1994 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 36, № 1
1994 SOLID STATE PHYSICS Vol. 36, N 1

УДК 537-611.2

ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ МАГНЕТИКОВ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННЫХ ВНЕШНИХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Х.О.Абдуллоев, Х.Х.Муминов

Методом обобщенных когерентных состояний в действительной параметризации получены уравнения, описывающие анизотропные одномерные модели магнетика Гейзенберга при наличии постоянного внешнего магнитного поля. Показано, что в случае обменной легкоплоскостной анизотропии спиновая ветвь дисперсии приобретает из-за наличия поля активацию, а квадрупольная ветвь бездиссипативна. В случае одноионной анизотропии спиновая ветвь дисперсии остается боголюбовской, а квадрупольная ветвь вследствие сокращения длины спина приобретает дисперсию. В последнем случае найдено решение типа 360° доменной границы, сопровождающееся пространственным изменением длины спина.

В последние годы пристальное внимание исследователей привлекают различные аспекты физики нелинейных явлений. Эта область оформилась в отдельное направление теоретической и математической физики. Успехи физики нелинейных явлений связаны с открытием и широким применением интегрируемых и близких к ним систем и развитием новых математических методов, таких как метод обратной задачи рассеяния и другие, становлением новых концепций, таких как интегрируемые и неинтегрируемые системы, солитонный подход к описанию динамических, кинетических и термодинамических явлений в физике конденсированных сред и т.д. Установлена тесная связь нелинейной классической динамики с поведением соответствующих квантовых систем. Выяснилось, что свои квантовые аналоги имеют и солитонные состояния нелинейных классических уравнений; ими являются связанные многочастичные комплексы в интегрируемых одномерных квантовых системах. Особенно наглядна эта связь прослеживается при изучении магнитоупорядоченных сред.

В работах [1–3] исследовались магнетики со спином $S = 1$ с помощью обобщенных когерентных состояний (ОКС) в комплексной параметризации. Как оказалось, эта параметризация очень удобна при рассмотрении легкоосных (ЛО) магнетиков и не совсем подходяща для исследования легкоплоскостных (ЛП) ферромагнетиков, для которых имеются надежные экспериментальные указания на существование солитонов [4,5]. Анализ спиновой динамики одномерного ферромагнетика с учетом анизотропии указанного типа привел к модели, допускающей решения в виде солитонов синус-уравнения Гордона для угла вращения классического вектора спинового момента в легкой плоскости при внешнем постоянном магнитном поле в этой плоскости [6].

Следует отметить, что в работах [7,8] предложено представление для спиновых операторов, основанное на технике ОКС, что позволило в рамках анизотропной модели типа $CsNiF_3$ получить две ветви в спектре спиновых волн [8]. Но в этих работах спиновая динамика описывалась тремя переменными, а минимально необходимое количество параметров для полного его описания равно $4S$. Предложенный в работе [9] подход позволяет учитывать необходимое для квазиклассического описания число динамических переменных изучаемого магнетика со спином $S = 1$ и допускает выход за рамки уравнений Ландау–Лифшица.

В настоящей работе рассмотрен переход к классическому пределу для одномерных квантовых цепочек со спином $S = 1$ в поперечном магнитном поле, что особенно важно с точки зрения экспериментальных приложений. Как известно, магнитные солитоны в теоретическом подходе ориентированы на широко исследуемые экспериментально квазиодномерные магнетики типа $CsNiF_3$, TMNC и др. Теоретически и экспериментально наиболее хорошо изучен магнетик $CsNiF_3$, в котором обнаружены магнитные солитоны типа 360° доменных границ в поперечном магнитном поле. Ниже исследуются случаи одноосной анизотропии (легкоосной и легкоплоскостной) как обменного, так и одноионного происхождения.

Рассмотрим анизотропный магнетик со спином $S = 1$, описываемый гамильтонианом следующего вида:

$$\hat{H} = -J \sum_j \left(\hat{\mathbf{S}}_j \hat{\mathbf{S}}_{j+1} + \delta \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z + A \hat{S}_j^x \right), \tag{1}$$

где $A = \mu g h / J$, h — напряженность магнитного поля, μ — магнетон Бора, g — фактор Ланде, J — обменный интеграл, δ — константа анизотропии.

