УДК 536.42/517.957
©1994

СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ МАРТЕНСИТНОГО ПЕРЕХОДА

В.В.Киселев

Уравнения двумерной модели типа Гинзбурга–Ландау для $4mm/2mm$ (квадрат/прямоугольник) мартенситного перехода редуцированы к эффективным уравнениям, описывающим взаимодействие малоамплитудных мод. Предсказаны многосолитонные возбуждения в окрестности фазового перехода. Установлены границы существования различных типов солитонов, проанализирована их устойчивость.

Термин мартенситные относится к бездиффузионным фазовым переходам первого рода типа смещения, которые могут быть описаны в терминах сдвиговых деформаций. Для широкого класса кристаллов с понижением температуры происходит переход от фазы с кубической решеткой к фазе с решеткой орторомбической или тетрагональной симметрии. Высокотемпературная фаза называется аустенитом, низкотемпературная — мартенситом. Мартенситные переходы, а также связанные с ними явления и процессы интересны для приложений и трудны для аналитического описания. Для $4mm/2mm$ (квадрат/прямоугольник) мартенситного ферроупругого фазового перехода в [1,2] предложена двумерная ($2D$) модель типа Гинзбурга–Ландау. Эта модель, по-видимому, является хорошим приближением для $Q_h - D_{4h}$ кубически-тетрагонального мартенситного перехода в реальных кристаллах. Примерами систем, где возможен подобный переход, являются Nb_3Sn, V_3Si, $In_{0.76}Tl_{0.24}$, $Fe_{0.72}Pd_{0.28}$ [2]. Общая черта этих разных по структуре соединений в том, что в них смещения атомов при мартенситном переходе происходят вдоль выделенных плоскостей по типу $4mm/2mm$. При феноменологическом описании фазовых переходов первого рода в $2D$ системах в выражении для энергии необходимо удержать инварианты, содержащие высшие степени параметра порядка (до шестой степени включительно). Это обусловливает значительную нелинейность задачи. Неоднородность структуры межфазных границ описывается включением высших градиентов поля смещений в упругую энергию.

Приведем основные соотношения $2D$ модели $4mm/2mm$ мартенситного перехода. Пусть r_i — положение материальной точки в упругодеформированной среде, x_i — ее положение в недеформированном состоянии. Тогда вектор смещения $u_i = r_i(x,t) - x_i$. Если упругая энергия среды определяется лишь чистыми деформациями, а не вращениями элементов объема, то она зависит от инвариантнов точечной группы симметрии кристалла, составленных из компонент лагранжева тензора деформаций

$$\eta_{i,j} = \frac{1}{2}\Big[u_{i,j} + u_{j,i} + u_{r,i}u_{r,j}\Big], \quad u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j. \tag{1}$$

Согласно [2], свободная энергия для $4mm/2mm$ фазового перехода имеет вид

$$W = \frac{1}{2}A_1e_1^2 + \frac{1}{2}A_2e_2^2 + \frac{1}{2}A_3e_3^2 + \frac{1}{4}B_2e_2^4 + \frac{1}{6}C_2e_2^6 + \frac{1}{2}d_1(e_{1,1}^2 + e_{1,2}^2) +$$
$$+\frac{1}{2}d_2(e_{2,1}^2 + e_{2,2}^2) + \frac{1}{2}d_3(e_{3,1}^2 + e_{3,2}^2) + d_4(e_{1,1}e_{2,1} - e_{1,2}e_{2,2}) +$$
$$+d_5(e_{1,1}e_{3,2} + e_{1,2}e_{3,1}) + d_6(e_{2,1}e_{3,2} - e_{2,2}e_{3,1}). \tag{2}$$

Здесь A_i, B_2, C_2, d_j ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \ldots 6$) — феноменологические постоянные; поля $e_1 = (1/\sqrt{2}(\eta_{11} + \eta_{22})$ и $e_3 = \eta_{12}$ описывают дилатацию и деформацию сдвига среды соответственно; поле $e_2 = (1/\sqrt{2}(\eta_{11} - \eta_{22})$ описывает растяжение квадрата в прямоугольник и является параметром порядка в теории Ландау для $4mm/2mm$ фазового перехода. В контексте теории Ландау предполагаем, что в окрестности перехода A_2 зависит от температуры, причем эта зависимость такова, что в точке перехода $A_2 = 0$. Зависимостью от температуры других упругих констант, как обычно, пренебрегаем. Для реализации фазового перехода первого рода необходимо выполнение условий $B_2 < 0$, $C_2 > 0$. Уравнения динамики могут быть получены варьированием по полям u_i лагранжиана

$$L = \int dx_1\, dx_2 \left[\frac{\rho}{2}\partial_t u_i \partial_t u_i - W\right], \tag{3}$$

где ρ — плотность среды в недеформированном состоянии. Далее считаем $\rho = \text{const}$.

