

УДК 536.913

©1994

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В SrTiO_3

В. Д. Каган, А. В. Суллов

Впервые применен метод тепловых импульсов для изучения свойств виртуального сегнетоэлектрика SrTiO_3 при температурах 1.7–3.4 К. Показано, что неравновесные фононы распространяются через образец в диффузионном режиме. Во внешнем электрическом поле (до 20 кВ/см) время прихода максимума фоновой неравновесности уменьшалось, а амплитуда сигнала возрастала; в области сильных полей ($E > 3$ кВ/см) относительные изменения обеих величин были пропорциональны $E^{2/3}$. Такие зависимости согласуются с литературными данными. Показано, что наблюдаемые эффекты не могут объясняться взаимодействием неравновесных акустических фононов с мягкой оптической модой. Предполагается, что изменение в электрическом поле величин, характеризующих распространение теплового импульса в SrTiO_3 , и литературные данные об изменении в поле теплоемкости и теплопроводности этого материала могут быть связаны с увеличением жесткости кристаллической решетки под действием наведенной полем поляризации и изменением свойств несегнетоэлектрической доменной структуры титаната стронция.

Исследуемый в настоящей работе титанат стронция относится к известному классу сегнетоэлектриков со структурой перовскита. При уменьшении температуры от 300 до 70 К диэлектрическая проницаемость SrTiO_3 растет и следует закону Кюри-Вейсса, как у обычных сегнетоэлектриков, но она не проходит через максимум, а продолжает возрастать по мере приближения температуры к 0 К [1]. Наряду с возрастанием диэлектрической проницаемости понижение температуры в этом материале вызывает уменьшение частоты поперечной оптической моды, распространяющейся вдоль направления [100]. Однако частота уменьшается не до нуля, а до $2.5 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$ при 4.2 К [1]. Такое поведение мягкой моды и диэлектрической проницаемости свидетельствует о приближении к сегнетоэлектрическому переходу и в то же время показывает, что при достижимых температурах переход не осуществляется. По этой причине титанат стронция называют виртуальным (или потенциальным) сегнетоэлектриком. Название отражает тот факт, что температура сегнетоэлектрического перехода этого кристалла ниже нуля Кельвина.

Известно, что вблизи фазового перехода диэлектрические свойства сегнетоэлектриков существенно зависят от внешнего электрического поля. Это вызвано тем, что диэлектрическая восприимчивость становится великой и относительно небольшие поля индуцируют большую поляризацию. Эксперименты показывают, что и в SrTiO_3 при низких

температурах диэлектрическая проницаемость уменьшается, а частота мягкой моды растет при приложении внешнего электрического поля [1]. Кроме того, в этом кристалле наблюдается влияние поля на величины, характеризующие свойства фононной системы в целом, а именно: уменьшение теплоемкости [2] и увеличение теплопроводности [3]. Все эти эффекты начинают проявляться ниже 100 К и возрастают по мере уменьшения температуры до гелиевой, т.е. по мере приближения к виртуальному сегнетоэлектрическому переходу.

Таким образом, изучение поведения фононной системы вблизи сегнетоэлектрического перехода представляет несомненный интерес. Мы для этой цели использовали методику тепловых импульсов, которая позволяет возбуждать в кристалле неравновесные акустические фононы. В связи с вышеизложенным можно предположить, что при низких температурах внешнее электрическое поле будет влиять на распространение тепловых импульсов в потенциальном сегнетоэлектрике SrTiO_3 . Исследуя такое влияние, мы рассчитывали получить новую информацию о фонон-фононных взаимодействиях в этом материале.

1. Эксперимент

Измерения проводились на образцах номинально чистого SrTiO_3 , вырезанных вдоль основных кристаллографических осей.

Направление	100	100	100	110	110	111	111
Длина, мм	0.7	0.7	3.5	0.7	1.7	0.7	1.7

Мы возбуждали фононы методом тепловых импульсов. Генератором являлась золотая пленка прямоугольной формы ($\approx 4 \times 5$ мм), термически напыленная на одну из граней образца. Нагрев пленки производился импульсом тока длительностью $\approx 3 \div 10 \mu\text{s}$. На генераторе выделялась электрическая мощность $\approx 0.01 \text{ W/mm}^2$. При такой мощности температура генератора незначительно отличалась от температуры гелиевого термостата. Вводимые из генератора фононы распространялись через образец и регистрировались на противоположной грани детектором. В нашем случае детектором служил индиевый сверхпроводящий болометр, который напылялся на поверхность образца и имел форму меандра, вписанного в прямоугольник размером 2×4 мм.

При такой постановке эксперимента возможны различные режимы распространения фононов через образец. Если на пути от генератора к детектору фононы не испытывают актов рассеяния, режим называется баллистическим и время прихода фонона на детектор равно отношению длины образца к скорости ультразвука в исследуемом материале. Другой случай реализуется, если на пути через образец фононы рассеиваются многократно, т.е. время релаксации фононов много меньше времени распространения тепловых импульсов. При этом система акустических фононов выступает как единый коллектив с неравновесной температурой, меняющейся вдоль образца, а режим распространения фононов называется диффузионным. Такая система описывается уравнением теплопроводности. Строгое решение задачи теплопроводности с заданными граничными условиями изложено в приложении 1.