Усредняя (1) по ОКС группы SU(3) в действительной параметризации

$$|\psi\rangle = \exp\left\{-i\varphi \hat{S}^z\right\} \exp\left\{-i\theta \hat{S}^y\right\} \exp\left\{-i\gamma \hat{S}^{z'}\right\} \exp\left\{2ig\hat{Q}^{xy}\right\} |u\rangle, \tag{2}$$

где $\hat{Q}^{xy}$ — оператор квадрупольного момента [10], и переходя затем к континуальному пределу, получим классический аналог гамильтониана

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{a_0} \int \Bigg\{ \cos^2 2g(1 + \delta \cos^2 \theta) - \frac{a_0^2}{2}(4 \sin^2 2g g_x^2 +$$
$$+ \cos^2 2g \theta_x^2 + \cos^2 2g \sin^2 \theta \varphi_x^2) + A \cos 2g \sin \theta \cos \varphi \Bigg\} dx. \tag{3}$$

Здесь параметры θ и φ — эйлеровы углы, описывающие ориентационную динамику спина; g — параметр, характеризующий изменение длины вектора классического спина и квадрупольного момента; γ характеризует ротационную динамику квадрупольного момента.

Используя представление в виде континуального интеграла по ОКС (см. [1-3] или [11]), построим лагранжиан

$$L = i\hbar\left\langle\psi\left|\frac{\partial}{\partial t}\right|\psi\right\rangle - \left\langle\psi\left|\hat{H}\right|\psi\right\rangle, \tag{4}$$

который, с учетом ОКС (2) примет вид

$$L = \hbar\cos 2g(\dot{\gamma} + \cos\theta\dot{\varphi}) - \mathcal{H}(\theta, \varphi, \gamma, g), \tag{5}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка.

Для получения динамических уравнений проварьируем лагранжиан (5), что приведет к следующей системе уравнений:

$$\frac{1}{\omega_0}\dot{\varphi} = 2\delta\cos 2g\cos\theta - A\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi + \frac{a_0^2}{2}(\cos 2g\cos\theta\varphi_x^2 -$$

$$-\frac{1}{\sin\theta}(\cos 2g\theta_{xx} - 4\sin 2g g_x\theta_x)),$$

$$\frac{1}{\omega_0}\dot{\theta} = a_0^2(4\sin 2g\sin\theta g_x\varphi_x - \cos 2g\sin\theta\varphi_{xx} -$$

$$-2\cos 2g\cos\theta\theta_x\varphi_x) + A\sin\varphi,$$

$$\frac{1}{\omega_0}\dot{g} = 0,$$

$$\frac{1}{\omega_0}\dot{\gamma} = -2\cos 2g + a_0^2(2\sin 2g g_{xx} - \cos 2g\operatorname{ctg}\theta\theta_{xx} +$$

$$+4\cos 2g g_x^2 + \cos 2g\theta_x^2 + 4\sin 2g\operatorname{ctg}\theta g_x\theta_x +$$

$$+\cos 2g\varphi_x^2) - A\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}. \tag{6}$$

Система (6) полностью описывает спиновую динамику ферромагнетика с обменной анизотропией, находящегося во внешнем магнитном поле.

Посмотрим, к чему приведет пренебрежение квадрупольным моментом. Для этого мы положим $g = 0$. Отсюда два первых уравнения системы (6) дают

$$\frac{1}{\omega_0}\sin\theta\dot{\varphi} = -2\delta\cos\theta\sin\theta - a_0^2(\sin\theta\cos\theta\varphi_x^2 - \theta_{xx}) + A\cos\theta,$$

$$\frac{1}{\omega_0}\dot{\theta} = -a_0^2(\sin\theta\varphi_{xx} - 2\cos\theta\theta_x\varphi_x) + A\sin\varphi, \tag{7}$$

т.е. с точностью до перенормирующего множителя уравнения Ландау-Лифшица. Можно также проверить, что классическое вакуумное состояние в терминах θ, φ, γ и g есть $\theta = \pi/2$, $\varphi = \gamma = g = 0$, т.е. совпадает, как и в [12,13], с SU(2)-сечением.

