АМПЛИТУДЫ ВЕЛИЧИН ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОТОКА В ЖИДКИХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

Е.Д.Эйдельман

Найдены формы и амплитуды возникающих при возбуждении концентрационной конвекции и электрических структур отклонений от равновесных значений гидродинамической скорости и напряженности электрического поля. Задача решается при слабом отклонении концентрационного потока от критически необходимого для возбуждения.

В предыдущей работе [1] изучались условия возбуждения структур в жидких диэлектриках, в которых во внешнем электрическом поле $\mathbf{E}_0$, например, потоком диффузии другого диэлектрика создана переменная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = \varepsilon_d(1 + ac), \tag{1}$$

Здесь ε_d — постоянная диэлектрическая проницаемость растворителя, c — зависящая от координат x, y, z концентрация растворимого, a — коэффициент порядка единицы.

Было показано, что в таких средах возможны условия, когда важен учет действия электрострикционных сил.

Для этого достаточно было решить задачу в линейном по отклонениям термодинамических (давления p_1, концентрации c_1), гидродинамических (скорости $\mathbf{v}$) и электрических (напряженности E_1, диэлектрической проницаемости ε_1) величин. Система уравнений, на основе которой строится теория амплитуд этих величин, представляет собой ту же систему, но с учетом нелинейных слагаемых $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, $(\mathbf{E}_0\mathbf{E}_1)\nabla\varepsilon_1$ в уравнении движения, $\varepsilon_1\mathbf{E}_1$ в уравнении Пуассона и $\mathbf{v}\nabla c_1$ в уравнении диффузии. Слагаемое же $E_1^2\nabla\varepsilon_0$ должно быть отброшено по сравнению с $(\mathbf{E}_0\mathbf{E}_1)\nabla\varepsilon_1$, так как характерная длина изменения равновесных величин L гораздо больше характерной длины изменения возмущений h.

Уравнения же неразрывности и потенциальности поля не изменяются.

Как и в задаче о нахождении условий возбуждения, рассматривается модель бесконечного по направлениям x и y слоя, имеющего толщину h. Удобно считать границы ($z = 0$ и $z = h$) «свободными». Можно показать, что постановка граничных условий другого типа на качественные результаты не влияет. Как и при возбуждении обычных [2] без учета электрострикции структур, возбуждение происходит апериодически (стационарно), а зависимость от координат вертикальной компоненты скорости в линейном приближении имеет вид

$$v_z = V \sin(k_z z) \cos(k_x x + k_y y), \tag{2}$$

где $\mathbf{k}$ (k_x; k_y; k_z) определяет размеры возникающей ячейки в продольном ($\mathbf{k}_\perp$ (k_x; k_y)) и поперечном (k_z) направлениях.

Определяются в линейном приближении и зависимости от координат величин v_x, v_y

$$v_{x;\,y} = -k_{x;\,y} V \frac{k_z}{k_\perp^2} \cos(k_z z) \sin(k_x x + k_y y). \tag{3}$$

При учете же электрострикционных сил появляется и флуктуационное электрическое поле, компоненты которого должны удовлетворять граничным условиям. Эти условия, как известно [3], заключаются в том, что нормальная компонента на поверхности жидкости отсутствует $E_{1z} = 0$ (нет поверхностного заряда), а касательные компонеты максимальны $\partial E_{1x,y}/\partial z = 0$.

Тогда при возбуждении возникают структуры величин

$$E_{1z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mp \frac{A E_0}{D h} V \frac{k_z^2}{k^4} \sin(k_z z) \cos(k_x x + k_y y), \tag{4}$$

$$E_{1x;\,y} = \mp \frac{A E_0}{D h} V k_{x;\,y} \frac{k_z}{k^4} \cos(k_z z) \sin(k_x x + k_y y), \tag{5}$$

$$c_1 = \frac{A}{D} \frac{V}{k^2} \sin(k_z z) \cos(k_x x + k_y y), \tag{6}$$

где D — коэффициент диффузии жидкости; $A = |\nabla c_0| = |c(0) - c(h)|/h$ — отношение разности концентрации растворимого диэлектрика на дне и на поверхности слоя к толщине этого слоя (градиент концентрации). Верхний знак соответствует одинаковой направленности $\mathbf{E}_0$ и ∇c_0, а нижний — противоположной.

