градиенты температуры компонентов $\langle \theta_{,k}^\nu \rangle$ как функции среднего градиента температуры композитного материала $\langle \theta_{,k} \rangle$. Для этого уравнение (2) представим в форме

$$a_{jk} \theta_{jk}^0 = [(\kappa_{jk} - a_{jk}) \theta_{,k}]_{,j}. \quad (6)$$

Здесь a_{jk} — некоторый тензор теплопроводности с постоянными коэффициентами, θ^0 — флуктуации температуры.

Используя функцию Грина σ [2] оператора левой части уравнения (6), при условии равенства нулю флуктуации температуры на бесконечности

приведем эту задачу к решению интегрального уравнения относительно градиента температуры

$$\theta_{,j}^{(1)} = \langle \theta_{,j} \rangle + M_{jk}(x^{(1)} - x^{(2)})(x_{kn}^{(2)} - a_{kn})\theta_{,k}^{(2)}. \quad (7)$$

Ядро интегрального оператора M_{jk} выражается через производные функции Грина σ , его действие определяется формулой

$$M_{jk}(x^{(1)} - x^{(2)})\varphi(x)^{(2)} \equiv \sigma_{,jk}(x^{(1)} - x^{(2)})\varphi(x)^{(2)}dV^{(2)} + \oint_{s^{(2)}} \sigma_{,jk}(x^{(1)} - x^{(2)})\varphi(x)^{(2)} \cos(n, x_k^{(2)})ds^{(2)}. \quad (8)$$

Здесь s — бесконечно удаленная граница области V , занимаемой телом; n — нормаль к поверхности s . Умножим уравнение (7) на условную плотность $f(\theta_{,j}^{(1)}, \theta_{,j}^{(2)}, \kappa_{jk}^{(2)}|_{\nu_1}^1)$, т.е. плотность распределения градиента температуры и тензора теплопроводности соответственно в точках $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ и $x^{(2)}$ при условии, что в точке $x^{(1)}$ находится ν_1 компонент, и приведем осреднение. В результате получим систему

$$\langle \theta_{,j}^{\nu_1} \rangle = \langle \theta_{,j} \rangle + M_{jk}(x^{(1)} - x^{(2)}) \sum_{\nu_2=1}^n \delta(\nu_2^{(2)}|_{\nu_1}^{(1)}) \times \\ \times (\kappa_{kn}^{\nu_2} - a_{kn}) \langle \theta_{,k}^{(2)}|_{\nu_1, \nu_2}^{(1)(2)} \rangle. \quad (9)$$

Здесь $\delta(\nu_2^{(2)}|_{\nu_1}^{(1)})$ — вероятность нахождения в точке $x^{(2)}$ компонента ν_2 при условии, что в точке $x^{(1)}$ находится компонент ν_1 ; $\theta_{,j}^{(2)}|_{\nu_1, \nu_2}^{(1)(2)}$ — математическое ожидание градиента температуры в точке $x^{(2)}$ при условии, что в ней находится компонент ν_2 , а в точке $x^{(1)}$ — компонент ν_1 . Для определения неизвестных $\langle \theta_{,j}|_{\nu_1, \nu_2}^{(1)(2)} \rangle$ осредним уравнение (7) по условной плотности $\delta(\theta_{,j}^{(1)}, \theta_{,j}^{(2)}, \kappa_{jk}^{(2)}|_{\nu_1, \nu_2}^{(1)(2)})$, в результате получим

$$\theta_{,j}^{(1)}|_{\nu_1, \nu_3}^{(1)(3)} = \langle \theta_{,j} \rangle + M_{jk}(x^{(1)} - x^{(2)}) \sum \delta(\nu_2^{(2)}|_{\nu_1, \nu_3}^{(1)(3)}) \times \\ \times (\kappa_{kn}^{\nu_2} - a) \langle \theta_{,k}^{(2)}|_{\nu_2, \nu_1, \nu_3}^{(2)(1)(3)} \rangle \quad (\nu_1, \nu_3 = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Продолжая этот процесс, получим бесконечную систему уравнений относительно условных моментов

$$\langle \theta_{,j}^{\nu_1} \rangle, \langle \theta_{,j}^{(1)}|_{\nu_1, \nu_2}^{(1)(2)} \rangle, \dots, \langle \theta_{,j}^{(1)}|_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n}^{(1)(2)\dots(n)} \rangle. \quad (11)$$