Сигнал болометра при распространении тепловых импульсов через SrTiO_3 имел колоколообразный вид, характерный именно для диффузионного режима. Количественной характеристикой такого распространения является время прихода максимума фоновой неравновесности t_{\max} .

В наших экспериментах соотношения размеров генератора, болометра и длины образца L^s были таковы, что распространение неравновесных фононов происходило в режиме, переходном между одномерной и трехмерной диффузией (кроме образцов длиной 0.7 мм, для которых диффузия являлась одномерной). В связи с этим, чтобы исключить влияние геометрических факторов на величину t_{\max} , мы пересчитали t_{\max} , полученное непосредственно из эксперимента, в t_{\max}^{1D} — время прихода максимума фоновой неравновесности при распространении фононов в режиме одномерной диффузии. Подробно необходимость такого расчета обоснована в [4].

Регрессионный анализ показывает, что t_{\max}^{1D} пропорционально $L_s^{1.8}$ при использовании граничных условий типа а) и $L_s^{2.1}$ при использовании граничных условий типа б) (см. Приложение 1). Оба результата согласуются с характерной для диффузионного распространения зависимостью

$$t_{\max}^{1D} \sim \frac{c\rho}{K} L_s^2, \quad (1)$$

где ρ , K , c — плотность, теплопроводность, теплоемкость материала. Точность измерений не позволяет из этих зависимостей определить, каким граничным условиям соответствует наша экспериментальная ситуация, но, используя данные работ [2,3] и формулу (П 1.8), для образцов длиной 0.7 мм при температуре 3.4 К мы получили $t_{\max}^{1D} \sim 80 \mu\text{s}$ в случае а) и $t_{\max}^{1D} \sim 240 \mu\text{s}$ в случае б). Случай а) гораздо лучше соответствует полученному нами на этих образцах экспериментальному результату $\sim 70 \mu\text{s}$ ($t_{\max} = t_{\max}^{1D}$).

Температурный интервал, в котором проводились измерения, составлял 3.4–1.7 К. Изменение температуры осуществлялось откачкой

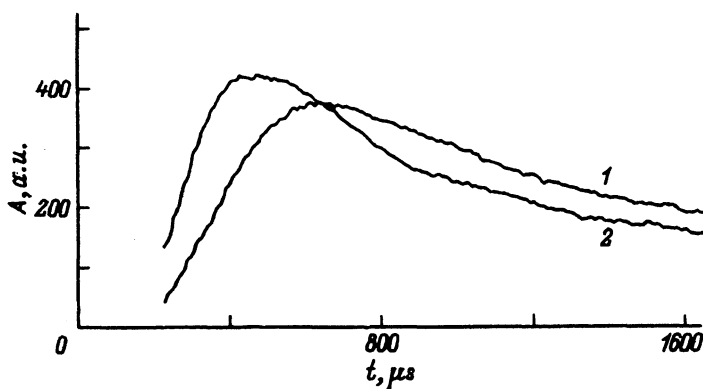


Рис. 1. Сигнал болометра при распространении тепловых импульсов в SrTiO_3 [100] длиной 3.5 мм при различных значениях приложенного электрического поля.

E , kV/cm: 1 — 0, 2 — 4. $T = 2.9$ К.

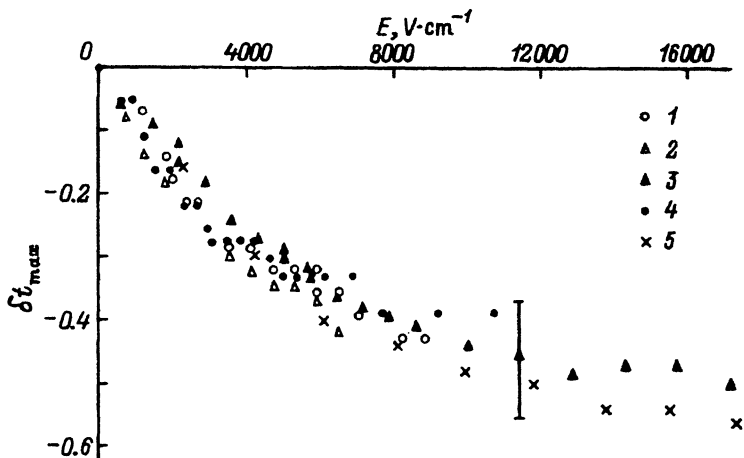


Рис. 2. Зависимость относительного изменения времени прихода максимума фоновой неравновесности от электрического поля в разных образцах SrTiO_3 и при различных температурах.

1 — [110], 1.7 мм, 2.2 К; 2 — [111], 1.7, 3.0; 3 — [111], 0.7, 3.4; 4 — [110], 0.7, 2.8; 5 — [100], 0.7, 1.7.

гелия, а величина температуры определялась по давлению его паров. При понижении температуры наблюдалось характерное плавное уменьшение времени прихода максимума фоновой неравновесности с резким скачком в области λ -точки гелия. Такой скачок объясняется изменением режима охлаждения генератора фононов гелием.