Впервые в рамках $2D$ модели мартенситного перехода квазиодномерные образования типа плоских доменных границ описаны в [1]. Однако, как отмечено в [2], используемое в работе [1] выражение для энергии отличалось от (2), не содержало всех совместимых с симметрией кристалла членов и потому недостаточно для определения феноменологических констант из экспериментальных фононных дисперсионных кривых. Плоские доменные границы по существу одномерны, идентичны полученным в одномерных ($1D$) моделях мартенситного перехода [2,3]. В [2,3] исследованы доменные стенки, плоскопараллельные доменные структуры, причем в [2] с учетом полного выражения для энергии (2). Однако в этих работах решения $1D$ молей получены в пренебрежении нелинейными членами в тензоре деформаций (см. (1)), которые обеспечивают его вращательную инвариантность (использовалась аппроксимация геометрической линейности).

В данной работе мы покажем, что пренебрежение геометрической нелинейностью существенно изменяет характер взаимодействия даже малоамплитудных мод. Мы рассмотрим область вблизи фазового перехода, где реализуется либо квадратная $4mm$ решетка (аустенит), либо прямоугольная низкотемпературная $2mm$ фаза (мартенсит). Получим фононные дисперсионные кривые для произвольных направлений движения волн на фоне основной ($4mm$ или $2mm$) фазы. Покажем, что если ограничиться описанием малоамплитудных статических или динамических образований на фоне основной, то можно корректно преодолеть трудности, связанные с нелинейностью задачи, и получить эффективные уравнения. Замечательно, что укороченные $2D$ уравнения допускают многосолитонные решения и при определенных условиях могут быть сведены к интегрируемой методом обратной задачи рассеяния модели Кадомцева–Петвиашвили (КП). Некоторые из солитонов, по-видимому, можно интерпретировать как предвестники $4mm/2mm$ фазового перехода или (при температуре выше точки перехода) как остаточные следы $2mm$ фазы на фоне $4mm$ фазы. Для развития различных солитонных сценариев важен ответ на вопрос о стабильности солитонов. Мы укажем области значений физических параметров, в каждой из которых реализуется и может быть устойчив определенный тип солитонов.

1. Основное состояние кристалла. Спектр линейных мод

В отсутствие внешнего нагружения равновесное состояние кристалла характеризуется однородными статическими деформациями $u_{i,j}^{(0)} = \mathrm{const}$. Условия минимума энергии $\partial W/\partial u_{i,j}^{(0)} = 0$ дают $4mm$ фазу с квадратной решеткой $u_{i,j}^{(0)} = 0$ и два варианта $2\mathrm{mm}$ фазы с прямоугольной решеткой

$$u_{1,2}^{(0)} = u_{2,1}^{(0)} = 0, \qquad u_{1,1}^{(0)} = \sqrt{2}\cos\chi - 1,$$

$$u_{2,2}^{(0)} = \sqrt{2}\sin\chi - 1, \qquad e_1^{(0)} = e_3^{(0)} = 0,$$

$$e_2^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\chi = \pm\left[\frac{1}{2C_2}[|B_2| + (B_2^2 - 4A_2C_2)^{1/2}]\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Анализ, проведенный в [2,3], показывает, что фаза с квадратной решеткой метастабильна для $0 < \tau \equiv 16C_2A_2/3B_2^2 < 1$ и термодинамически устойчива для $1 < \tau < 4/3$. Фаза с прямоугольной решеткой метастабильна для $1 < \tau < 4/3$ и термодинамически устойчива для $\tau < 1$. Приведенный выбор основного состояния более корректен, чем в [2,3], так как в отличие от этих работ мы не отбрасываем геометрическую нелинейность в тензоре η_{ij}. В пренебрежении геометрической нелинейностью теория не инвариантна относительно вращений элементов объема и не учитывает существенных взаимодействий.

