1994 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том 36, № 11
1994 SOLID STATE PHYSICS Vol. 36, N 11

УДК 538.945

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА

Б.М.Хасанов, С.И.Белов

Методом ренормгруппы изучен фазовый переход в континуальной случайной n-компонентной модели Поттса. Показано, что при $n = 3$ в трехмерной модели происходит фазовый переход первого рода, а при $n = 2$, что соответствует случайной модели Изинга, устойчивая фиксированная точка существует уже в однопетлевом приближении уравнений ренормгруппы.

В модели Поттса каждый узел на решетке находится в одном из n-состояний. Энергия взаимодействия соседних узлов, находящихся в одном состоянии, равна ε_0 и $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$, если состояния различны. Так как гамильтониан континуальной модели с тензорным параметром порядка содержит тройную вершину, то, согласно теории Ландау, фазовый переход будет первого рода. Тем не менее в работах [1,2] было показано, что сильные флуктуации могут привести к непрерывному переходу в чистой модели Поттса.

Статические точечные дефекты, которые не вызывают упорядочения матрицы в области своей локализации, приводят к локальному изменению констант эффективного гамильтониана. Наиболее простой тип дефектов — это дефекты типа «случайная температура». При этом существуют другие типы дефектов. Ниже мы рассмотрим критическое поведение континуального аналога случайной модели Поттса на решетке и учтем случайные локальные изменения всех коэффициентов эффективного гамильтониана. Ранее подобное исследование свойств случайной P-модели (системы с симметричным недиагональным бесследовым тензорным параметром порядка) показало, что ее критическое поведение экспериментально не отличимо от свойств чистой модели. Это связано с тем, что устойчивые фиксированные точки ФТ уравнений ренормгруппы в этих двух случаях находятся очень близко друг к другу [3].

Для континуальной модели Поттса гамильтониан запишем в виде разложения по тензорному параметру порядка [4]

$$H=\frac{1}{2!}\int\limits_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2} v_2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)Q_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1)Q_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_2)+\frac{1}{3!}\int\limits_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3} v_3(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)Q_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1)\times$$

$$\times Q_{\beta\gamma}(\mathbf{q}_2)Q_{\gamma\alpha}(\mathbf{q}_3)+\frac{1}{4!}\int\limits_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4} v_4(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4)Q_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1)Q_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_2)\times$$

$$\times Q_{\gamma\beta}(\mathbf{q}_3)Q_{\gamma\delta}(\mathbf{q}_4)+\frac{1}{4!}\int\limits_{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4} v_4'(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4)Q_{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1)Q_{\beta\gamma}(\mathbf{q}_2)Q_{\gamma\delta}(\mathbf{q}_3)Q_{\delta\alpha}(\mathbf{q}_4). \quad (1)$$

Здесь $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{q})$ — Фурье-образ симметричного диагонального бесследового тензора ранга n и $\int_{\mathbf{q}}=\int d^d\mathbf{q}/(2\pi)^d$; v_2, v_3, v_4 — случайные поля, для которых мы предполагаем отсутствие крупномасштабных корреляций, а также трансляционную инвариантность всех средних.

Так как средние от v преобразуются по полной пространственной группе системы в отсутствие примесей, то можно записать

$$\langle v_2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\rangle=\left(r+q_1^2\right)\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2),\qquad \langle v_3(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\rangle=B\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3),$$

$$\langle v_4(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4)\rangle=C\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4),$$

$$\langle v_4'(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4)\rangle=U\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4). \quad (2)$$

Усреднение в (2) проводится с плотностью распределения полей v в гамильтониане H. Наряду с параметрами B, C и U преобразования ренормгруппы изменяют также и средние $\langle\delta v\delta v\rangle$, где δv определяют отклонения от трансляционной инвариантности $v=v+\delta v$. Зависимость (1) от случайной реализации δv характеризуется вторыми моментами (кумулянтами) случайных функций. Для трехмерного пространства необходимо учитывать следующие кумулянты:

$$\langle\delta v_i(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\delta v_j(\mathbf{q}_3\mathbf{q}_4)\rangle=\Delta_{ij}\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_4),$$

$$\Delta_{ij}\in\{\Delta_{rr},\Delta_{BB},\Delta_{rB},\Delta_{rC},\Delta_{rU}\}. \quad (3)$$