Для изучения влияния внешнего электрического поля до 20 кВ/см на распространение тепловых импульсов между генератором и детектором фононов прикладывалось напряжение. Сигналы детектора при различных величинах напряженности электрического поля и фиксированной температуре представлены на рис. 1. Из этого рисунка видно, что с ростом напряженности электрического поля происходит увели-

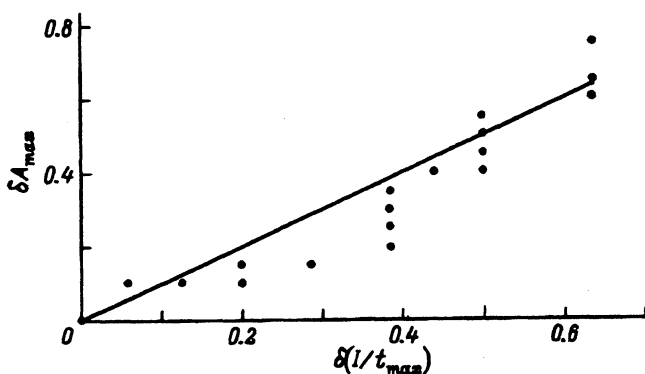


Рис. 3. Относительное изменение амплитуды сигнала болометра в зависимости от относительного изменения величины, обратной времени прихода максимума фоновой неравновесности для образца SrTiO_3 , [111], 1.7 мм, 3.0 К.

Прямая — зависимость $\delta A_{max} = \delta(1/t_{max})$.

чение амплитуды сигнала и уменьшение t_{\max} . Изменение сигнала не зависело от полярности приложенного к образцу напряжения.

Чтобы сравнить экспериментальные результаты, полученные на разных образцах SrTiO_3 и при различных температурах гелиевой бани, мы вычисляли относительное изменение t_{\max} под действием электрического поля $\sigma t_{\max} = (t_{\max}^E - t_{\max}^0)/t_{\max}^0$, где индексы 0 и E обозначают время прихода максимума фоновой неравновесности в нулевом электрическом поле и в поле напряженностью E соответственно. На рис. 2 представлена зависимость этой величины от напряженности электрического поля для различных образцов и при разных температурах термостата. Видно, что кристаллографическое направление и длина образца не влияют на относительное изменение t_{\max} . Кроме того, в пределах погрешности измерений температура гелиевого термостата не влияла на относительное изменение t_{\max} в электрическом поле.

Также отметим, что относительное изменение амплитуды сигнала болометра в электрическом поле (δA_{\max}) было сравнимо по величине с относительным изменением t_{\max} : $\delta A_{\max} \approx \delta(1/t_{\max})$ (рис. 3). Согласно Приложению 1, эта зависимость согласуется с граничным условием типа а).

Таким образом, численные значения t_{\max} , а также наблюдаемая зависимость между δt_{\max} и δA_{\max} указывают на то, что распространение тепловых импульсов в данном материале описывается в рамках задачи теплопроводности, где температура задана на поверхности генератора в виде δ -функции в момент подачи импульса тока.

В области больших электрических полей δt_{\max} и δA_{\max} были пропорциональны $E^{(0.68 \pm 0.03)}$ (рис. 4, 5).

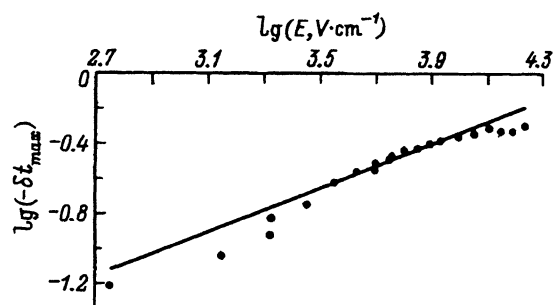
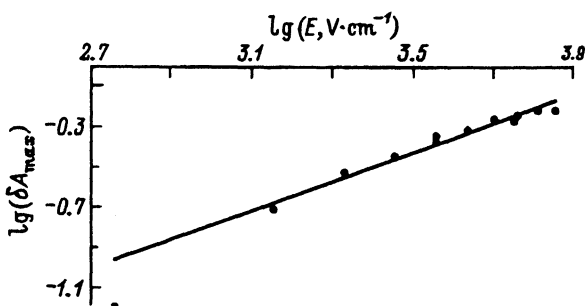


Рис. 4. Зависимость относительного изменения времени прихода максимума фоновой неравновесности от электрического поля для образца SrTiO_3 , [111], 0.7 mm, 3.0 K.

Прямая — зависимость вида $\delta t_{\max} \sim E^{0.65}$.

Рис. 5. Зависимость относительного изменения амплитуды сигнала болометра от электрического поля для образца SrTiO_3 , [111], 0.7 mm, 3.0 K.

Прямая — зависимость вида $\delta A_{\max} \sim E^{0.7}$.



2. Обсуждение результатов

В обычной феноменологической теории сегнетоэлектрика электрическое поле E связано с поляризацией P следующим соотношением [1]:

$$E = AP + BP^3. \quad (2)$$

Изменение частоты мягкой оптической моды Ω в электрическом поле определяется теми же параметрами и задается выражением [1]

$$\Omega^2 = A + BP^2. \quad (3)$$

Отметим, что зависимость частоты мягкой моды типа (3) наблюдалась в титанате стронция в экспериментах по комбинационному рассеянию света [1].