Замыкание полученной системы может быть осуществлено путем обрыва на некотором шаге. Возможен, например, один из вариантов

$$\langle \theta_{,j}^{(1)}|_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i}^{(1)(2)\dots(i)} \rangle = 0; \quad \langle \theta_{,j}^{(1)}|_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i}^{(1)(2)\dots(i)} \rangle =$$

$$= \langle \theta_{,j} \rangle; \left\langle \theta_{,j}^{(1)} \middle| \begin{matrix} (1)(2) \dots (i) \\ \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i \end{matrix} \right\rangle = \langle \theta_{ij}^{\nu_1} \rangle. \quad (12)$$

Для решения полученной системы необходимо задать условные вероятности различных типов

$$\delta \left(\begin{matrix} (1) \\ \nu_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (2) \\ \nu_2 \end{matrix} \right), \delta \left(\begin{matrix} (1) \\ \nu_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (2)(3) \\ \nu_2, \nu_3 \end{matrix} \right) \dots \delta \left(\begin{matrix} (1) \\ \nu_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (2)(3) \dots (i) \\ \nu_2, \nu_3 \dots \nu_i \end{matrix} \right) \dots \quad (13)$$

При этом понятие "компонент" можно трактовать не только как структурный элемент с определенными физическими свойствами, но и включать сюда его ориентацию, форму, размеры и другие геометрические параметры.

Двухточечные приближения

Рассмотрим двухкомпонентный композитный материал с изотропными компонентами $\kappa_{jk} = \kappa \delta_{jk}$. Если ограничиться двухточечными условными вероятностями, то, пренебрегая флуктуациями градиента температуры в пределах компонента, получим систему алгебраических уравнений относительно средних по компонентам градиентов температуры

$$\langle \theta_{,j}^* \rangle = \langle \theta_{,j} \rangle + \sum_{\beta=1}^n M_{jk}^{(x)} P_{\alpha\beta}(x) (\kappa^\beta - a) \langle \theta_{,k}^\beta \rangle. \quad (14)$$

В случае ориентированных эллипсоидальных включений с полуосями b_1, b_2, b_3

$$P_{\alpha\beta}(x) = C_\beta + (\delta_{\alpha\beta} - C_\beta) P \left(\frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2} \right). \quad (15)$$

Если длины отрезков во включениях и вне их распределены по экспоненциальному закону, то аналогично работе [5] будем иметь

$$P(x) = \exp \left(-\frac{8}{C_2 \pi} \sqrt{\frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2}} \right). \quad (16)$$

Учитывая, что $\langle \theta_{,j} \rangle = C_1 \langle \theta_{,j}^1 \rangle + C_2 \langle \theta_{,j}^2 \rangle$, достаточно взять одно из уравнений (14)

$$\langle \theta_{,j}^1 \rangle = \langle \theta_{,j} \rangle + M_{jk}(x) [P_{11}(x) (\kappa^1 - a) \langle \theta_{,k}^1 \rangle + P_{12}(x) (\kappa^2 - a) \langle \theta_{,k}^2 \rangle]. \quad (17)$$

Так как $M_{jk}(x) \cdot \text{const} = 0$, то, обозначив $L_{jk} = M_{jk} P(x)$, получим

$$(\delta_{jk} - \kappa_1 L_{jk}) \langle \theta_{,k}^1 \rangle = (\delta_{jk} - \kappa_1^2 L_{jk}) \langle \theta_{,k} \rangle \quad (j, k = 1, 2, 3), \quad (18)$$

где $X_1 = C_2 x^1 + C_1 \kappa - a$, $\kappa_1^2 = \kappa^2 - a$, a — некоторый тензор сравнения.

