1994 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 36, № 10
1994 SOLID STATE PHYSICS Vol. 36, N 10

УДК 538.245

СОЛИТОНЫ В АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛЕНКЕ

В.В.Киселев, А.П.Танкеев

Для пластины одноосного антиферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» получены эффективные уравнения слабонелинейной динамики голдстоуновских обменно-магнитостатических волн. Предсказана возможность существования «алгебраических» солитонов и исследованы условия их образования в зависимости от толщины пластины и величины внешнего магнитного поля, направленного перпендикулярно ее плоскости.

В последние годы уделялось значительное внимание исследованию нелинейных магнитостатических волн в ферромагнитных пленках, были сформулированы условия их наблюдения и проведены некоторые экспериментальные исследования [1,2]. Что же касается антиферромагнетиков, то для них такие работы только начинаются. Главная проблема состоит в получении высококачественных образцов — пленок. Сейчас уже и в этой области наметились некоторые успехи, связанные с достижениями молекулярно-лучевой эпитаксии [3,4]. Появились и теоретические работы по изучению особенностей распространения нелинейных дипольных спиновых волн в двухподрешеточных одноосных антиферромагнитных материалах [5], где обсуждаются условия формирования солитонов огибающей активационных волн. Интерес к нелинейным свойствам антиферромагнитных пластин обусловлен двумя обстоятельствами: во-первых, фундаментальными свойствами этого типа материалов, а во-вторых, возможными приложениями.

В настоящей работе описано взаимодействие малоамплитудных голдстоуновских спиновых волн, распространяющихся вдоль выделенного направления в тонкой антиферромагнитной пластине с анизотропией типа «легкая плоскость», и обсуждаются условия формирования уединенных волн-солитонов. Предполагается, что ось анизотропии и внешнее магнитное поле перпендикулярны поверхности пластины, закрепление спинов на ее поверхности отсутствует. Исследуемая модель достаточно проста и соответствует реальным антиферромагнетикам. Для конкретных оценок можно брать материальные параметры $MnCO_3$ (с точкой Нееля $T_N = 32.5$ K), гематита (α-Fe_2O_3) с $T_N = 950$ K (являющегося «легкоплоскостным» выше точки Морина $T_N = 260$ K) и бората железа ($FeBO_3$) с $T_N = 348$ K. Условие $M = 0$, определяющее основное состояние антиферромагнетика (в отсутствие взаимодействия Дзялошинского), не препятствует формированию как линейных магнитостатических волн в ограниченных образцах [3,6], так и нелинейных. Для вывода эффективных уравнений эволюции обменно-магнитостатических волн мы использовали редуктивную теорию возмущений, которая позволяет корректно аппроксимировать слабонелинейную динамику дисперсионных систем различных типов, приводя к локальным интегрируемым эволюционным уравнениям [7,8].

Учет магнитостатики, а следовательно, конечных размеров образца даже для волн, движущихся в одном направлении, значительно усложняет задачу, делая ее не только неодномерной, но и нелокальной. В настоящей работе мы покажем, что вариант редуктивной теории возмущений, реализованный в [9] для вывода эффективных уравнений эволюции внутренних волн в стратифицированной жидкости, допускает обобщение и позволяет адекватно описать слабонелинейную нелокальную динамику магнитостатических колебаний.

Мы полагаем, что, несмотря на частный характер решаемой задачи, сама схема включения магнитостатики по теории возмущений и полученные эффективные уравнения будут универсальными. Заметим, что для постановки задачи необходима детальная информация о спектре линейных мод. Спектр спиновых возбуждений — магнонов «легкоплоскостного» двухподрешеточного антиферромагнетика — имеет две ветви: голдстоуновскую и активационную. Учет магнитостатики приводит к тому, что частоты спиновых волн становятся зависящими от направления распространения волны и формы образца. Существенно, что роль внешнего постоянного магнитного поля не сводится только к созданию макроскопического магнитного момента и к изменению закона дисперсии линейных мод: от его величины зависят интенсивность нелинейных взаимодействий и, как следствие, условия существования уединенных волн-солитонов. Эффективные уравнения динамики голдстоуновских обменно-магнитостатических волн отличаются в различных интервалах значений внешнего магнитного поля. В области умеренных внешних полей система описывается нелокальной интегрируемой моделью Бенджамина–Оно [8,9], которая допускает существование многосолитонных возбуждений. В слабых магнитных полях солитонные возбуждения, по-видимому, отсутствуют.