Мы работаем в области таких значений электрических полей, когда в соотношении (2) нельзя ограничиться линейным членом. Наоборот, измерения диэлектрической проницаемости,¹ выполненные на наших образцах (рис. 6) показывают, что для полей, больших 3.5 kV/cm, в этом соотношении можно полностью пренебречь линейным членом, и тогда поляризация оказывается нелинейно связанной с электрическим полем

$$P \sim \frac{E^{1/3}}{B^{1/3}}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\epsilon E} - \frac{1}{\epsilon^0} \sim P^2 \sim E^{2/3}, \quad (5)$$

где ϵ^E , ϵ^0 — диэлектрическая проницаемость материала в поле напряженностью E и в отсутствие внешнего поля соответственно. Поэтому мы думаем, что наблюдаемая дробная зависимость δt_{\max} и δA_{\max}

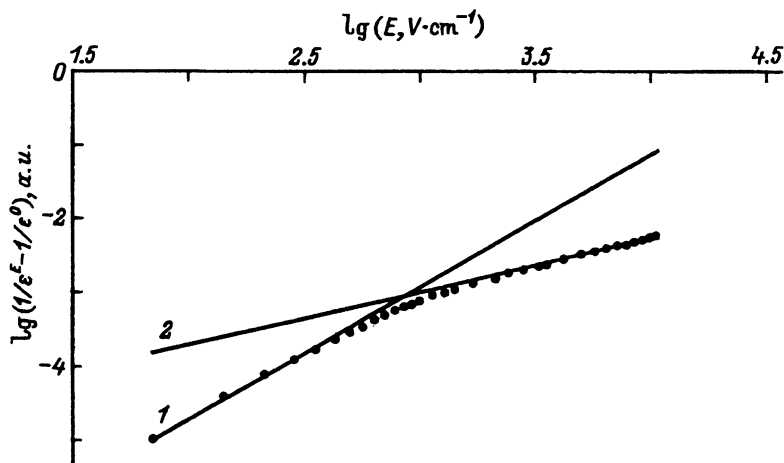


Рис. 6. Изменение диэлектрической проницаемости SrTiO_3 , [100], 0.7 mm в электрическом поле. $T = 4.2$ К.

1 — зависимость вида $E^{1.8}$; 2 — $E^{0.7}$.

¹ Измерения диэлектрической проницаемости выполнены А.В.Бабинским.

от электрического поля, близкая к $E^{2/3}$, связана с сегнетоэлектрическими свойствами SrTiO_3 , а именно с поляризуемостью кристалла в электрическом поле (4).

Как указывалось выше, при диффузионном режиме распространения теплового импульса время прихода максимума фоновой неравновесности пропорционально отношению теплоемкости и теплопроводности образца (1). В связи с этим естественно сравнить наши результаты с данными работ [2,3], в которых наблюдалось уменьшение теплоемкости и увеличение теплопроводности SrTiO_3 в электрическом поле. В обеих работах наблюдаемые эффекты авторы связывают с поведением мягкой оптической моды при приложении электрического поля к образцу. В [2] считается, что оптическая мода дает вклад в теплоемкость материала и этот вклад уменьшается с ростом частоты мягкой моды в электрическом поле (3),(4). Согласно модели, используемой в [3], оптические фононы выступают в качестве объектов резонансного рассеяния акустических фононов. При приложении поля частота оптических фононов возрастает, что приводит к уменьшению вероятности рассеяния и увеличению теплопроводности.

На наш взгляд, использование этих моделей при гелиевых температурах неравномерно, так как частота конденсации мягкой оптической моды в SrTiO_3 остается достаточно большой ($\Omega = 2.5 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$) и соответствующее равновесное число оптических фононов очень мало

$$N = \frac{1}{e^{\hbar\Omega/kT} - 1} \simeq e^{-\hbar\Omega/kT} \ll 1. \quad (6)$$

В связи с этим вклад оптических фононов в теплоемкость и их участие в процессе теплопроводности незначительны и не могут объяснять экспериментальные результаты [2,3] при низких температурах.

Итак, при гелиевых температурах в SrTiO_3 возбуждены только акустические фононы и именно ими определяются теплопроводность, теплоемкость и распространение тепловых импульсов в этом материале.

Мы рассмотрели обычную для сегнетоэлектрика модель, считая, что в материале существуют одна акустическая и одна оптическая фоновые ветви, взаимодействующие между собой. В модельном гамильтониане, в слагаемых, соответствующих потенциальной энергии, мы учли ангармонические члены четвертого порядка, а также рассмотрели ангармонические члены не только третьего, но и четвертого порядка, описывающие соответственно стрикционное и биквадратное взаимодействие акустических и оптических фононов. Мы интересовались изменением скорости акустических фононов за счет их взаимодействия с оптической модой. При таком рассмотрении величина чисел заполнения оптических фононов не имеет значения.

Расчеты показывают, что при приложении электрического поля стрикционное взаимодействие стремится уменьшить скорость акустических фононов [1], а биквадратное взаимодействие стремится ее увеличить. Полное изменение скорости зависит от того, какой механизм является преобладающим, описывается формулой

$$(v^E)^2 - (v^0)^2 = \gamma \frac{p^2}{\rho} - 8Q^2 \frac{z^2 e^2 P^2}{\rho^2 V_a^2 \Omega^2}. \quad (7)$$

Здесь Q — известная константа электрострикции, z — заряд ионов подрешетки, e — заряд электронов, V_a — объем элементарной ячейки кристалла, ρ — плотность материала, γ — константа биквадратного взаимодействия между поляризацией и деформацией в акустической волне.