Рассмотрим распространение упругих волн вдоль выделенного направления в плоскости (x_1, x_2), изменения которых в направлении, ортогональном выделенному, являются более слабыми. Для описания таких волн удобно от x_1, x_2 перейти к новым переменным

$$\xi = x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi, \qquad \eta = -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi. \tag{5}$$

Пусть ξ — координата вдоль направления распространения волны, тогда зависимость полевых переменных от η является более слабой. Наличие 4mm или 2mm фазы в основном состоянии кристалла предопределяет вид спектра линейных мод. Полагая

$$u_j = c_j \exp[ik_1\xi + ik_2\eta - i\omega t] \quad (k_2 \ll k_1;\ j = 1,\, 2),$$

нетрудно убедиться, что в обоих случаях фононный спектр имеет две голдстоуновские ветви

$$\rho\omega_i^2(k_1, k_2) = \alpha_i^{(20)} k_1^2 - \alpha_i^{(11)} k_1 k_2 + \alpha_i^{(02)} k_2^2 + \alpha_i^{(40)} k_1^4, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Здесь

$$\alpha_i^{(20)} = \frac{1}{2}\{\gamma_1^2 a + \gamma_2^2 b - \varepsilon_i \delta\},$$

$$\alpha_i^{(02)} = \frac{1}{2}\left\{\gamma_1^2 b^2 + \gamma_2^2 a^2 + \varepsilon_i\left(\frac{1}{2}d^2\delta^{-3} - e\delta^{-1}\right)\right\},$$

$$\alpha_i^{(11)} = \frac{1}{2}\{c(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) + \varepsilon_i d\delta^{-1}\},$$

$$\alpha_i^{(40)} = \frac{1}{2}\{\gamma_1^2 f + \gamma_2^2 g - \varepsilon_i h\delta^{-1}\},$$

$$a(\varphi) = \frac{1}{2}(A_1 + \alpha_2)\cos^2\varphi + \frac{A_3}{4}\sin^2\varphi,$$

$$c(\varphi) = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\left[A_1 + \alpha_2 - \frac{A_3}{2}\right],$$

$$d(\varphi) = (\gamma_1\gamma_2\mu)^2 \sin 4\varphi - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)c(\gamma_1^2 a - \gamma_2^2 b),$$

$$b(\varphi) = a(\varphi + \frac{\pi}{2}),$$

$$e(\varphi) = \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^2 c^2 + (\gamma_1^2 a - \gamma_2^2 b)(\gamma_1^2 b - \gamma_2^2 a) + 2(\gamma_1\gamma_2\mu)^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi - \sin^2 2\varphi),$$

$$\delta^2 = (\gamma_2^2 b - \gamma_1^2 a)^2 + (\gamma_1\gamma_2\mu\sin 2\varphi)^2,$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi(\sqrt{2}d_5 - 2d_4) + \frac{1}{2}(d_1 + d_2 + 2d_4)\cos^2\varphi + \frac{1}{4}d_3\sin^2\varphi,$$

$$h(\varphi) = (\gamma_1^2 a - \gamma_2^2 b)(\gamma_1^2 f - \gamma_2^2 g) + (\gamma_1\gamma_2\sin 2\varphi)^2\left(\frac{1}{2}d_1 - \frac{1}{2}d_2 + \frac{1}{4}d_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}d_5\right)\mu,$$

$$g(\varphi) = f(\varphi + \frac{\pi}{2}),$$

$$\mu = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}A_2 - \frac{1}{2}\alpha_2,$$

$$\varepsilon_i = \pm 1, \qquad i = 1,\, 2. \tag{7}$$

Для спектра линейных мод на фоне 2mm фазы параметры γ_1, γ_2, α_2 определяются спонтанными деформациями

$$\gamma_1 = 1 + u_{1,1}^{(0)},\ \gamma_2 = 1 + u_{2,2}^{(0)},\ \frac{1}{2}\alpha_2 = (e_2^{(0)})^2\left[2C_2(e_2^{(0)})^2 + B_2\right].$$

Спектр собственных частот на фоне квадратной решетки по форме совпадает с (6), (7), но не зависит от спонтанных деформаций

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1, \qquad \alpha_2 = A_2.$$

Отметим, что для направлений $\varphi = 0,\ \pm\pi/4 (\mathrm{mod}\, \pi)$ закон дисперсии линейных мод на фоне 4mm фазы диагонализуется ($\alpha_i^{(11)}(\varphi) = 0$) согласуется с приведенным в [2]. Когда основное состояние кристалла представлено 2mm фазой, направления для которых $\alpha_i^{(11)}(\varphi)=0$ определяются величиной спонтанных деформаций, а значит, зависят от температуры.