Аналогично рассмотрим ферромагнетик Гейзенберга с одноионной анизотропией, находящийся во внешнем магнитном поле

$$\hat{H} = -J \sum_j \left(\hat{\mathrm{S}}_j \hat{\mathrm{S}}_{j+1} + \bar{\delta} \hat{S}_j^z \hat{S}_j^z + A \hat{S}_j^x \right), \tag{8}$$

где $\bar{\delta}$ — константа одноионной анизотропии.

Классический аналог гамильтониана, усредненный по ОКС, выглядит так:

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{a_0} \int \Bigg\{ \cos^2 2g + \frac{\bar{\delta}}{2}(\cos^2\theta + \sin 2g \cos 2\gamma \sin^2\theta) -$$
$$-\frac{a_0^2}{2}\left(4\sin^2 2g g_x^2 + \cos^2 2g(\theta_x^2 + \sin^2\theta\varphi_x^2)\right) +$$
$$+ A\cos 2g \sin\theta\cos\varphi \Bigg\} dx. \tag{9}$$

Проварьировав (9), получим следующие динамические уравнения:

$$\frac{1}{\omega_0}\dot{\varphi} = \bar{\delta}\frac{\cos\theta}{\cos 2g}(\sin 2g\cos 2\gamma - 1) + \frac{a_0^2}{2}(\cos 2g \cos\theta\varphi_x^2 -$$
$$-\frac{1}{\sin\theta}(\cos 2g\theta_{xx} - 4\sin 2g g_x\theta_x)) + A\cos\theta,$$
$$\frac{1}{\omega_0}\dot{\theta} = a_0^2(4\sin 2g\sin\theta g_x\varphi_x - \cos 2g\sin\theta\varphi_{xx} - 2\cos 2g\cos\theta\theta_x\varphi_x) -$$
$$-\bar{\delta}\,\mathrm{tg}\,2g\sin 2\gamma\sin\theta\cos\theta + A\sin\varphi,$$
$$\frac{1}{\omega_0}\dot{g} = \frac{\bar{\delta}}{2}\sin 2\gamma\sin^2\theta,$$
$$\frac{1}{\omega_0}\dot{\gamma} = -2\cos 2g + \bar{\delta}\left(\frac{\cos^2\theta}{\cos 2g}(1 - \sin 2g\cos 2\gamma) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,2g\cos 2\gamma\sin^2\theta\right) +$$
$$+a_0^2(2\sin 2g g_{xx} - \cos 2g\,\mathrm{ctg}\,\theta\theta_{xx} + 4\cos 2g g_x^2 +$$
$$+\cos 2g\theta_x^2 + \cos 2g\varphi_x^2 + 4\sin 2g\,\mathrm{ctg}\,\theta g_x\theta_x) - A\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}. \tag{10}$$

Эта система уравнений полностью описывает нелинейную динамику ферромагнетика с одноионной анизотропией при наличии магнитного поля.

Отметим, что для использования систем уравнений (6) и (10) при исследовании ферромагнетиков с анизотропией типа «легкой оси»или «легкой плоскости» необходимо найти классическое основное состояние этих магнетиков. Для этого, во-первых, рассмотрим ферромагнетик с обменной анизотропией, находящийся во внешнем магнитном поле. В этом случае бездеривативная часть гамильтониана (3) имеет вид

$$\hat{H}_0 = -\frac{J}{a_0}\int \left\{\cos^2 2g(1+\delta\cos^2\theta) + A\cos 2g\sin\theta\cos\varphi\right\} dx. \qquad (11)$$