В малых полях оба слагаемых имеют одинаковую зависимость от поляризации, а в сильных полях второе слагаемое от электрического поля вообще перестает зависеть (см. (3)) и зависимость скорости акустических фононов от поля обусловлена только биквадратным взаимодействием.

Рассмотрим изменение теплоемкости из-за изменения скорости (а значит, и частоты) акустической волны под действием поляризации

$$c^E = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \hbar \omega_q \frac{\partial N_0}{\partial T} = \frac{c^0}{\left(1 + \frac{\gamma P^2}{\rho(v^0)^2} - 8Q^2 \frac{z^2 e^2 P^2}{\rho^2 V_a^2 \Omega^2 (v^0)^2}\right)^{3/2}}. \quad (8)$$

Здесь ω_q — частота акустического фонона, $\omega_q = vq$; N_0 — функция распределения фононов.

Для малого относительного изменения теплоемкости получаем

$$\delta c = -\frac{3}{2} \left(\frac{\gamma P^2}{\rho(v^0)^2} - 8Q^2 \frac{z^2 e^2 P^2}{\rho^2 V_a^2 \Omega^2 (v^0)^2} \right). \quad (9)$$

Вспомним, что в реальном кристалле только одна из набора акустических мод взаимодействует с оптическими фононами, поэтому в (9) появится множитель, величина которого меньше единицы. Наряду с тем что следует рассматривать небольшое изменение скорости, наличие этого множителя указывает на малость изменения теплоемкости в электрическом поле.

В области высоких электрических полей данные работы [2] можно аппроксимировать степенной зависимостью $\delta c \sim E^{(0.7 \pm 0.05)}$, что согласуется с формулами (4), (9). Поэтому мы считаем, что изменение теплоемкости SrTiO_3 в электрическом поле, наблюдавшееся в [2] ($\sim 10\%$ в полях 20 kV/cm), можно объяснить увеличением скорости акустических фононов (7) из-за возрастания жесткости кристаллической решетки под действием наведенной полем поляризации.

Отметим теперь, что t_{\max} и A_{\max} в электрическом поле около 20 kV/cm изменяются примерно в 2.5 раза и столь большие изменения не могут объясняться только увеличением скорости акустических фононов. Согласно (1), такое изменение соответствует увеличению теплопроводности в 2.5 раза, так как изменение теплоемкости незначительно. Обращаясь к [3], мы обнаружили, что при температуре 3 К относительное изменение теплопроводности равно 2.5, что совпадает с вычислениями, сделанными на основе наших измерений. Кроме того, наша обработка данных [3] показала, что в области сильных полей $\delta K \sim E^{(0.7 \pm 0.05)}$.

В дальнейших рассуждениях для нас будет важно, что в SrTiO_3 ниже 20 К в отсутствие электрического поля наблюдалась температурная зависимость теплопроводности $K \sim T^{2.7}$ [3]. Известно [1], что ниже

температуры ~ 105 К титанат стронция находится в тетрагональной фазе и состоит из сегнетоэлектрических доменов. Близость температурной зависимости теплопроводности к кубическому закону, как отмечалось в [3], указывает на то, что основным механизмом рассеяния фононов является рассеяние на доменных границах, а внутридоменное рассеяние, в том числе рассеяние на оптических фононах, мало и слабо влияет на теплопроводность материала. Поэтому мы считаем, что сильное изменение теплопроводности в электрическом поле не может объясняться уменьшением рассеяния на мягких оптических фононах.

Обратим также внимание на то, что в [3] измерялась зависимость теплопроводности от электрического поля и в другом виртуальном сегнетоэлектрике со структурой перовскита — танталате калия. Слабая зависимость теплопроводности от электрического поля в этом материале объяснялась тем, что частота конденсации мягкой оптической моды в KTaO_3 выше, чем в титанате стронция, а значит, взаимодействие акустических фононов с мягкими оптическими слабее. Наряду с этим известно, что танталат калия до самых низких температур обладает кубической структурой и не разбивается на домены.

Таким образом, малое количество оптических фононов при низких температурах (6) и слабое внутридоменное рассеяние в SrTiO_3 , малое изменение теплоемкости и сильное изменение теплопроводности этого материала в электрическом поле, а также слабая зависимость теплопроводности KTaO_3 от поля наводят на мысль о влиянии электрического поля на рассеяние фононов доменной системой SrTiO_3 .

Мы рассмотрели распространение тепла в плоскопериодической доменной структуре, похожей на доменную структуру титаната стронция [5], считая, что градиент температуры перпендикулярен стенкам доменов. Строгое решение изложено в Приложении 2. Эффективная теплопроводность такой структуры выражается обычной формулой для теплопроводности, где в качестве эффективной длины свободного пробега l_{eff} выступает период структуры, умноженный на $(1-s)/s$, где s — коэффициент отражения фононов от границы доменов. Считается, что $1 > s \gg 1/N$, где N — число доменов. Можно показать, что при распространении тепловых импульсов на длины, много большие l_{eff} , в качестве теплопроводности выступает определенная выше эффективная теплопроводность.