Используя метод Крамера, решение этой системы можно представить в виде

$$\langle \theta_{,j}^1 \rangle = \Delta_{jk} \langle \theta_{,k} \rangle. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (5), получим

$$\langle q_j \rangle = [\varkappa^2 \delta_{jk} - C_1(\varkappa^1 - \varkappa^2) \Delta_{jk}] \langle \theta_{,k} \rangle. \quad (20)$$

Таким образом, эффективный тензор теплопроводности определяется выражением

$$\varkappa_{jk}^* = \varkappa^2 \delta_{jk} + C_1(\varkappa^1 - \varkappa^2) \Delta_{jk}. \quad (21)$$

Итак, необходимо найти Δ_{jk} из системы 3 уравнений, для чего нужно вычислить

$$L_{jk} = M_{jk}(x)P(x). \quad (22)$$

Учитывая, что $P(\infty) = 0$, получим

$$L_{jk} = \int_{V^{(2)}} \sigma_{,jk}(x_i) \exp \left(-\frac{8}{C_2 \pi} \sqrt{\frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2}} dx_1 dx_2 dx_3 \right).$$

Воспользуемся известным представлением Фурье для функции Грина и, перейдя к сферическим координатам, получим

$$L_{jk} = -\frac{1}{4\pi a b_j b_k} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma_j \gamma_k \sin \theta d\theta}{\frac{\gamma_1^2}{b_1^2} + \frac{\gamma_2^2}{b_2^2} + \frac{\gamma_3^2}{b_3^2}} = \frac{1}{a} I_{jk}, \quad (23)$$

где $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$; L_{11} , L_{22} и L_{33} отличны от нуля.

Для вычисления этих интегралов воспользуемся результатами теории кубатурных формул на поверхности единичной сферы [5,6], инвариантных по группе правильных многогранников трехмерного пространства. Ограничимся рассмотрением кубатурной формулы, инвариантной по группе правильного тетраэдра 2-алгебраической точности, для узлов которой будем брать вершины тетраэдра, вписанного в единичную сферу. Тогда имеем

$$I_{jk} = \frac{b_1^2 b_2^2 b_3^2}{b_j b_k (b_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_3^2 + b_2^2 b_3^2)}. \quad (24)$$

Решение системы (19) имеет вид (заменяем верхние индексы компонент на нижние $\varkappa^1 \rightarrow \varkappa_1$; $\varkappa^2 \rightarrow \varkappa_2$)

$$\Delta_{jk} = \frac{1 + (\varkappa_2 - a)L_{jk}}{1 + (C_2 \varkappa_2 + C_1 \varkappa_2 - a)L_{jk}} \delta_{jk}$$

(здесь и дальше по повторяющимся индексам суммирование не берется).

Окончательно получим для коэффициента эффективного тензора теплопроводности

$$\varkappa_{jk}^* = \varkappa_2 \delta_{jk} + C_1(\varkappa_1 - \varkappa_2) \frac{a + (\varkappa_2 - a)I_{jk}}{a + (C_2 \varkappa_1 - C_1 \varkappa_2 - a)I_{jk}} \delta_{jk}. \quad (25)$$

О выборе тензора сравнения

Рассмотрим κ^* неоднородного материала при предельных значениях a , т.е. при $a \rightarrow 0$ и $a \rightarrow \infty$. Тогда в первом случае из формулы (25) получим

$$\kappa_{jk}^* \rightarrow \kappa_1 \kappa_2 / (C_1 \kappa_2 + (1 - C_1) \kappa_1) = \langle \kappa^{-1} \rangle^{-1},$$

во втором

$$\kappa_{jk}^* \rightarrow C_1 \kappa_1 - (1 - C_1) \kappa_2 = \langle \kappa \rangle.$$

Таким образом, можно заключить, что κ^* лежит в интервале

$$\langle x^{-1} \rangle^{-1} \langle \kappa^* \rangle < \langle \kappa \rangle. \quad (26)$$

Полученные нами предельные значения κ^* точно согласуются с моделью параллельного и последовательного соединения компонентов, соответствующие схемам Фойгта и Ройсса в теории упругости [2].