В случае анизотропии типа «легкая ось» $\delta > 0$ основное состояние зависит от соотношения констант обменной анизотропии δ и напряженности магнитного поля A. Так, если выполняется условие

$$A \geqslant 2\delta, \qquad (12)$$

вектор спина в вакууме направлен вдоль направления магнитного поля

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad g = 0, \quad \varphi = 0, \qquad (13)$$

т.е. вектор спина далеко уходит от легкой оси OZ. При выполнении обратного (12) условия

$$A < 2\delta \qquad (14)$$

вектор спина в основном состоянии лежит в так называемом «легком» конусе, где

$$\sin\theta = \frac{A}{2\delta}, \quad g = 0, \quad \varphi = 0. \qquad (15)$$

В пределе $A \to 0$ приходим к результатам, полученным в работах [1,2]

$$g = 0, \quad \varphi = 0, \quad \theta = 0, \pi,$$
$$\langle \hat{S}^+ \rangle = \langle \hat{S}^- \rangle = 0, \quad \langle \hat{S}^z \rangle = \pm 1. \qquad (16)$$

Пусть теперь $\delta < 0$. В этом случае в вакууме вектор спина лежит вдоль оси OX, т.е. основное состояние есть

$$g = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0. \qquad (17)$$

Здесь тоже при $A = 0$ приходим к результатам, полученным в комплексной параметризации [3]

$$g = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \qquad (18)$$

Из полученных выше результатов видно, что основное состояние ферромагнетика, если нет одноионного взаимодействия, не зависит от квадрупольных параметров γ и g. В случае, когда одноионное взаимодействие влияет на основное состояние, имеет место сокращение длины классического спина. Проверим это на примере гамильтониана, который определяется следующей частью (9):

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{J}{a_0}\int \left\{ \cos^2 2g + \frac{\bar{\delta}}{2}(1+\cos^2\theta + \sin 2g\cos 2\gamma\sin^2\theta) + \right.$$
$$\left. + A\sin 2g\sin\theta\cos\varphi \right\} dx. \qquad (19)$$

Для нахождения наименьшего значения гамильтониана (19) проварьируем его по всем параметрам

$$
\begin{gathered}
-4\cos 2g\sin 2g + \bar{\delta}\cos 2g\cos 2\gamma\sin^2\theta - 2A\sin 2g\cos\varphi\sin\theta = 0,\\
2\bar{\delta}\sin\theta\cos\theta(\sin 2g\cos 2\gamma - 1) + A\cos 2g\cos\theta\cos\varphi = 0,\\
2\bar{\delta}\sin 2g\sin 2\gamma\sin^2\theta = 0,\\
A\cos 2g\sin\theta\sin\varphi = 0.
\end{gathered} \tag{20}
$$

Подставив (20) в (19), можно найти минимум гамильтониана.

а) Если $\bar{\delta} < 0$, то вакуум зависит от сложного соотношения между константами одноионной анизотропии и внешнего магнитного поля. Так, если

$$A \geqslant |\bar{\delta}|, \tag{21}$$

то минимум гамильтониана (19) достигается при

$$\varphi = 0, \quad g = 0, \quad \gamma = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \tag{22}$$

и в этой точке

$$H_0 = -\frac{J}{a_0}\left(1 + \frac{\bar{\delta}}{2} + A\right), \quad \langle \hat{S}^z\rangle = 1, \quad q^2 = 0. \tag{23}$$

Вектор спина лежит вдоль оси OX, т.е. совпадает с направлением внешнего магнитного поля. Если же

$$A^2 < A_0^2, \quad A_0^2 = \frac{\bar{\delta}}{2}\left(\sqrt{16 + 24\bar{\delta} + \bar{\delta}^2} - (4 + \bar{\delta})\right), \tag{24}$$

то в основном состоянии

$$\varphi = 0, \quad \gamma = 0, \quad \sin 2g_0 = \frac{A^2}{4\bar{\delta}}, \quad \sin\theta = \frac{A}{\bar{\delta}}\sqrt{\frac{4\bar{\delta} + A^2}{4\bar{\delta} - A^2}}, \tag{25}$$