В такой модели изменение теплопроводности при приложении электрического поля возможно за счет изменения либо размеров доменов, либо коэффициента отражения. Увеличение размеров доменов, естественно, должно приводить к увеличению длины свободного пробега фононов и росту теплопроводности. Но, согласно существующим в настоящее время представлениям [1], домены в SrTiO_3 не обладают сегнетоэлектрическими свойствами и внешнее электрическое поле не должно влиять на размеры доменов [5].

Даже в случае неизменяющихся размеров доменов наблюдаемые зависимости теплопроводности и характеристик теплового импульса от поля можно объяснить, если предположить, что коэффициент отражения фононов доменными стенками уменьшается под действием поляризации, наведенной электрическим полем.

В качестве возможного варианта зависимости коэффициента отражения от электрического поля мы использовали следующие соображе-

ния. Очевидно, что коэффициент отражения s пропорционален отношению разности скоростей фононов в соседних доменах к сумме этих скоростей. Поскольку соседние домены отличаются только направлением тетрагональной оси c , отличие скоростей звука в соседних доменах должно быть малым. В электрическом поле коэффициент отражения изменяется за счет изменения скоростей звука согласно формуле (7) (учет (4) в сильных полях даст зависимость $E^{2/3}$). Хотя изменение скорости под действием поля мало, оно может оказаться сравнимым с отличием скоростей в соседних доменах, что приведет к сильному изменению коэффициента отражения s . К сожалению, на основании (7) невозможно определить знак изменения коэффициента отражения.

Отметим, что в [3] наблюдалось изменение температурной зависимости теплопроводности SrTiO_3 в присутствии электрического поля. Это согласуется с формулой (П 2.14), так как $l \sim 1/T^n$.

На основании выполненной работы можно сделать следующие выводы.

Показано, что распространение тепловых импульсов в титанате стронция происходит в режиме диффузии и описывается в рамках задачи теплопроводности, где температура задана на поверхности генератора в виде δ -функции в момент подачи импульса тока. При этом необходимо учитывать размеры генератора и детектора фононов.

В сильных электрических полях наблюдались относительные изменения времени прихода максимума фононной неравновесности и амплитуды сигнала болометра, пропорциональные $E^{2/3}$.

На основании данных [2,3] выявлена зависимость относительного изменения теплоемкости и теплопроводности SrTiO_3 от электрического поля вида $E^{2/3}$ в сильных полях.

Уменьшение теплоемкости титаната стронция в электрическом поле [2] объясняется увеличением скорости акустических фононов из-за возрастания жесткости кристаллической решетки под действием наведенной полем поляризации.

Установлено численное соответствие между изменением теплопроводности [3] и изменением характеристик теплового импульса. Хотя механизм влияния электрического поля на эти кинетические величины непонятен, предполагается, что электрическое поле изменяет свойства несегнетоэлектрической доменной структуры титаната стронция.

Авторы благодарят В.В. Леманова за предложение по постановке эксперимента, А.В. Бабинского за измерения диэлектрической проницаемости, В.И. Козуба, А.К. Таганцева, В.А. Санину и сотрудников ИРЭ РАН А.Г. Козорезова, Е.Н. Хазанова, А.В. Таранова за обсуждение результатов работы. А.В. Суслов благодарен И.Л. Дричко за поддержку и постоянное внимание к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

В [4] задача о диффузионном распространении теплового импульса рассматривалась на основе решения задачи теплопроводности с заданным начальным условием. При этом считалось, что после окончания короткого импульса тока отвод тепла от генератора в жидкий гелий происходит так же медленно, как и в образец. Иная физическая картина соответствует очень быстрому отводу тепла гелиевым термостатом.

В этом случае мы должны решать уравнение теплопроводности с заданным граничным условием

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (\text{П1.1})$$

где $\chi = K/c$ — коэффициент температуропроводности образца.

Граничные условия возможны двух видов: задание на границе самой температуры либо задание потока тепла

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad T \Big|_{z=0} &= f(x, y, t), \\ \text{b)} \quad -K \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} &= f(x, y, t), \end{aligned} \quad (\text{П1.2})$$

где f — импульсная функция времени, отличная от нуля только в течение длительности импульса.

Считая, что изменения неравновесной температуры происходят только вдоль координаты z , получаем известные решения [6]

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \iint_{S_g} \frac{dx' dy'}{4\pi\chi} \int_0^t \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{\pi}(t-t')} f(x', y', t') \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}{4\chi(t-t')} \right\} \begin{cases} z / (2\sqrt{\chi}(t-t')^{3/2}), & \text{a)} \\ \sqrt{\chi} / (K(t-t')^{1/2}). & \text{b)} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

Интегрирование в плоскости (x', y') проводится по поверхности генератора S_g , считая f на этой поверхности постоянной. Импульс тока будем считать очень коротким

$$f(x, y, t) = B\delta(t). \quad (\text{П1.4})$$

При этом мы рассматриваем сигнал детектора на временах t , много больших длительности импульса t_p

$$t \approx L^2 / (4\chi) \gg t_p,$$

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= B \iint_{S_g} \frac{dx' dy'}{4(\pi\chi t)^{3/2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}{4\chi t} \right\} \begin{cases} z / (2t), & \text{a)} \\ \chi / K. & \text{b)} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{П1.5})$$

Обратим внимание на то, что на временах порядка t при использовании решения типа а) на границе образца сохраняется нулевая температура, а для решения типа б) остается нулевым тепловой поток. Таким образом, решения отличаются не только тем, какая величина задана в момент импульса, но и тем, какая величина равна нулю на

больших временах. Именно это отличие на временах порядка t важно для нас. Естественно думать, что при таких временах температура генератора равна температуре гелиевого термостата, т.е. решение типа а) больше соответствует экспериментальной ситуации.