2. Эффективные уравнения

Получим укороченные уравнения, описывающие малоамплитудные нелинейные волны на фоне основного состояния ($4mm$ или $2mm$ фазы). С этой целью выпишем динамические уравнения для отклонений $\bar{u}_i$ поля смещений от равновесного состояния с точностью до квадратичных членов по амплитудам отклонений

$$\rho\partial_t \mathbf{V} + D(\nabla) : \mathbf{V} + E(\varphi)\partial_\xi : \partial_\xi \mathbf{V} \circ \partial_\xi \mathbf{V} = 0. \tag{8}$$

Здесь

$$\mathbf{V} = (V_1, V_2), \qquad V_i = \gamma_i \bar{u}_i\ (i = 1, 2).$$

Дифференциальный оператор $D(\nabla)$ и коэффициенты $E(\varphi)$ имеют громоздкий вид, но могут быть легко вычислены с помощью (2), (3). Поскольку зависимость полевых переменных от координаты η является слабой в (8), мы удержали производные по η лишь в линейных членах уравнений, причем даже в линейных членах мы пренебрегли производными четвертого порядка по переменной η. Для получения эффективных уравнений динамики малоамплитудных волн, распространяющихся вдоль направлений, выделенных условием $\alpha_i^{(11)}(\varphi) = 0$, можно использовать редуктивную теорию возмущений, основанную на растяжении координат [4]. В этом случае взаимодействие голдстоуновских мод, отвечающих ветви спектра с индексом i, удобно описывать в системе отсчета, движущейся со скоростью

$$s_i = \partial_{\mathbf{k}}\omega_i|_{\mathbf{k}=0}.$$

Решение уравнений (8) ищем в виде

$$V_i = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_i^{(0)}(x, y, \tau). \tag{9}$$

Здесь ε — малый параметр, характеризующий отклонение системы от основного состояния; $x = \varepsilon(\xi + s_i t)$, $y = \varepsilon^2\eta$, $\tau = \varepsilon^3 y$ — медленные переменные. Масштабные преобразования согласованы с законом дисперсии (6) и выбраны так, чтобы сбалансировать эффекты дисперсии и нелинейности. После подстановки (9) в (8), приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях ε, получим систему зацепляющихся уравнений. Для указанных выше направлений распространения волн условия разрешимости уравнений низших порядков по параметру ε выполняются автоматически. Требование разрешимости системы, возникающей в порядке ε^5 теории возмущений, дает замкнутое эффективное уравнение, которое совпадает с уравнением КП (17). Модель КП описывает распространение волн в одном направлении со скоростью, близкой к скорости звука s_i. Чтобы избежать этих ограничений, используем другой подход. Перейдем от полей V_1 и V_2 к нормальным модам R и Q

$$S(\nabla)\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = S^{-1}(\nabla)\begin{pmatrix} R \\ Q \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Оператор $S(\nabla)$ выбирается так, чтобы диагонализовать линеаризованные около основного состояния $V = 0$ уравнения (8)

$$\rho\partial_t^2 R + \rho\omega_1^2(i\partial_\xi, i\partial_\eta)R + \ldots = 0, \ \rho\partial_t^2 Q + \rho\omega_2^2(i\partial_\xi, i\partial_\eta)Q + \ldots = 0. \tag{11}$$

Явный вид дифференциальных операторов $\rho\omega_j^2(i\partial_\xi, \partial_\eta)$ $(j = 1, 2)$ в (11) определяется законами дисперсии (6). Подействуем оператором $S(\nabla)$ на уравнения (8). Линейные члены уравнений примут вид (11). В длинноволном приближении для преобразования нелинейных членов в (8) достаточно ограничиться выражениями для $S(\nabla)$ и $S^{-1}(\nabla)$, не содержащими производных (такое приближение согласуется с редуктивной теорией возмущений (9))

$$S(\nabla) = 1\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{M} \\ N & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}(\nabla) = \frac{S(\nabla)}{1 + MN}, \quad N(\varepsilon_1) = (\gamma_2\gamma_1^{-1})^2 M(\varepsilon_1),$$

$$M(\varepsilon_1) = [\gamma_2^2\mu\sin 2\varphi]^{-1}\{b\gamma_2^2 - a\gamma_1^2 - \varepsilon_1\delta\}. \tag{12}$$