Интересно, что тонкую магнитную пластину при отсутствии закрепления спинов на ее поверхности можно описывать как двумерную систему с усредненными по толщине пластины размагничивающими полями, выраженными в терминах результирующей намагниченности. Такое приближение ранее использовалось в [10] при изучении распространения активационных спиновых волн в ферромагнитной пластинке. На примере нашей задачи мы покажем, что редуктивная теория возмущений и усредненное описание пластины как двумерной системы самосогласованны и приводят к одинаковым результатам для малоамплитудных волн.

1. Постановка задачи и исходные выражения

Рассмотрим антиферромагнитную пластинку с анизотропией типа «легкая плоскость». Постоянное магнитное поле $\mathbf{H}$, ось анизотропии направлены перпендикулярно поверхности пластины вдоль оси z. Для решения задачи удобно использовать следующую параметризацию для векторов намагниченности подрешеток:

$$M_i = M_0\left\{\cos\theta_i\cos\varphi_i;\ \cos\theta_i\sin\varphi_i;\ \sin\theta_i\right\}, \qquad i = 1,2,$$

M_0 — намагниченность насыщения подрешеток.

В независимых переменных θ_i и φ_i выражение для плотности энергии w имеет вид [11]

$$w = \left(M_0^2/2\right)\left\{\alpha_1\left[(\partial_i\theta_1)^2 + (\partial_i\theta_2)^2 + \cos^2\theta_1(\partial_i\varphi_1)^2 + \cos^2\theta_2(\partial_i\varphi_2)^2\right] + \right.$$

$$+ 2\alpha_2\left[\partial_i\theta_1\partial_i\theta_2(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\Phi + \cos\theta_1\cos\theta_2) + \right.$$

$$+ \partial_i\varphi_1\partial_i\varphi_2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\Phi - \partial_i\theta_1\partial_i\varphi_2\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\Phi +$$

$$\left. + \partial_i\theta_2\partial_i\varphi_1\cos\theta_1\sin\theta_2\sin\Phi\right] + 2\delta(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\Phi + \sin\theta_1\sin\theta_2) +$$

$$+ \beta_1(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2 - \beta_2(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)^2 - [\cos\theta_1\cos\varphi_1 + \cos\theta_2\cos\varphi_2]h_x^{(m)} -$$

$$\left. -[\cos\theta_1\sin\varphi_1 + \cos\theta_2\sin\varphi_2]h_y^{(m)} - (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)h_z^m - 2(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)h\right\}, \quad (1)$$

где $\partial_i = \partial/\partial x_i$; α_1, α_2 и δ — константы неоднородного и однородного обмена соответственно; β_1, β_2 — константы анизотропии второго порядка (для антиферромагнетика с анизотропией типа «легкая плоскость» $\beta_1 > 0$); $\mathbf{H}$ — внешнее магнитное поле; $\mathbf{h} = \mathbf{H}/M_0$; $\mathbf{h}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)}/M_0$.

Размагничивающее поле $\mathbf{H}^{(m)}$ определяется уравнениями магнитостатики

$$\Delta\varphi + 4\pi\,\mathrm{div}(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2) = 0, \qquad \mathbf{H}^{(m)} = -\nabla\varphi, \quad (2)$$

$$\Delta\tilde{\varphi} = 0, \qquad \tilde{\mathbf{H}}^{(m)} = -\nabla\tilde{\varphi}, \quad (3)$$

где φ и $\tilde{\varphi}$ — магнитные скалярные потенциалы внутри и вне пластины соответственно.

Основное однородное состояние системы определяется условием минимума энергии $\partial w/\partial\theta_i = \partial w/\partial\varphi_i = 0$, откуда следуют равновесные значения углов

$$\varphi_1^0 - \varphi_2^0 = \pi, \quad \theta_1^0 = \theta_2^0 = \theta^0, \quad \sin\theta^0 = h/2(\delta + 2\pi - \beta_2). \quad (4)$$

Уравнения, определяющие динамику нелинейных возбуждений в исследуемой системе, могут быть получены варьированием по полям φ_i и θ_i лагранжиана с плотностью

$$L = (M_0/g)\left(\sin\theta_1\partial_t\varphi_1 + \sin\theta_2\partial_t\varphi_2\right) - w, \quad (5)$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, g — гиромагнитное отношение.