а гамильтониан имеет следующее значение:

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{J}{a_0}\left(1 + \bar{\delta} + \frac{A^2}{2\bar{\delta}} + \frac{A^4}{8\bar{\delta}^2}\right). \tag{26}$$

И последнее. Если

$$A_0 < A < \bar{\delta}, \tag{27}$$

то основное состояние есть

$$\varphi = 0, \quad \gamma = \frac{\pi}{4}, \quad g = 0, \quad \sin\theta_0 = \frac{A}{\bar{\delta}} \tag{28}$$

и в этой точке

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{J}{a_0}\left(1 + \bar{\delta} + \frac{A^2}{2\bar{\delta}}\right). \tag{29}$$

Из (25) следует, что при определенных значениях внешнего магнитного поля и поля одноионной анизотропии в основном состоянии имеет место сокращение длины классического спина.

б) Такая же ситуация имеет место с основным состоянием легкоплоскостных ферромагнетиков $\bar{\delta} < 0$. В отсутствие внешнего магнитного поля минимум гамильтониана (19) достигается при

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \sin 2g_0 = \frac{|\bar{\delta}|}{4}, \quad |\bar{\delta}| < 4, \tag{30}$$

$$g = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad |\bar{\delta}| \geqslant 4. \tag{31}$$

Если учесть внешнее магнитное поле, то основное состояние будет определяться также значением этого поля. В этом случае приходится решать уравнение для g

$$4\cos 2g \sin 2g - |\bar{\delta}| \cos 2g + 2A \sin 2g = 0. \tag{32}$$

Другие параметры имеют следующее значение:

$$\varphi = 0, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \tag{33}$$

Численное решение уравнения (32) показало, что имеют место следующие пределы:

$$\begin{aligned} &\sin 2g \to 0, \qquad \text{если} \qquad A \to \infty, \\ &\sin 2g \to \frac{|\bar{\delta}|}{4}, \qquad \text{если} \qquad A \to 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Как видно, чем больше величина внешнего магнитного поля, тем меньше величина сокращения спина, определяемая выражением (32). Поэтому сокращение спина экспериментально можно обнаружить при слабом внешнем магнитном поле.

Следует отметить, что при наличии поля полные уравнения для двух типов анизотропии существенно различны. Это проявляется уже на уровне найденных основных состояний и законов дисперсии спиновых волн. Если в случае обменной анизотропии основное состояние сводится к уравнению Ландау–Лифшица, то в случае одноионной анизотропии в определенном интервале магнитных полей происходит сокращение спина. Так, для слабой легкоосной анизотропии возникает интервал полей, в котором в легкоконусном состоянии длина спина равна

$$S = \left[1 - \left(\arcsin\left(\frac{h}{h_0}\right)/2\right)^2\right]^{1/2}.$$

В случае ЛП сокращение спина возникает даже в отсутствие поля и должно проявляться в малых магнитных полях. Правда, спин сокращается лишь при малых анизотропиях $|\bar{\delta}| < 4$ (см. (30)), а в экспериментальном объекте $CsNiF_3$ эта величина огромна.

Теперь рассмотрим дисперсию спиновых волн, распространяющихся вблизи основного состояния легкоплоскостного ферромагнетика.

Для этого линеаризуем систему уравнений (6) вблизи основного состояния (17) и, представляя величины θ и φ в виде плоских волн, получим магнонные спектры ЛП модели с обменной анизотропией

$$\omega_1^2 = \omega_0^2(k^2a_0^2 + A)(k^2a_0^2 + 2|\delta| + A),$$
$$\omega_2 = \omega_0(2 + A). \tag{35}$$

Аналогичным образом, линеаризуя систему уравнений (10), получим следующие магнитные спектры ЛП модели при $|\bar{\delta}| < 4$:

$$\omega_1^2 = k^2a_0^2\omega_0^2\left(1 + \frac{A}{\cos g}\right)\left[|\bar{\delta}|(1 + \sin g) + A\cos gk^2a_0^2\right],$$
$$\omega_2^2 = \omega_0^2\left[2\sin gk^2a_0^2 + |\bar{\delta}|\left(\frac{8|\bar{\delta}|}{2\sin^2 g} - 2\sin g\right)\right], \tag{36}$$

где также существует высокочастотная мода колебаний. Первая мода похожа на боголюбовскую дисперсию ЛП магнетиков, а вторая ветвь есть дисперсия линеаризованного уравнения Клейна–Гордона.