Видно, что координатные зависимости структур электрического поля совпадают с координатными зависимостями ячеек скорости (ячеек концентрационной конвекции), т.е. электрическое поле «вморожено».

Амплитуду V в линейном по отклонениям приближении найти невозможно. Рассмотрим поэтому нелинейную задачу с теми же граничными условиями. Все величины тогда получат дополнительные слагаемые, пропорциональные второй, третьей и т.д. степеням V. Далее, проделывая те же вычисления, что и в [1], получим, что v_z поправки второго порядка не имеет, а концентрация имеет.

Условие возбуждения во втором порядке малости

$$V^2 = 4k^2 \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}^*}{\mathcal{E}^*} \tag{7}$$

позволяет найти амплитуды величин, характеризующих состояние жидкости сразу после возбуждения. Введено в [1] число, характеризующее действие электрострикционного механизма возбуждения $\mathcal{E}$.

Напомним, что

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon E_0^2 A^2 h^4}{\rho \nu D}, \tag{8}$$

ρ — плотность, ν — коэффициент вязкости жидкости. Условие (7) записано в безразмерном виде с единицами длины h и скорости V/h. В момент возбуждения $\mathcal{E} = \mathcal{E}^*$.

При граничных условиях другого типа полученный результат качественно не изменяется, он соответствует общему утверждению о пропорциональности амплитуд возникающих отклонений V корню квадратному из надкритичности $V \sim (\mathcal{E} - \mathcal{E}^*)^{1/2}$. На форму ячейки возникающие движение и поле влияют лишь в следующих порядках малости, т.е. возникает ячейка с отношением продольных размеров к поперечному $\simeq 3.5$ при $\mathcal{E} > \mathcal{E}^* \simeq 924$ [1].

Итак, при малых превышениях $A = |\nabla c_0|$ над его критическим значением A^* возникают движения с амплитудой (в размерном виде)

$$V = \frac{\nu}{h}\left(8(A - A^*)/A^*\right)^{1/2} = \frac{2\nu}{h}\sqrt{2\frac{c(0) - c^*(0)}{c^*(0) - c(h)}}, \tag{9}$$

если на поверхности можно считать концентрацию растворимого неизменной.

Очевидно, полученные результаты верны и для поля. Сохраняется «вмороженность» поля (с точностью до членов порядка V^3). Возбуждение происходит в «мягком» режиме с амплитудой

$$V \simeq 0.1\frac{\nu}{h}\left[\frac{\varepsilon E_0^2 (c(0) - c(h))^2 h^4}{\rho \nu D} - 924\right]^{1/2}. \tag{10}$$

Принимая обычные в диэлектрике (трансформаторном масле различных сортов [4]) значения: $\rho \simeq 10^3 \div 10^4\,\mathrm{kg/m^3}$, $D \simeq \nu \simeq$ $\simeq 10^{-6} \div 10^{-9}\,\mathrm{m^2/s}$, $\varepsilon \simeq 10^{-9} \div 10^{-10}\,\mathrm{F/m}$, получим при $c \simeq 0.1(10\%)$ и $h \gtrsim 1\,\mathrm{mm}$ $(h/L < 0.1)$, что неустойчивость наступает при

$$E_0 \gtrsim \left(\frac{\rho \nu D}{\varepsilon A^2 h^4}\right)^{1/2} \simeq 10^3 \div 10^6\ \mathrm{V/m},$$

что вполне достижимо и должно учитываться в мощных электрических устройствах.

Автор выражает глубокую признательность И.В.Иоффе за поддержку в трудное время создания этой работы.

Список литературы

[1] Иоффе И.В., Эйдельман Е.Д. // Письма в ЖТФ. 1976. Т. 2. С. 90.
[2] Гуревич Л.Э., Иоффе И.В. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 1183.
[3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[4] Болога М.К., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А. Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинница, 1977.

Санкт-Петербургский
химико-фармацевтический институт

Поступило в Редакцию
12 мая 1994 г.