Для направлений, удовлетворяющих условию $\sin 2\varphi = 0$, удобно выбрать $\varphi_1 = \mathrm{sign}(b\gamma_2^2 - a\gamma_1^2)$. Тогда выражение для M допускает предельный переход $M \to 0$ при $\sin 2\varphi \to 0$. При возбуждении одной из ветвей спектра, когда $R \ll Q$ или $Q \ll R$, можно пренебречь взаимодействием с модами другой ветви. Тогда эволюция мод основной ветви спектра в длинноволновом приближении описывается замкнутым уравнением

$$\rho\partial_t^2 R + \rho\omega_1^2(i\partial_\xi, i\partial_\eta)R - g_1\partial_\xi^2 R^2 = 0 \qquad (R \gg Q), \tag{13}$$

$$\rho\partial_t^2 Q + \rho\omega_2^2(i\partial_\xi, i\partial_\eta)Q - g_2\partial_\xi^2 Q^2 = 0 \qquad (Q \gg R), \tag{14}$$

$$g_1 = \frac{3}{4}(1 + MN)^{-1}\Big[A_1(\cos\varphi + N\sin\varphi) + \frac{1}{2}A_3(\sin\varphi + N\cos\varphi)\sin 2\varphi +$$

$$+\alpha_2\cos 2\varphi(\cos\varphi - N\sin\varphi) + \alpha_0\gamma_1^2(1 + NM)^{-1}(\cos\varphi - N\sin\varphi)^3\Big], \tag{15}$$

$$g_2 = \frac{3}{4}(1+MN)^{-1}[A_1(M\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{1}{2}A_3(M\sin\varphi - \cos\varphi)\sin 2\varphi +$$

$$+\alpha_2\cos 2\varphi(M\cos\varphi + \sin\varphi) + \alpha_0\gamma_2^2(1+NM)^{-1}(M\cos\varphi + \sin\varphi)^3],$$

$$\alpha_0 = \sqrt{2}e_2^{(0)}\left[B_2 + \frac{10}{3}C_2(e_2^{(0)})^2\right]. \qquad (16)$$

Здесь постоянные взаимодействия g_i ($i = 1, 2$) приведены для волн, распространяющихся на фоне 2mm фазы. Постоянные g_1 и g_2 для волн, движущихся на фоне 4mm фазы, получаются, если в формулах (12), (15), (16) формально положить $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $M = N$, $\alpha_0 = 0$.

Заметим, что, когда $\sin 2\varphi \neq 0$, уравнения (13), (14) с учетом знака $\varepsilon_1 = \pm 1$ эквиваленты, так как $N(-\varepsilon) = -(\gamma_2\gamma_1^{-1})^2 N^{-1}(\varepsilon)$. Далее для определенности будем рассматривать уравнение (13), опуская нижний индекс у параметров g_1, $\alpha_1^{(ik)}$ и т.д. Уравнение (13) не накладывает ограничений на угол φ, фиксирующий направление движения волн в плоскости (x_1, x_2). Вследствие этого в (13) присутствует слагаемое с коэффициентом $\alpha^{(11)}(\varphi)$. Вдоль оси ξ волны могут двигаться с любой скоростью в обоих направлениях. Поэтому эффективное уравнение (13) является более общим, чем КП уравнение. Если ограничиться рассмотрением волн, движущихся в одну сторону вдоль направления, где $\alpha^{(11)}(\varphi) = 0$, то

$$R = R(x,t), \quad x = \xi + st, \quad (\rho\partial_t^2 - \alpha^{(20)}\partial_\xi^2)R \cong 2\rho s\partial_t\partial_x R$$

и уравнение (13) редуцируется к интегрируемой с помощью метода обратной задачи рассеяния модели КП [5]

$$\partial_x[2\rho s\partial_t R + \alpha^{(40)}\partial_x^3 R - g\partial_x R^2] = \alpha^{(02)}\partial_\eta^2 R. \qquad (17)$$

Для чисто одномерных движений, когда зависимостью от η можно пренебречь, (17) переходит в уравнение Кортевега де Вриза (КдВ). Существенно, что используемое в [2,3] в рамках $1D$ модели пренебрежение геометрической нелинейностью в выражении для тензора деформаций η_{ij} приводит к отсутствию кубичных по смещениям слагаемых в выражении для энергии. В результате уравнение для одномерных волн в пределе малой амплитуды сводится не к уравнению КдВ с квадратичной по смещениям нелинейностью, а к модифицированному уравнению КдВ [5] с более сильной кубичной нелинейностью, которая менее важна для малоамплитудных волн.