Сравнение с результатами, полученными другими методами [3], показывает, что в случае матричной структуры целесообразно принять $a = \langle \kappa \rangle$, если $\kappa_1 < \kappa_2$, и $a = \langle \kappa^{-1} \rangle^{-1}$, если $\kappa_1 > \kappa_2$. В случае, когда один из компонентов имеет проводимость, равную нулю, следует взять $a = \langle \kappa \rangle$.

Материалы с одинаково ориентированными включениями

Рассмотрим неоднородный материал с трехосными включениями ($b_1 \neq b_2 \neq b_3$). Тогда, подставляя I_{11} , I_{22} и I_{33} из (24) в (25), получим формулу для вычисления κ_{11}^* , κ_{22}^* , κ_{33}^* , лежащих в интервале (26). Здесь ось анизотропии включения совпадает с осями коэффициента тензора теплопроводности. Следует отметить, что формула (25) справедлива при любой объемной концентрации включений, так как при вычислении κ_{jk}^* никаких ограничений для объемной концентрации включений не налагали.

Рассмотрим подробнее среду с включениями, представляющими собой сфероиды, т.е. эллипсоиды вращения ($b_2 = b_3$). В этом случае $\kappa_{33}^* = \kappa_{22}^*$. Тогда I_{jk} можно записать как

$$I_{11} = \frac{b_2^2}{2b_1^2 + b_2^2}, \quad I_{22} = I_{33} = \frac{b_1^2}{2b_1^2 + b_2^2}.$$

Для сред со сферическими включениями $I_{11} = I_{22} = I_{33} = 1/3$. Тогда из (25) получаем известное выражение для определения эффективной теплопроводности зернистой среды [3] при $\kappa_2 > \kappa_1$

$$\kappa^* = \langle \kappa \rangle - \frac{C_1 C_2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2}{3 \langle \kappa \rangle + (1 - 2C_1)(\kappa_1 - \kappa_2)}. \quad (27)$$

Для сред с (иглообразными) волокнистыми включениями в пределе $b_1 \rightarrow \infty$ имеем $I_{11} \rightarrow 0$, $I_{22} = I_{33} \rightarrow 1/2$, т.е. из (25) следует

$$\kappa_{11}^* \rightarrow \kappa_1 + C_1 (\kappa_1 - \kappa_2) = \langle \kappa \rangle,$$

$$\kappa_{22}^* = \kappa_{33}^* \rightarrow \langle \kappa \rangle - \frac{C_1 C_2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2}{2\langle \kappa \rangle + (1 - 2C_1)(\kappa_1 - \kappa_2)} \quad (28)$$

при $\kappa_2 > \kappa_1$, что совпадает с результатами [3] для композитных материалов с волокнистыми включениями. Для сред с дискообразными включениями в пределе $b_2 = b_3 \rightarrow \infty$ имеем $I_{11} \rightarrow 1$, $I_{22} = I_{33} \rightarrow 0$, т.е. при $\kappa_2 > \kappa_1$ из (25) следует

$$\begin{aligned} \kappa_{11}^* &\rightarrow \langle \kappa \rangle - \frac{C_1 C_2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2}{\langle \kappa \rangle + (1 - 2C_1)(\kappa_1 - \kappa_2)}, \\ \kappa_{22}^* &= \kappa_{33}^* \rightarrow \langle \kappa \rangle; \end{aligned} \quad (29)$$

(29) совпадает с (15) из [3]. Таким образом, результаты, полученные методом условных моментов в предельных случаях, совпадают с результатами, полученными методом одноточечных моментов.