Система этих уравнений имеет следующий вид:

$$\int d\mathbf{r}\,\delta L/\delta\theta_i = 0,$$

$$\int d\mathbf{r}\delta L/\delta\varphi_i = 0, \tag{6}$$

а граничные условия для нее в отсутствие закрепления спинов на поверхности пластины определяются соотношениями

$$\partial_z\theta_i = \partial_z\varphi_i\Big|_{0,d} = 0, \qquad \varphi = \tilde{\varphi}\Big|_{0,d},$$

$$-\partial_z\tilde{\varphi} = -\partial_z\varphi + 4\pi M_0(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\Big|_{0,d}, \tag{7}$$

d — толщина пластины. Дальнейшая задача сводится к построению эффективных уравнений эволюции слабонелинейных волн намагниченности на основе полных макроскопических уравнений (2), (3), (6) с граничными условиями (7).

2. Спектр спиновых возбуждений

Для вычисления размагничивающего поля и расчета спектра спиновых волн используем следующий приближенный подход. Будем считать, что пластина идеальна и однородна вдоль любого слоя, параллельного поверхности, и константы материала не меняются при переходе от слоя к слою. Неоднородной же является лишь энергия магнитостатики. Известно, что в отсутствие закрепления спинов на поверхности и в предположении, что векторы намагниченностей подрешеток $\mathbf{M}_i$ $(i = 1, 2)$ слабо зависят от координаты, нормальной к поверхности пластины, удается получить явное решение магнитостатической задачи (2), (3), (7) и ввести магнитодипольную энергию пластины, усредненную по ее толщине (см., например, [12])

$$E_m = \int w_m dr = -\left(M_0^2/d\right)\int d\rho dz \mathbf{h}^{(m)}\left(\tilde{\mathbf{m}} + \mathbf{n}m_0\right).$$

Здесь $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$, $m_0 = \sin\theta^0$ — однородная (равновесная) часть вектора ферромагнетизма, $\mathbf{m} = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)/2M_0$, $\tilde{m}$ — динамические отклонения вектора ферромагнетизма от m_0: $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \tilde{\mathbf{m}}$.

Компоненты эффективного магнитостатического поля, действующего на $\tilde{\mathbf{m}}$, $\langle\mathbf{h}^m\rangle = -2\delta E_m/\delta\tilde{\mathbf{m}}$, имеют вид

$$\langle h_z^m\rangle = -8\pi\sin\theta^0 - 8\pi\int d\boldsymbol{\varkappa}\tilde{m}_z(\boldsymbol{\varkappa})\exp(i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho})\Big[1 - \exp(-|\boldsymbol{\varkappa}|d)\Big] \Big/ |\boldsymbol{\varkappa}|d,$$

$$\langle h_i^m\rangle = 8\pi\int d\boldsymbol{\varkappa}\varkappa_i\varkappa^{-2}\Big(\boldsymbol{\varkappa}\tilde{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\varkappa})\Big)\exp(i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho})\left\{\Big[\Big(1 - \exp(-|\boldsymbol{\varkappa}|d)\Big) \Big/ |\boldsymbol{\varkappa}|d\Big] - 1\right\},$$

$$i = x, y; \quad \varkappa = (k_x, k_y), \quad \tilde{\mathbf{m}}(\varkappa) = (2\pi)^{-2}\int d\boldsymbol{\rho}\exp(-i\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\rho})\tilde{m}(\boldsymbol{\rho}). \tag{8}$$

Заметим, что такие же формулы для $\langle h_x^m\rangle$, $\langle h_y^m\rangle$, $\langle h_z^m\rangle$ получаются, если вместо усреднения по толщине пластинки магнитостатической энергии провести усреднение самих размагничивающих полей, полученных в результате решения соответствующей магнитостатической задачи [12].

При таком выборе дипольных полей уравнения Ландау–Лифшица (6) для пластины редуцируются к двумерным уравнениям, где полевые переменные зависят лишь от координат x и y. Ниже будет показано, что уравнения Ландау–Лифшица с усредненными дипольными полями дают такие же результаты для слабонелинейных возбуждений, что и более аккуратное рассмотрение на основе редуктивной теории возмущений, когда учитывается зависимость векторов намагниченности M_i от координаты z. Из (6), (8) следует, что спектр спиновых волн имеет две ветви: голдстоуновскую и активационную. Как уже обсуждалось выше, нас будет интересовать только голдстоуновская ветвь возбуждений. Заметим, что закон дисперсии для голдстоуновских возбуждений не зависит от направления движения волны в плоскости (x, y) и имеет следующий вид:

$$\omega^2 = \alpha'' k_x^2 \Big(2gM_0\Big)^2 \Bigg\{ \cos^2\theta^0 \Big[\delta - \beta_2 + 2\pi\left[(1 - \exp(-|k_x|d))/|k_x|d\right]\Big] +$$

$$+ \Big(\alpha\cos^2\theta^0 + \alpha''\sin^2\theta^0\Big)k_x^2 \Bigg\}, \qquad (9)$$

где

$$\alpha'' = (\alpha_1 - \alpha_2)/2, \qquad \alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2.$$

Для определенности мы предположили, что волны распространяются вдоль оси x.