Можно считать также, что приемник усредняет функцию (П 1.3) по своей поверхности. Тогда для сигнала детектора получим выражение

$$A(L, t) = \frac{B}{S_r} \iint_{S_r} dx dy \iint_{S_g} \frac{dx' dy'}{4(\pi \chi t)^{3/2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}{4\chi t} \right\} \begin{cases} L/(2t), & \text{а)} \\ \chi/K, & \text{б)} \end{cases} \quad (\text{П1.6})$$

где L — длина образца.

Для случая б) эта формула совпадает с основной формулой, полученной в [4], тогда как для случая а) наблюдается отличие. Так, для случая точечных генератора и детектора, т.е. для трехмерной диффузии, получим

$$t_{\max}^{3D} = \frac{c\rho}{10K} L^2, \quad \text{а)} \\ t_{\max}^{3D} = \frac{c\rho}{6K} L^2, \quad \text{б)} \quad (\text{П1.7})$$

где ρ — плотность материала.

Для бесконечно протяженных генератора и детектора, т.е. одномерной диффузии, получим

$$t_{\max}^{1D} = \frac{c\rho}{6K} L^2, \quad \text{а)} \\ t_{\max}^{1D} = \frac{c\rho}{2K} L^2. \quad \text{б)} \quad (\text{П1.8})$$

В [4] обосновывается необходимость пересчета экспериментально наблюдаемого t_{\max} к случаю трехмерной или одномерной диффузии, чтобы исключить влияние размеров генератора и детектора на экспериментальные результаты. Из (П1.7), (П1.8) следует, что в случаях а) и б) формулы пересчета будут несколько различаться.

Рассмотрим теперь величину максимума сигнала болометра

$$A_{\max} = A(L, t_{\max}) \sim \begin{cases} \chi, & \text{а)} \\ 1/c. & \text{б)} \end{cases} \quad (\text{П1.9})$$

Видно, что при разных граничных условиях A_{\max} различным образом связано с тепловыми свойствами исследуемого материала.

Рассмотрим распространение тепла в системе N плоскопараллельных слоев толщиной d . Пусть градиент температуры направлен вдоль оси x перпендикулярно плоскости слоев, тогда функция распределения частиц состоит из равновесной функции и добавки, пропорциональной градиенту температуры

$$n = n_0(T(x)) - \frac{dT}{dx} \frac{\partial n_0}{\partial T} f(x). \quad (\text{П}2.1)$$

Последняя часть удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{df^\pm(x)}{dx} \pm \frac{1}{l} f^\pm(x) = 1. \quad (\text{П}2.2)$$

Длина свободного пробега l описывает упругое рассеяние частиц внутри слоя, верхний индекс $+$ соответствует движению частиц в положительном направлении оси x , а индекс $-$ соответствует движению в противоположном направлении. На границе между слоями частицы отражаются с коэффициентом s или проходят в соседний слой с коэффициентом $(1 - s)$.

Введем обозначение $f_n^\pm(x)$, где n — номер слоя. Сохранение частиц на границе между n и $(n + 1)$ слоями запишем в виде

$$\begin{aligned} f_{(n+1)}^+(nd) &= (1 - s)f_n^+(nd) + sf_{(n+1)}^-(nd), \\ f_n^-(nd) &= (1 - s)f_{(n+1)}^-(nd) + sf_n^+(nd). \end{aligned} \quad (\text{П}2.3)$$

На границах системы можно ввести особые условия отражения

$$\begin{aligned} f_1^+(0) &= s_0 f_1^-(0), \\ f_N^-(Nd) &= s_0 f_N^+(Nd), \end{aligned} \quad (\text{П}2.4)$$

где коэффициент s_0 не обязательно совпадает с коэффициентом s . Скорость частиц, коэффициенты отражения и функция распределения могут зависеть от импульса частиц, и решение уравнений (П 2.2) с условиями (П 2.3), (П 2.4) даст число частиц с данным импульсом. Полный поток энергии может быть найден суммированием по всем импульсам.

Если внутри слоя частицы распространяются без рассеяния ($l \rightarrow \infty$), решение (П 2.2) представляет собой линейную функцию координат

$$\begin{aligned} f_n^+(x) &= [x - (n - 1)d] + da_n^+, \\ f_n^-(x) &= [x - nd] + da_n^-. \end{aligned} \quad (\text{П}2.5)$$

Для констант a_n^\pm мы имеем разностную систему $2N$ уравнений

$$\begin{aligned} a_{n+1}^+ &= (1 - s)(1 + a_n^+) + s(-1 + a_{n+1}^-), \\ a_n^- &= (1 - s)(1 + a_{n+1}^-) + s(1 + a_n^+), \\ a_1^+ &= s_0(-1 + a_1^-), \quad a_N^- = s_0(1 + a_N^+). \end{aligned} \quad (\text{П}2.6)$$

Парциальный поток частиц со скоростью v равен

$$q = -\frac{dT}{dx} \frac{\partial n_0}{\partial T} v d (1 + a_N^+ - a_N^-). \quad (\text{П} 2.7)$$

Эффективная теплопроводность системы дается обычным выражением с длиной свободного пробега $d(1 + a_N^+ - a_N^-)$, которая должна быть определена из системы уравнений (П 2.6).