Материалы с хаотически ориентированными включениями

В случае хаотического расположения эллипсоидальных включений неоднородный материал в макроскопическом отношении не только анизотропен, но и изотропен [15], т.е. $\kappa_{11}^* = \kappa_{22}^* = \kappa_{33}^* = \kappa^*$. Проведя осреднение по всем равновероятным ориентациям эллипсоида, в итоге получим

$$\kappa^* = \frac{\kappa_{11}^* + \kappa_{22}^* + \kappa_{33}^*}{3}. \quad (30)$$

Если включения имеют форму эллипсоидов вращения (т.е. $b_2 = b_3$), то из (30) имеем

$$\kappa^* = \frac{\kappa_{11}^* + 2\kappa_{33}^*}{3}. \quad (31)$$

Если рассмотреть неоднородные материалы со сферическими включениями, то выражение (30) совпадает с (27). В предельных случаях (композиты с волокнистыми и дискообразными включениями) из (31) получаем формулы, заменяющие (28) и (29),

$$\begin{aligned} \kappa^* &\rightarrow \langle \kappa \rangle - \frac{C_1 C_2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2}{3\langle \kappa \rangle + 3/2(1 - 2C_1)(\kappa_1 - \kappa_2)}, \\ I_{11} &\rightarrow 0; \\ \kappa^* &\rightarrow \langle \kappa \rangle - \frac{C_1 C_2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2}{3\langle \kappa \rangle + 3(1 - 2C_1)(\kappa_1 - \kappa_2)}, \\ I_{11} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Об оценках границы эффективных коэффициентов переноса в неоднородных материалах с включениями в виде трехосных эллипсоидов

Получение точных формул для κ^* сопряжено со значительными трудностями. Поэтому большое внимание уделяется разработке строгих методов оценки этой величины сверху и снизу. В работах [7-11], где дается обзор полученных результатов по установлению границ, показано, что невозможно получить точные оценки для κ^* , используя только статистическую информацию низших порядков. В [7] получены более узкие границы, учитывающие внутреннюю геометрию обеих фаз, для двухфазного неоднородного материала. Но, согласно формулам из [7], необходимо вычислить трехточечные корреляционные функции, построение которых является сложной задачей.

При выводе элементарной границы (29) по схемам Фойгта и Ройсса было показано, что граница для κ^* может быть определена исходя из моделей параллельного и последовательного соединения компонентов композита. Рассмотрим вопрос о сужении границ Фойгта и Ройсса исходя из решения задачи об эффективном коэффициенте теплопроводности неоднородного материала, образованного матрицей и системой ориентированных эллипсоидальных включений. При выводе формул мы используем формулу (25) для κ_{jk}^* , полученную исходя из стохастических уравнений теплопроводности методом условных моментов.

Предположим, что материал с хаотически ориентированными эллипсоидальными включениями состоит из большого числа подсистем, в каждой из которых эллипсоидальные включения ориентированы в определенном направлении.

Исходя из формул (25) для произвольной ориентации элементов подсистем, характеризуемой углами Эйлера (θ, φ, ψ) [2], получим выражение тензора теплопроводности подсистем в общей системе координат

$$\chi_{n\alpha}^* = a_{mn} a_{p\alpha} \chi_{np}^*, \quad (33)$$

где матрица ортогонального преобразования координат имеет вид

$$a_{jk} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \psi < 2\pi.$$

Применяя схему Фойгта к неоднородному материалу, найдем верхнюю границу $\kappa_{n\alpha}^\beta$, для чего проведем осреднение выражения (33) по всевозможным ориентациям включений по трем углам, считая функцию распределения по углам Эйлера равной единице [2],

$$\kappa_{n\alpha}^\beta = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_{n\alpha}^* \sin \theta d\theta d\varphi d\psi. \quad (34)$$

Если исходить из схемы Ройсса для нахождения нижней границы $\kappa_{n\alpha}^*$, то необходимо провести операцию осреднения тензора термического сопротивления $S_{n\alpha}^* = (\kappa_{n\alpha}^*)^{-1}$.