3. Эффективные уравнения эволюции (область умеренных магнитных полей)

В настоящем разделе будут получены эффективные уравнения для описания взаимодействия голдстоуновских мод в пластине. Задача имеет два характерных размера: толщину пластины d и характерный размер магнитной неоднородности (солитона) Δ. Будем рассматривать волны в пластине, для которой

$$\Delta \gg \max\Big\{ \left(\alpha + \alpha''\,\mathrm{tg}^2\,\theta^0\right)/\pi d;\; d \Big\}. \qquad (10)$$

Неравенство (10) по существу означает, что в законе дисперсии (9) для таких длин волн (или k) в фигурной скобке можно пренебречь обменным слагаемым по сравнению с магнитостатическим и считать $k_x d \ll 1$. Под областью умеренных магитных полей будем понимать область, где одновременно с (10) выполняется следующее условие

$$d/(\delta\Delta) \ll \Big[h/2(\delta + 2\pi - \beta_2)\Big]^2 \ll 1. \qquad (11)$$

В этом интервале полей и пространственно-временных масштабов отклонения углов θ_i от равновесного значения θ^0 малы по сравнению с $\sin\theta^0$: $\theta_i - \theta^0 \ll \sin\theta^0$ и закон дисперсии является обменно-магнитостатическим

$$\omega^2 = \left(2gM_0\right)^2 \alpha'' k_x^2 \cos^2\theta^0 \left(\delta + 2\pi - \beta_2 - \pi d|k_x|\right). \tag{12}$$

Для вывода эффективных уравнений, описывающих малоамплитудные обменно-магнитостатические волны, используем редуктивную теорию возмущений, основанную на методе растяжения координат [7]. Чтобы лучше проиллюстрировать самосогласованность различных приближений и достоинства метода, приведем два варианта вывода эффективных уравнений.

Выведем сначала эффективные уравнения слабонелинейной динамики голдстоуновских мод исходя из полных уравнений Ландау–Лифшица, магнитостатики и граничных условий к ним (2), (3), (6), (7). При таком описании масштабные преобразования редуктивной теории возмущений вне и внутри пластины отличаются. Внутри пластины решение уравнений (2), (6), (7) ищем в виде

$$\varphi_i = \varphi_i^{(0)}(\xi,\tau,z) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_i^{(n)}(\xi,\tau,z), \quad \xi = \varepsilon(x+st), \quad \tau = \varepsilon^2 t,$$

$$\theta_i = \theta^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \theta_i^n(\xi,\tau,z), \quad s = 2M_0 g \cos\theta^0 \left[\alpha''(\delta + 2\pi - \beta_2)\right]^{1/2}. \tag{13}$$

Здесь ε — малый параметр, характеризующий отклонение системы от основного состояния: $d\,\mathrm{ctg}\,\theta^0/\delta\Delta \sim \theta_i - \theta^0 \sim 0(\varepsilon) \ll 1$. Масштабные преобразования выбраны так, чтобы согласовать с законом дисперсии (12) пространственно-временной отклик системы на возмущение и сбалансировать эффекты дисперсии и характерной в области умеренных магнитных полей квадратичной нелинейности.

Вне пластины решение магнитостатических уравнений (3) ищем в виде

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^{(0)}(\eta,z,\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \tilde{\varphi}^{(n)}(\eta,z,\tau), \qquad \eta = x + st, \quad \tau = \varepsilon^2 t. \tag{14}$$

Эффективные уравнения для голдстоуновских возбуждений получаются в результате сшивки этих двух вариантов теории возмущений. Аналогичный подход использовался ранее в [9] при описании волн в стратифицированной жидкости. Заметим, что теперь каждый порядок теории возмущений содержит члены, зависящие от координаты z. Успех метода основан на возможности разделения переменных ξ и z (или η и z) в уравнениях теории возмущений. Цепочку уравнений теории возмущений решаем последовательно, начиная с низших порядков по степеням ε. Необходимые для этого граничные условия получаются из разложений по параметру ε условий (7). Важно, что условия

$$\partial_z \theta_i^{(n)}\Big|_{0,d} = \partial_z \varphi_i^{(n)}\Big|_{0,d} = 0 \qquad (i = 1,2)$$