Точное решение этой системы было найдено методом, в котором введены производящие функции — полиномы независимой переменной z

$$P^\pm(z) = \sum_{n=1}^N a_n^\pm z^n. \quad (\text{П} 2.8)$$

Суммирование (П 2.6) приводит к согласованной системе уравнений для производящих полиномов

$$\begin{aligned} & P^+(z) [1 - z(1 - s)] - sP^-(z) = \\ & = (1 - 2s) \left(\frac{z^2 - z^{N+1}}{1 - z} \right) + (a_1^+ - sa_1^-) z - (1 - s)a_N^+ z^{N+1} - \\ & \quad - P^-(z)sz + P^-(z)(z - 1 + s) = \\ & = -(1 - 2s) \left(\frac{z^2 - z^{N+1}}{1 - z} \right) + (a_N^- - sa_N^+) z^{N+1} - (1 - s)a_1^- z. \end{aligned} \quad (\text{П} 2.9)$$

Разрешим (П 2.9) по формулам Крамера

$$P^+(z) = \frac{P_1(z)}{P_0(z)},$$

$$P^-(z) = \frac{P_2(z)}{P_0(z)},$$

$$P_0(z) = (s - 1)(1 - z)^2,$$

$$P_1(z) = -(1 - 2s)(z^2 - z^{N+1}) + a_1^+ z(z - 1 + s) - a_1^- sz^2 + \\ + a_N^+ z^{N+1} [z(s - 1) + (1 - 2s)] + a_N^- sz^{N+1},$$

$$P_2(z) = -(1 - 2s)(z^2 - z^{N+1}) + a_1^+ sz^2 + a_1^- z [(s - 1) + z(1 - 2s)] - \\ - a_N^+ sz^{N+1} + a_N^- z^{N+1}(1 - z + sz). \quad (\text{П} 2.10)$$

Можно убедиться, что соотношения для a_1^+ и a_N^+ , следующие из определения (П 2.8), в равенствах (П 2.10) выполняются тождественно. Таким образом, с помощью формул (П 2.10) все коэффициенты a_n^\pm выражаются через выделенные коэффициенты a_1^\pm , a_N^\pm .

Выражения (П 2.10), по определению, должны сводиться к целым полиномам переменной z , т.е. полиномы $P_1(z)$, $P_2(z)$ должны нацело делиться на $(z - 1)^2$. Напишем условия делимости

$$P_{1,2}(z = 1) = 0, \quad P'_{1,2}(z = 1) = 0. \quad (\text{П} 2.11)$$

Можно убедиться, что это не четыре, а два условия на коэффициенты, так как условия для полиномов P_1 и P_2 взаимосвязаны. Эти два условия вместе с граничными условиями позволяют определить из (П 2.6) все выделенные коэффициенты, а через них и все остальные коэффициенты a_n^{\pm} .

Выпишем здесь выражение для эффективной длины свободного пробега

$$l_{eff} = d \frac{N(1-s)(1-s_0)}{(1+sN)(1-s_0) + 2(s_0-s)}. \quad (\text{П } 2.12)$$

Как видно, при $s = 1$ все частицы отражаются ($l_{eff} = 0$), а при $s = 0$ частицы свободно пролетают через все N слоев. Для большого числа слоев ($N \gg 1$) и достаточно большого коэффициента отражения $1 > s \gg 1/N$ мы получаем не зависящее от N выражение

$$l_{eff} = d \frac{(1-s)}{s}. \quad (\text{П } 2.13)$$

Тот же метод позволяет найти решение и для столкновительного уравнения (П 2.2) (конечная величина l) с условиями (П 2.3), (П 2.4). Это решение довольно громоздко, но для большого числа слоев получается выражение, обобщающее (П 2.13)

$$l_{eff} = \frac{d(1-s)}{s + \sqrt{\frac{d^2}{l^2} + \frac{2s}{1-s} \frac{d}{l}}}, \quad (\text{П } 2.14)$$

которое показывает, что в качестве длины свободного пробега выступает наименьшая из длин l или $d(1-s)/s$.

Если рассматривать распространение теплового импульса на расстояния, превышающие l_{eff} , то можно использовать уравнение теплопроводности, где коэффициент теплопроводности выражается через вычисленную в этом Приложении эффективную длину свободного пробега.

Список литературы

- [1] Лайнс М., Гласс А. Сегнетоэлектрики и родственные материалы. М.: Мир, 1981.
- [2] Lawless W.N. // Phys. Rev. B. 1978. V. 18. P. 2394.
- [3] Steigmeier E.F. // Phys. Rev. 1968. V. 168. P. 523.
- [4] Сулов А.В., Таганцев А.К. // ФТТ. 1992. Т. 34. № 1. С. 197.
- [5] Sawaguchi E., Kikuchi A., Kodera Y. // J. Phys. Soc. Japan. 1963. V. 18. P. 459.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 289.

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН
Санкт-Петербург

Поступило в Редакцию
24 марта 1994 г.