Тензор термического сопротивления подсистемы в общей системе координат имеет вид

$$R_{n\alpha}^* = a_{mn}a_{p\alpha}S_{mnp}^*, \quad (35)$$

в результате получим

$$\kappa_{n\alpha}^H = \bar{S}_{n\alpha}^* = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{n\alpha}^* \sin \theta d\theta d\varphi d\psi. \quad (36)$$

Интегрируя (34) и (36), находим верхние и нижние границы для κ^* , т.е.

$$\frac{3\kappa_{11}^* \kappa_{22}^* \kappa_{33}^*}{\kappa_{11}^* \kappa_{22}^* + \kappa_{11}^* \kappa_{33}^* + \kappa_{22}^* \kappa_{33}^*} < \kappa^* < \frac{1}{3}(\kappa_{11}^* + \kappa_{22}^* + \kappa_{33}^*). \quad (37)$$

Композиты с сферическими включениями и оценка границ их эффективных коэффициентов

Полученные границы для κ^* (37) учитывают геометрическую структуру неоднородного материала. Если тензор сравнения для верхней и нижней границ соответственно принять $a = \langle \kappa \rangle$ и $a = \langle 1/\kappa \rangle^{-1}$, то для неоднородных материалов с сферическими включениями имеем нижнюю и верхнюю границы

$$\begin{aligned} \kappa_2 + C_1(\kappa_1 - \kappa) \frac{\kappa_2 + 2 \left\langle \frac{1}{\kappa} \right\rangle^{-1}}{C_1 \kappa_2 + (1 - C_1)\kappa_1 + 2 \left\langle \frac{1}{\kappa} \right\rangle^{-1}} &\leq \kappa^* \leq \\ &\leq \kappa_2 + C_1(\kappa_1 - \kappa_2) \frac{\kappa_2 + 2 \langle \kappa \rangle}{C_1 \kappa_2 + (1 - C_1)\kappa_1 - 2 \langle \kappa \rangle}, \end{aligned} \quad (38)$$

которые лежат внутри границ, полученных вариационными методами. В работе [7] Беран предложил следующую формулу для κ^* при $C_1 = 0.5$, т.е. для симметричного двухфазного материала при $\kappa_1 > \kappa_2$:

$$\frac{6\alpha^2 + 6\alpha}{\alpha^2 + 10\alpha + 1} \frac{1}{\alpha^{1/2}} < \frac{\kappa^*}{(\kappa_1 \kappa_2)^{1/2}} < \frac{2\alpha^2 + 8\alpha + 2}{6 + 6\alpha}, \quad (39)$$

где $\alpha = \kappa_1/\kappa_2$.

Значение κ^* при $C_1 = 0.5$ совпадает с значением κ^* в предложенной нами границе (38). В заключение проведем сопоставление (38) с формулами (9), (6), (15), (1)-(88), (5) и (7) соответственно из работ [12-16]. Как видно из рис. 1, полученная нами верхняя граница для κ^* полностью охватывает все расчетные значения κ^* по известным формулам. Другими словами, полученные нами границы охватывают все возможные образования структур в неоднородных материалах. Для подтверждения вышесказанного произведем сопоставление расчетных значений

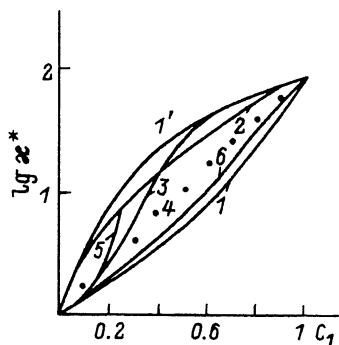


Рис. 1. Расчетные значения κ^* при $\kappa_1 = 100$, $\kappa_2 = 1$ для сферических включений по формуле (38) (1, 1') и формулам авторов из работ [12-16] (2-6 соответственно).