в низших порядках теории возмущений приводят к независимости от координаты z следующих функций:

$$\varphi_i^{(0)}; \qquad \varphi_i^{(1)}; \qquad \theta_i^{(1)} \qquad (i=1,2);$$

$$\varphi_1^{(n)}+\varphi_2^{(n)} \qquad (n=2,3); \qquad \theta_1^{(2)}+\theta_2^{(2)}.$$

Отметим, что этот результат оправдывает предположение о независимости от переменной z намагниченностей M_i $(i=1,2)$ в тонкой пластине. Это значительно упрощает задачу, но не является принципиальным, так как используемый подход применим и к более сложным граничным условиям. Из уравнений теории возмущений в порядках ε^0, ε находим

$$\theta_1^{(0)}=\theta_2^{(0)}=\theta^{(0)}, \qquad \varphi_1^{(0)}(\xi,\tau)=\pi+\varphi_2^{(0)}(\xi,\tau),$$

$$\sin\theta^0=(h/2)\Big[\delta+2\pi-\beta_2\Big], \qquad \theta_1^{(1)}=\theta_2^{(1)}=\gamma\partial_\xi\varphi_1^{(0)},$$

$$\varphi^{(0)}=8\pi M_0\sin\theta^0\Big[z-(d/2)\Big], \qquad 0\leqslant z\leqslant d,$$

$$\gamma=\Big[\alpha''/(\delta+2\pi-\beta_2)\Big]^{1/2},$$

$$\tilde\varphi^{(0)}=\begin{cases}4\pi M_0\sin\theta^0 d, & z\geqslant d,\\ -4\pi M_0\sin\theta^0 d, & z\leqslant 0.\end{cases} \tag{15}$$

Вне пластины определение магнитостатического потенциала $\tilde\varphi^{(1)}$ (порядок $O(\varepsilon)$) сводится к решению задачи Дирихле. В частности, в области $z\geqslant d$ имеем

$$\left(\partial_\eta^2+\partial_z^2\right)\tilde\varphi^{(1)}=0, \qquad \tilde\varphi^{(1)}\to 0 \qquad (z\to\infty),$$

$$\tilde\varphi^{(1)}(\eta,\tau,z=d)=\varphi^{(1)}(\xi,\tau,z=d). \tag{16}$$

Граничные условия при $z=d$ в (16) выражают непрерывность потенциала на границе раздела двух сред. Здесь возникает проблема сшивки двух вариантов редуктивной теории возмущений с различным выбором переменных ξ и η $(\xi=\varepsilon\eta)$. Решение краевой задачи (21) имеет вид

$$\tilde\varphi_1^{(1)}=(1/\pi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde\varphi^{(1)}(\eta',z=d)(z-d)}{(z-d)^2+(\eta-\eta')^2}d\eta', \quad (z\geqslant d), \tag{17}$$

и, следовательно, при $z=d$ имеем

$$\partial_z\tilde\varphi^{(1)}\Big|_d=(1/\pi)\partial_\eta P\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde\varphi^{(1)}(\eta',z=d)d\eta'}{(\eta'-\eta)}=\hat H\partial_{\eta'}\tilde\varphi^{(1)}(\eta',z=d). \tag{18}$$

Здесь $\hat{H}$ является преобразованием Гильберта

$$\hat{H}u \equiv (1/\pi)P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx'u(x')}{x'-x}.$$

Символ $P\int f(x)dx$ означает интеграл в смысле главного значения. При вычислении магнитостатического потенциала внутри пластины следует использовать выражение (18) для формулировки краевого условия при $z = d$ (см. (7)). Поскольку внутри пластины используется переменная $\xi = \varepsilon\eta$, предельное значение производной следует выразить в терминах $\xi, \varphi^{(1)}(\xi, \tau, z = d)$. Из (16), (18) получается следующее выражение для предельного значения производной $\partial_z\tilde{\varphi}^{(1)}\big|_d$ в терминах ξ:

$$\partial_z\tilde{\varphi}^{(1)}\Big|_d = \varepsilon\hat{H}\partial_{\xi'}\varphi^{(1)}(\xi', z = d) = O(\varepsilon). \tag{19}$$