3. Солитоны в окрестности мартенситного перехода

Уравнение (13) допускает билинейное представление

$$[D_t^2 + \omega^2(iD_\xi, iD_\eta)]f\circ f = 0,$$

$$R = -6\alpha^{(40)}g^{-1}\partial_\xi^2 \ln f. \qquad (18)$$

Здесь

$$D_t f \circ g = (\partial_t - \partial_{t'}) f(t) g(t')|_{t=t'}$$

и т.д. Более того, нетрудно показать, что для уравнения (13) существует преобразование Бэклунда. Именно, если u_0 — некоторое решение уравнения (13), а функция φ удовлетворяет уравнению

$$[\rho D_t^2 + \rho\omega^2(iD_\xi, iD_\eta) - 2gu_0 D_\xi^2]\varphi\circ\varphi = 0,$$

тогда

$$u_1 = -6\alpha^{(40)} g^{-1} \partial_\xi^2 \ln\varphi + u_0$$

также будет решением уравнения (13). Билинейная форма (18) позволяет применить подход [6] для получения солитоноподобных решений уравнения (13). В частности, мы нашли N-солитонное экспоненциальное решение

$$f = \sum_{\mu=0,1} \exp\Big[\sum_{i>j} A_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\eta_i\Big],$$

$$\varkappa^2(p,q) = -\rho\omega^2(ip, iq),$$

$$\exp\eta_i = a_i \exp[\Omega_i t + p_i\xi + q_i\eta],$$

$$\Omega_i = \sigma_i[\rho^{-1}\varkappa^2(p_i,q_i)]^{1/2}, \qquad \sigma_i = \pm 1,$$

$$\exp A_{i,j} = -[\rho(\Omega_i-\Omega_j)^2 - \varkappa^2(p_i-p_j, q_i-q_j)][\rho(\Omega_i+\Omega_j)^2 - \varkappa^2(p_i+p_j, q_i+q_j)]^{-1}. \tag{19}$$

Здесь $\sum\limits_{\mu=0,1}$ означает суммирование по всем возможным комбинациям $\mu = 0, 1$; $\sum\limits_{i>j}$ означает суммирование по всем возможным парам из N элементов; a_j, p_j, q_j, Ω_j — вещественные параметры.

Интересно, что для солитонов (19), ассоциированных с ветвью спектра $\omega_1(\mathbf{k})$ линеаризованной задачи ($\varepsilon_1 \pm \operatorname{sign}\mu \sin 2\varphi$) и распространяющихся на фоне $4mm$ фазы в направлениях $\varphi = \pm\pi/4 (\operatorname{mod}\pi)$, имеем $N = M = \mp 1$, и, следовательно, в главном приближении

$$e_1 = e_3 = 0, \qquad e_2 \neq 0. \tag{20}$$

Поскольку e_2 является параметром порядка теории, такие солитоны, по-видимому, можно интерпретировать как двойниковые прослойки, параллельные плоскостям (110), или остаточные следы 2 mm фазы на фоне основной $4mm$ фазы. Квазипериодическим конечнозонным решениям модели КП (17) отвечают малоамплитудные двойниковые полосы. Для других направлений распространения соотношения (20) не выполняются и солитонам соответствуют более сложные возбуждения. Солитоны на фоне низкотемпературной $2mm$ фазы, по-видимому, можно рассматривать как предвестники $2mm/4mm$ фазового перехода. Интересно, что вблизи кубически-тетрагонального мартенситного перехода экспериментально наблюдаются двойниковые прослойки, параллельные плоскостям (110), и тетрагональные модуляции на фоне $4mm$ фазы [2].

Полиномиальное решение уравнения (18)

$$f = 1 + A(\xi + vt)^2 + B\eta^2 + 2C\eta(\xi + vt),$$
$$A = [4\alpha^{(02)}(\alpha^{(20)} - \rho v^2) - (\alpha^{(11)})^2][12\alpha^{(40)}\alpha^{(02)}]^{-1},$$
$$B = (\alpha^{(20)} - \rho v^2)[\alpha^{(02)}]^{-1}A,$$
$$C = \alpha^{(11)}A[2\alpha^{(02)}]^{-1} \tag{21}$$

имеет вид двумерного солитона

$$R = \frac{12\alpha^{(40)}[A^2(\xi + vt)^2 - (AB - 2C^2)\eta^2 + 2CA\eta(\xi + vt) - A]}{g[1 + A(\xi + vt)^2 + B\eta^2 + 2C\eta(\xi + vt)]^2}. \tag{22}$$

Требование ограниченности решения (22) сводится к условию положительной определенности квадратичной формы f в (21)

$$\alpha^{(40)}\alpha^{(02)} > 0,$$
$$4\alpha^{(02)}(\alpha^{(20)} - \rho v^2) - [\alpha^{(11)}]^2 > 0,$$
$$\alpha^{(02)}(\alpha^{(20)} - \rho v^2) > 0.$$