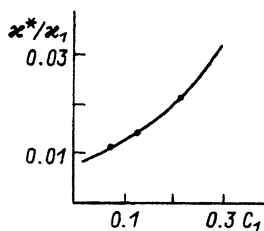
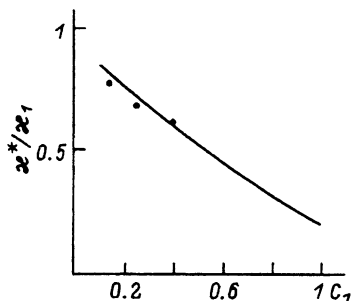


Рис. 2. Зависимость κ^* композитного материала (корунд + гель).

$\kappa_1 = 28.5$, $\kappa_2 = 0.21$; форма включений — пластинки размером 8:1:1. Кривая — расчет по формуле (30), точки — эксперимент.

Рис. 3. Зависимость κ^* композитного материала (гель + бальсовое дерево).

$\kappa_1 = 0.049$, $\kappa_2 = 0.22$; форма включений — диски размером 9:1:1. Кривая — расчет по формуле (30), точки — эксперимент.



κ^* с экспериментальными данными. Нами были выбраны два вида наполнителей: при $\kappa_1 > \kappa_2$ корундовые пластинки, а в случае $\kappa_1 < \kappa_2$ диски из бальсового дерева [17]. На рис. 2 и 3 приведены экспериментальные данные по теплопроводности полимерных композиций и расчетное значение теплопроводности по формуле (32) с учетом геометрии включений. Из этих данных видно, что использованная нами формула (32) дает вполне удовлетворительные результаты, т.е. максимальное отклонение от эксперимента составляет 3.6 и 6.4% соответственно для наполнителей из корунда и бальсового дерева. Кроме того, аналитический расчет κ^* по формуле (32) для композитов с другими наполнителями при тех соотношениях полуосей, которые даны в работе [17], также дает хорошее согласие с экспериментальными данными.

Сопоставление расчетных значений с результатами измерений κ^* дает удовлетворительную согласованность результатов опыта и расчета, что позволяет считать полученные нами формулы (30)–(32) способными прогнозировать значения коэффициентов переноса в разрабатываемых композиционных материалах.

Список литературы

- [1] Дульнев Г.Н. Коэффициенты переноса в неоднородных средах. Л., 1979. 64 с.
- [2] Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
- [3] Хорошун Л.П., Маслов Б.П. Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянных композитных материалов. Киев.: Наукова думка, 1980. 156 с.
- [4] Гафуров А., Зайнутдинов А.Х., Хорошун Л.П. // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. 1988. № 5. С. 75-78.
- [5] Соболев С.Л. // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3. № 5. С. 769-796.
- [6] Марчук Г.И., Лебедев В.И. М.: Атомиздат, 1981. 456 с.
- [7] Композиционные материалы / Под ред. Л.Браушмана, Р.Крока. Т. 2. Механика композиционных материалов / Под ред. Г.Сендецки. Беран М. Применение статистических теорий для определения тепловых, электрических и магнитных свойств неоднородных материалов. М.: Мир, 1978. С. 244-286.
- [8] Левин В.М. // ПМТФ. 1968. № 2. С. 137-140.
- [9] Miller M.N. // J. Math. Phys. 1969. Vol. 10. P. 1988-2005.
- [10] Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
- [11] Дульнев Г.Н., Новиков В.В. // ИФЖ. 1981. Т. 11. № 1. С. 172-179.
- [12] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. М.: Наука, 1982. Т. 8. 620 с.
- [13] Оделевский В.И. // ЖТФ. 1951. Т. 21. Вып. 6. С. 667-685.
- [14] Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
- [15] Буевич Ю.А., Зубарев А.Ю., Найденова С.А. // ИФЖ. 1986. Т. 51. № 1. С. 75-84.
- [16] Вейнберг А.К. // ДАН СССР. 1966. Т. 169. С. 543-546.
- [17] Бельская Е.П., Постников В.М., Хусид Б.М. и др. // ИФЖ. 1981. Т. 16. № 3. С. 483-490.

Ташкентский университет

Поступило в Редакцию
23 декабря 1991 г.
В окончательной редакции
26 октября 1992 г.