Аналогичное рассмотрение для $z = 0$ дает

$$\partial_z\tilde{\varphi}^{(1)}\Big|_0 = -\varepsilon\hat{H}\partial_{\xi'}\varphi^{(1)}(\xi', z = 0) = \partial_z\tilde{\varphi}^{(1)}\Big|_d = O(\varepsilon). \tag{20}$$

Формулы (19), (20) показывают, что предельные значения производной $\partial_z\tilde{\varphi}^{(1)}\big|_{0,d}$ в действительности принадлежат следующему порядку $O(\varepsilon^2)$ редуктивной теории возмущений. В первом порядке по ε магнитостатический потенциал внутри пластинки определяется более простой задачей

$$\partial_z^2\varphi^{(1)} = 0 \qquad (0 \leqslant z \leqslant d),$$

$$-\partial_z\varphi^{(1)} + 8\pi M_0\cos\theta^0\theta_1^{(1)}(\xi, \tau)\Big|_{0,d} = 0. \tag{21}$$

Ее решение имеет вид

$$\varphi^{(1)} = 8\pi M_0\cos\theta^0\theta_1^{(1)}(\xi, \tau)(z - d/2).$$

Анализ уравнений следующих порядков $O(\varepsilon^2)$, $O(\varepsilon^3)$ проводится аналогично. Вычисление магнитостатических потенциалов $\varphi^{(2)}$ (порядок $O(\varepsilon^2)$) внутри пластины сводится к решению краевой задачи

$$\partial_z^2\varphi^{(2)} = 0 \qquad (0 \leqslant z \leqslant d),$$

$$-\partial_z\tilde{\varphi}^{(1)}\Big|_{0,d} = \Big[-\partial_z\varphi^{(2)} + 4\pi M_0\Big(\cos\theta^0\left(\theta_1^{(2)} + \theta_2^{(2)}\right) - \sin\theta^0\theta_1^{(1)2}\Big)\Big]\Big|_{0,d}. \tag{22}$$

Ввиду (20) и независимости функций $\theta^{(1)}$ и $\theta_2^{(2)} + \theta_1^{(2)}$ от координаты z решение задачи (22) тривиально. В результате второй и третий порядки теории возмущений по параметру ε дают замкнутое эффективное интегродифференциальное уравнение для определения функции $\theta_1^{(1)}(\xi,\tau)$

$$\Big(1/M_0 g\Big)\partial_\tau\theta_1^{(1)} - \pi d\cos\theta^0\gamma\hat{H}\left(\partial^2_{\xi'}\theta_1^{(1)}\right) + 3s\Big(\operatorname{tg}\theta^0/(2M_0 g)\Big)\partial_\xi\left(\theta_1^{(1)}\right)^2 = 0, \tag{23}$$

которое совпадает с уравнением Бенджамина–Оно [9]. Модель Бенджамина–Оно допускает многосолитонные возбуждения [8,13] и может быть детально исследована с помощью метода обратной задачи рассеяния [14,15].

Особенность магнитостатического солитона состоит в том, что он менее локализован по сравнению с типичными магнитными солитонами обменного и обменно-релятивистского происхождения. Односолитонное решение уравнения (23) описывается алгебраической, а не экспоненциальной уединенной волной

$$\theta_1^{(1)} = -\frac{2\pi dc\operatorname{tg}\theta^0}{3(\delta+2\pi-\beta_2)}\frac{\Delta}{[(\xi+v\tau)^2+\Delta^2]},\quad \Delta = gM_0\pi d\cos\theta^0\gamma/v > 0. \tag{24}$$

Здесь v — положительный вещественный параметр. В исходных переменных (x,t) солитону (24) соответствует локализованное возмущение, распространяющееся со скоростью $v+s$. Заметим, что «размер» солитона Δ должен быть больше толщины пластины (см. (10)). Это требование ограничивает область значений параметра v: $(v/s)\sim d(\Delta\delta)^{-1}\ll$ $\ll 1$. Многосолитонные решения уравнения (23) описывают упругие столкновения таких «алгебраических» солитонов.