Двумерный солитон (22) пространственно локализован ($R = 0(r^{-2})$ при $r \to \infty$), может быть и неподвижным, $v = 0$. Исходное предположение о слабой зависимости волн от переменной η предполагает ограничение на область применимости решения (22)

$$\alpha^{(11)} \ll 2\alpha^{(02)}, \qquad (\alpha^{(20)} - \rho v^2) \ll \alpha^{(02)}.$$

Заметим, что возбуждение солитонов в окрестности мартенситного фазового перехода возможно в результате воздействия импульсных сил, которые приложены к поверхности образца или локально возникают при его деформировании, а также на границах зерен, претерпевших локальный фазовый переход. Кроме того, солитоны могут возникать как предпереходные состояния в результате обмена энергией между различными фононными ветвями и развития неустойчивости в фононной системе [7].

4. Устойчивость солитонов

Условия устойчивости солитонов уравнения КП (17) исследованы в [8,9]. Установлено, что при $\alpha^{(40)}\alpha^{(02)} < 0$ плоские солитоны типа (19) устойчивы относительно двумерных возмущений. Нетривиальная картина имеет место при $\alpha^{(40)}\alpha^{(02)} > 0$. В этом случае плоские солитоны модели КП неустойчивы, однако существуют устойчивые относительно двумерных возмущений двумерные солитоны типа (22). Плоские солитоны в результате развития неустойчивости порождают фононы [10] либо двумерные солитоноподобные возбуждения [11]. Для более общего, чем КП, уравнения (13) условия устойчивости солитонов должны быть модифицированы. Получим критерий неустойчивости плоского солитона типа (19)

$$R^{(0)} = -\frac{6\alpha^{(40)}d^2}{g\,\mathrm{ch}^2\,\vartheta}, \quad \vartheta = d(\xi + vt), \quad d^2 = \frac{\alpha^{(20)} - \rho v^2}{4\alpha^{(40)}} > 0 \tag{23}$$

относительно двумерных возмущений. Заметим, что решение (23) существует лишь в определенном интервале значений скорости солитона. В частности, при $\alpha^{(40)}, \alpha^{(20)} > 0$ скорость солитона должна быть меньше скорости звука $0 < v^2 < \alpha^{(20)}/\rho$, а при $\alpha^{(20)} > 0$, $\alpha^{(40)} < 0$ солитон движется со сверхзвуковой скоростью.

Будем искать решение возмущенного уравнения (13) в форме [12]

$$R = R^{(0)}[\vartheta + \alpha(Y_i, T_i)] + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n R^{(n)}(\vartheta + \alpha, Y_i, T_i). \tag{24}$$

Здесь ε — малый параметр, характеризующий отношение дифракции и нелинейности; $Y_i = \varepsilon^i \eta$, $T_i = \varepsilon^i t$ — медленные переменные. Подставляя разложение (24) в (13), группируя члены одного порядка по ε и пренебрегая высшими степенями по α (линейное приближение), получаем

$$d^4\alpha^{(40)}[-4\partial_\vartheta^2 + \partial_\vartheta^4]R^{(0)} - gd^2\partial_\vartheta^2[R^{(0)}]^2 = 0,$$

$$\hat{L}R^1 = -\left[2v\rho d\frac{\partial\alpha}{\partial T_1} + \alpha^{(11)}d\frac{\partial\alpha}{\partial Y_1}\right]\partial_\vartheta^2 R^{(0)}, \tag{25a}$$

$$\hat{L}R^{(2)} = -\rho\left[\frac{\partial^2\alpha}{\partial T_1^2}\partial_\vartheta R^{(0)} + 2vd\frac{\partial\alpha}{\partial T_2}\partial_\vartheta^2 R^{(0)} + 2vd\frac{\partial^2 R^{(1)}}{\partial\vartheta\partial T_1} + 2vd\frac{\partial\alpha}{\partial T_1}\partial_\vartheta^2 R^{(1)}\right] -$$

$$-\alpha^{(11)}\left[d\frac{\partial\alpha}{\partial Y_2}\partial_\vartheta^2 R^{(0)} + d\frac{\partial\alpha}{\partial Y_1}\partial_\vartheta^2 R^{(1)} + d\frac{\partial^2 R^{(1)}}{\partial\vartheta\partial Y_1}\right] + \alpha^{(02)}\frac{\partial^2\alpha}{\partial Y_1^2}\partial_\vartheta R^{(0)} + gd^2\partial_\vartheta^2[R^{(1)}]^2, \tag{25b}$$

$$\hat{L}\varphi = d^4\alpha^{(40)}[-4\partial_\vartheta^2 + \partial_\vartheta^4]\varphi - 2gd^2\partial_\vartheta^2[R^{(0)}\varphi].$$