Из (35) и (36) видно, что они имеют интересный вид спектров линейных возбуждений, на которые существенно влияет магнитное поле и которые различаются для анизотропий разного рода происхождений. В наиболее важном ЛП случае спиновая ветвь приобретает из-за наличия поля активацию, а квадрупольная ветвь бездиссипативна. При одноионной анизотропии даже в поле спектр спиновых волн остается боголюбовским и бесщелевым, а квадрупольная ветвь из-за анизотропии и связанного с ней сокращения спина приобретает дисперсию. Интересно заметить, что в отсутствие поля при стремлении анизотропии к значению $\bar{\delta} \to 4$ «высокочастотная» квадрупольная ветвь понижается до нуля и тоже становится звуковой!

При обменной анизотропии 360° доменная граница имеет тот же вид, что и при описании в рамках синус-уравнения Гордона [6,14]

$$g = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\exp(Ax),$$

и дополнительно возникает лишь зависимость частоты квадрупольной ветви от x — появляется целый спектр частот

$$\omega_1 = 2 + A - 6A\operatorname{sech}Ax, \quad \Delta\omega = 6A. \tag{37}$$

В случае одноионной анизотропии с $|\bar{\delta}| < 4$ при малых полях доменная граница имеет примерно тот же вид, но сопровождается пространственным изменением длины спина

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi = 4\operatorname{arctg}\exp(Ax/q_0),$$
$$q = \cos 2g \simeq q_0 + \left[A/(4/\bar{\delta})^2 - 1\right]\left[5 - 6th^2(Ax/q_0)\right], \tag{38}$$

где

$$q_0 = \sqrt{1 - (\bar{\delta}/4)^2}.$$

В заключение авторы глубоко благодарны А.С.Ковалеву за обсуждение и ценные замечания.

Список литературы

[1] Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х. // ДАН Таджикистана. 1991. Т. 34. № 7. С. 431–434.
[2] Абдуллоев Х.О., Муминов Х.Х. // ДАН Таджикистана. 1990. Т. 33.№ 10. С. 556–559.
[3] Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Маханьков В.Г., Муминов Х.Х. // Препринт ОИЯИ, Р17-90-258. Дубна, 1990. С. 12.
[4] Kjems J.K., Steiner M. // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. N 16. P. 1137–1140.
[5] Steiner M. et al. // Z. Phys. B. 1983. V. 53. P. 117–142.
[6] Mikeska H. // J. Phys. 1978. V. 111. N 1. P. 129–132.
[7] Mead L., Papanicolaou N. // Phys. Rev. B. 1982. V. 26. N 3. P. 1416–1429.
[8] Mead L., Papanicolaou N. // Phys. Lett. 1983. V. 93A. N 5. P. 247–252.
[9] Островский В.С. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. № 5. С. 1698–1701.
[10] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975. С. 436.
[11] Абдуллоев Х.О., Маханьков А.В., Хакимов Ф.Х. Классические нелинейные модели в теории конденсированных сред. Душанбе: Дониш, 1989. С. 179.
[12] Abdulloev Kh.O., Makhankov V.G., Mahsudov A.T., Muminov Kh.Kh. // Preprint JINR, E17-91-219. Dubna, 1991. P. 8.
[13] Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х. // ФТТ. 1992. Т. 34. № 2. С. 544–547.
[14] Косевич А.М., Ковалев А.С. Нелинейная физическая механика. Киев: Наукова думка, 1989. С. 224.

Таджикский государственный университет
Душанбе

Поступило в Редакцию
9 марта 1993 г.
В окончательной редакции
2 августа 1993 г.