В приведенном анализе важную роль играет разделение переменных ξ и z в уравнениях редуктивной теории возмущений. Подчеркнем, что такое разделение переменных, по-видимому, можно провести в задачах с более сложными граничными условиями, а также при учете зависимости феноменологических параметров α, α'', β_1, β_2, δ от координаты z, что соответствует неоднородным вдоль нормали к развитой поверхности пластины магнитным материалам. Как уже отмечалось ранее, тонкую пластину при отсутствии закрепления спинов на ее поверхности можно трактовать как двумерную систему. При этом намагниченности подрешеток не зависят от координаты z и определяются уравнениями Ландау–Лифшица (6), где размагничивающие поля выражены в терминах вектора ферромагнетизма в соответствии с формулами (8). Такой подход сокращает число независимых полевых переменных и снимает вопрос о краевых условиях на поверхности пластины. Убедимся с помощью редуктивной теории возмущений, что уравнения Ландау–Лифшица с усредненными по толщине пластинки магнитостатическими полями для квазиодномерных малоамплитудных волн приводят к результатам, эквивалентным приведенным выше, исходя из полной системы уравнений (2), (3), (6) и граничных условий (7).

Решение упрощенных уравнений Ландау–Лифшица (6) будем искать в форме

$$\varphi_i = \varphi_i^{(0)}(\xi,\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\varphi_i^{(n)}(\xi,\tau),$$

$$\theta_i = \theta^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \theta_i^{(n)}(\xi, \tau), \qquad \xi = \varepsilon(x + st), \qquad \tau = \varepsilon^2 t. \tag{25}$$

Подставив (25) в уравнение Ландау–Лифшица с усредненными по толщине пластины магнитостатическими полями и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получим систему зацепляющихся уравнений для величин θ_i и φ_i. Особенностью данной задачи является то, что уравнения редуктивной теории возмущений содержат интегралы, которые происходят от магнитостатических полей (см., напрмер, (8)). Так, для $\langle h_z^{(m)} \rangle$ имеем

$$\langle h_z^{(m)} \rangle + 8\pi \sin\theta^0 = -8\pi \int dk_x \tilde{m}_z(k_x) \exp\{ik_x x\} \Big[1 - |k_x|(d/2) + \ldots\Big] =$$

$$= -8\pi \tilde{m}_z(x) - 4\pi d \hat{H}\Big(\partial_{x'} \tilde{m}_z(x')\Big) + \ldots. \tag{26}$$

При получении (26) мы учли, что [16]

$$\hat{H}\Big(\exp\{ikx\}\Big) = i \,\mathrm{sign}\, k \exp\{ikx\}.$$

Наличие интегралов не вызывает серьезных расчетных затруднений. Например, разложение правой части (26) в ряд по степеням ε нетрудно записать, так как ядро оператора Гильберта является однородной функцией. В конечном итоге уравнения теории возмущений второго и третьего порядков по ε приводят к замкнутому эффективному уравнению для определения функции $\theta_1^{(1)}(\xi, \tau)$, которое совпадает с полученным ранее (23). Анализ приведенных вариантов теории возмущений позволяет сделать важный вывод: усредненное описание тонкой магнитной пластины, по-видимому, является адекватным, когда отсутствует закрепление спинов на ее поверхности.

4. Эффективные уравнения эволюции (слабые внешние магнитные поля)

С уменьшением величины внешнего магнитного поля уменьшается интенсивность нелинейных взаимодействий. В частности, при $H = 0$ взаимодействие голдстоуновских мод определяют кубичные (по отклонениям от основного состояния) члены в уравнениях динамики, а не квадратичные слагаемые, как в случае умеренных магнитных полей (см. (23)). Формирование уединенных волн происходит в результате баланса эффектов дисперсии и нелинейности [17]. Поскольку при малых $\mathbf{H}$ нелинейность является более слабой, мы должны рассмотреть интервал полей и пространственно-временных масштабов, удовлетворяющих соотношениям

$$d/\delta\Delta \sim (H/M_0\delta)^2 \sim \theta_i^2 \sim O(\varepsilon^2) \ll 1, \qquad \Delta \gg d. \tag{27}$$

Заметим, что в этой области при условии $\alpha/\pi d\Delta \sim \delta(a/\Delta) \ll 1$ ($\alpha \sim \delta a^2$, a — постоянная решетки), которое нарушается разве лишь для очень тонких пленок, в законе дисперсии (9) в фигурной скобке, так же как и выше, следует считать $k_x d \ll 1$. Тогда можно пренебречь последним слагаемым (обменного происхождения) по сравнению с магнитостатическим вкладом. В результате закон дисперсии определяется формулой (12), где следует положить $\cos\theta^0 = 1$. Рассматривая пленку как двумерную систему с магнитостатическими полями, определяемыми (8), будем искать решение уравнений Ландау–Лифшица (6) в виде

$$\varphi_i = \varphi_i^{(0)}(\xi,\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varphi_i^{(n)}(\xi,\tau),$$

$$\theta_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \theta_i^{(n)}(\xi,\tau), \qquad \xi = \varepsilon(x + s_1 t), \qquad \tau = \varepsilon^3 t,$$

$$s_1 = 2M_0 g\Big[\alpha''(\delta + 2\pi - \beta_2)\Big]^{1/2}\Big[1 - (1/2)\sin^2\theta^0\Big]. \tag{28}$$