Условие отсутствия секулярных членов в (25) есть условие ортогональности правых частей этих уравнений к собственной функции $\psi = \int d\vartheta R^{(0)}(\vartheta)$ оператора, сопряженного к $\hat{L}$ (возникающие произвольные константы устраняются требованием убывания $R^{(0)}(\vartheta)$ на бесконечности). Для уравнения (25a) условие ортогональности выполняется автоматически. Решение имеет вид

$$R^1 = -\left[2v\rho\frac{\partial\alpha}{\partial T_1} + \alpha^{(11)}\frac{\partial\alpha}{\partial Y_1}\right]\left[R^{(0)} + \frac{\vartheta}{2}\partial_\vartheta R^{(0)}\right]/4d^3\alpha^{(40)}.$$

Условие ортогональности для уравнения (25b) дает эволюцию α в приближении геометрической оптики

$$\gamma_1\frac{\partial^2\alpha}{\partial T_1^2} - \gamma_2\frac{\partial^2\alpha}{\partial Y_1^2} - \gamma_3\frac{\partial^2\alpha}{\partial Y_1\partial T_1} = 0, \qquad \gamma_1 = \rho(\alpha^{(20)} - 4\rho v^2),$$

$$\gamma_2 = \alpha^{(02)}(\alpha^{(20)} - \rho v^2) + \frac{3}{4}(\alpha^{(11)})^2, \qquad \gamma_3 = 3v\rho\alpha^{(11)}. \tag{26}$$

Из (26) следует критерий неустойчивости солитона

$$\gamma_3^2 + 4\gamma_1\gamma_2 < 0. \tag{27}$$

В частности, при

$$\alpha^{(11)} = 0, \qquad \alpha^{(20)} > 0, \qquad \alpha^{(40)} > 0$$

решение (23) может быть устойчивым лишь при $\alpha^{(02)} > 0$, причем в более узком, чем определено формулой (23), интервале скоростей движения солитона: $0 < v^2 < \alpha^{(20)}/4\rho$. В области больших скоростей $\alpha^{(20)}/4\rho < v^2 < \alpha^{(20)}/\rho$ такой солитон может быть стабильным лишь при $\alpha^{(02)} < 0$. Граница устойчивости солитоном может быть достигнута благодаря неоднородностям температуры или локальным напряжениям, которые изменяют сдвиговые модули и потому влияют на стабильность солитонов, так же как и температура. В результате развития неустойчивости солитоны могут испускать фононы. По-видимому, это позволяет по-новому взглянуть на проблему аномальной акустической эмиссии вблизи мартенситных фазовых переходов [13].

Автор признателен Ю.Н. Горностыреву, М.И. Кацнельсону, А.В. Трефилову за обсуждения результатов работы, а также Д.А. Лисаченко за предоставленную информацию по ферроупругим мартенситным переходам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-2011).

Список литературы

[1] Jacobs A.E. // Phys. Rev. B. 1985. V. 31. N 9. P. 5984–5989.
[2] Barsch G.R., Krumhansl J.A. // Metall. Trans. A. 1988. V. 19. N 4. P. 761–775.
[3] Falk F. // Z. Phys. B. — Condensed Matter. 1983. V. 51. N 2. P. 177–185.
[4] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 694 с.
[5] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. М.: Наука, 1980. 319 с.
[6] Hirota R. // Prog. Theor. Phys. 1974. V. 52. N 5. P. 1498–1512.
[7] Кацнельсон М.И., Трефилов А.В. // ЖЭТФ. 1990. Т. 97. № 6. С. 1892–1900.
[8] Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. // ДАН СССР. 1970. Т. 192. № 5. С. 753–756.
[9] Кузнецов В.А., Турицын С.К. // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. № 5. С. 1457–1463.
[10] Захаров В.Е. // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 82. № 5. С. 364–367.
[11] Пеленовский Д.Е., Степанянц Ю.А. // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. № 4. С. 3387–3400.
[12] Песенсон М.З. // ФТТ. 1990. Т. 32. № 5. С. 1467–1474.
[13] Vaks V.G., Katsnelson M.I., Koreshkov V.G., Likhtestein A.I., Parfenov O.E., Skok V.A., Sukhoparov V.A., Trefilov A.V. // J. Phys. — Condensed Matter. 1989. V. 1. N 2. P. 5319–5336.

Институт физики металлов
УрО РАН
Екатеринбург

Поступило в Редакцию
18 апреля 1994 г.