При построении теории возмущений формально считаем $H \simeq O(\varepsilon)$, $d \simeq O(\varepsilon)$. Вычисления, аналогичные приведенным выше, дают

$$\varphi_1^{(0)}(\xi,\tau) = \varphi_2^{(0)}(\xi,\tau) + \pi,$$

$$\theta_1^{(1)}(\xi,\tau) = \theta_2^{(1)}(\xi,\tau) = \gamma\partial_\xi\varphi_1^{(0)}(\xi,\tau),$$

$$(1/M_0 g)\partial_\tau\theta_1^{(1)} - \pi d\gamma\hat{H}\partial_{\xi'}^2\theta_1^{(1)} + (3s/M_0 g)(\cos\theta^0)^{-1}\times$$

$$\times\,\theta_1^{(1)}\partial_\xi\theta_1^{(1)}\Big[\theta_1^{(1)} - \sin\theta^0\Big] = 0. \tag{29}$$

При увеличении внешнего магнитного поля, когда $h/2\delta > \theta_1^{(1)}$ (см. (4)), эффективное уравнение (29) переходит в полученное ранее (23). Можно показать также, что в слабых магнитных полях ($h/2\delta < \theta_1^{(1)}$) уравнение (29) не имеет решений типа «алгебраических» солитонов (24).

5. Обсуждение результатов

Не представляет принципиальных затруднений рассмотреть взаимодействие голдстоуновских мод в неограниченном антиферромагнитном образце. В этом случае динамику малоамплитудных волн описывают локальные уравнения типа Кортевега–де Фриза, которые имеют различный вид в зависимости от направления распространения волн и величины внешнего магнитного поля. В неограниченном образце реализуются обычные «экспоненциальные» солитоны, а не «алгебраические», как в случае тонкой пластины. Причина этого заключается в том, что в неограниченных образцах вклад магнитостатики менее важен и распространение волн определяется в основном короткодействующими обменными взаимодействиями. В пластине значительными являются дальнодействующие диполь-дипольные силы, причем, на наш взгляд, формирование солитонов в главном приближении определяется поверхностными магнитными зарядами. Другие типы магнитостатических зарядов, например объемные, лишь уточняют внутреннюю структуру уединенных волн. По-видимому, это обстоятельство и позволяет трактовать тонкую пластину как эффективную двумерную систему.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-2011).

Список литературы

[1] Калиникос Б.А., Ковшиков Н.Г., Славин А.Н. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 2. С. 159–176.
[2] Звездин А.К., Попков А.Ф. // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. № 2. С. 606–615.
[3] Lui M., Ramos C.A., King A.R., Jaccarino V. // J. Appl. Phys. 1990. V. 67. N 1. P. 5518–5520.
[4] Lui M., Drucker A.R., King A.R., Kotthaus J.P., Hansma P.K., Jaccarino V. // Phys. Rev. B. 1986. V. 33. N 11. P. 7720–7723.
[5] Boardman A.D., Nikitov S.A., Waby N.A. // Phys. Rev. B. 1993. V. 48. N 18. P. 13602–13606.
[6] Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука, 1973. 591 с.
[7] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
[8] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
[9] Ono H. // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 39. N 4. P. 1082–1091.
[10] Ковалев А.С., Косевич А.М., Манжос И.В., Маслов К.В. // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 44. № 4. С. 174–177.
[11] Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
[12] Барьяхтар В.Г., Горобец Ю.И. Цилиндрические магнитные домены и их решетки. Киев: Наукова думка, 1988. 168 с.
[13] Matsuno Y. // J. Phys. A: Math. Gen. 1979. V. 12. N 4. P. 619–621.
[14] Ablowitz M., Fokas A.S., Anderson R.L. // Phys. Lett. A. 1983. V. 93. N 8. P. 375–378.
[15] Fokas A.S., Ablowitz M. // Stud. in Appl. Math. 1983. V. 68. P. 1–10.
[16] Bracewell R.M. The Fourier transform and its application. McGraw-Hill, New York, 1965. 323 p.
[17] Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.

Институт физики металлов
УрО РАН
Екатеринбург

Поступило в Редакцию
30 марта 1994 г.