Функции $B(T)\equiv\Gamma_3$ и $C(T)\equiv\Gamma_4^i$ (i — номер инварианта четвертого порядка) являются неприводимыми вершинными частями на нулевых импульсах для гамильтониана (1). Кроме них, имеются эффективные примесные вершины: Δ_{rr} той же размерности, что и Γ_4; Δ_{rB} эквивалентна вершине при инварианте пятой степени в гамильтониане; Δ_{BB}, Δ_{rC}, Δ_{rU} эквивалентны вершине при инварианте шестой степени. При непрерывном переходе все вершины степенны́м образом зависят от обратного корреляционного радиуса χ

$$\Gamma_k\propto g_k\chi^{\frac{2k-d(k-2)-k\eta}{2}}, \quad (4)$$

где η — критический индекс Фишера. Наличие кумулянтов той же размерности, что и вершина Γ_6 в беспримесном гамильтониане, требует

Таблица фиксированных точек уравнений ренормгруппы (5) для $n = 3$

	$O(2)$	A_+	A_-	$O^r(2)$	A^r_+	A^r_-	A^r_1	A^r_2	U
B^2	0	2	$\frac{18}{43}$	0	2.27	0.54	0.19	5.64	0
C	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{43}$	$\frac{3}{8}$	0.3	0.44	0.33	1.47	0
Δ_{rr}	0	0	0	$\frac{1}{16}$	0.03	−0.12	0.04	0.1	$-\frac{1}{16}$
Δ_{rB}	0	0	0	0	0.004	−0.05	0.01	−0.45	0
Δ_{BB}	0	0	0	0	0.04	−0.03	0.02	1.43	0
Δ_{rC}	0	0	0	0	−0.008	−0.03	0.0007	−0.31	0

учета последних при преобразованиях ренормгруппы. Однако последовательно это можно сделать только в двухпетлевом приближении, поэтому в рассматриваемом здесь однопетлевом приближении вершину Γ_6 мы не учитываем.

Для безразмерных инвариантных зарядов $g_k \in (B, C, U, \Delta_{ij})$ можно получить уравнения типа Гелл-Манна–Лоу

$$\frac{\partial g_k}{\partial t} = \Psi_k(g), \tag{5}$$

где $t = \ln \chi^2$. Для произвольного n таких уравнений будет восемь. При $n = 3$ два инварианта четвертой степени в (1) связаны между собой соотношением $\mathrm{Sp}Q^4 = 1/2(\mathrm{Sp}Q^2)^2$. В этом случае число уравнений уменьшается до шести, хотя все еще остаются весьма громоздкими. Численное решение дает ФТ с положительными B^2 и C (см. таблицу).

Первые три точки с $\Delta = 0$, впервые полученные в [1], отвечают случаю беспримесной модели Поттса. ФТ A_+ является седлом, а ФТ A_- — устойчивым фокусом. Фазовая траектория, проходящая через ФТ A_+, делит фазовую плоскость на две части: из одной траектории уходят к прямой, на которой происходит фазовый переход первого рода, а из второй они стремятся к ФТ A_-, где происходит фазовый переход второго рода. Для неупорядоченной модели Поттса из всех ФТ устойчивой является только ФТ A^r_-. Поскольку Δ_{rr} и Δ_{BB}, по определению, должны быть положительными, ФТ A^r_- недостижима и физического смысла не имеет. Таким образом, фазовый переход в неупорядоченной трехкомпонентной модели Поттса, описываемый гамильтонианом (1), будет переходом первого рода. Следует отметить, что ФТ A_- чистой системы неустойчива только по отношению к Δ_{BB} и Δ_{rC}. Все приведенные в таблице ФТ попадают в устойчивую от выпадания конденсата область значений B^2 и C. Возникает вопрос: какая фазовая траектория будет описывать критическое поведение? Вполне вероятно, что она пройдет в окрестности ФТ A_- или A^r_1. В этом случае критический индекс восприимчивости γ, для которого можно получить соотношение

$$1 - \gamma^{-1} = \frac{n+1}{3}C - \frac{3(n-2)}{2n}B^2 - 2\Delta_{rr}, \tag{6}$$

равен $\gamma \simeq 1.3$. Если же она лежит рядом с A_+ или A^r_+, то $\gamma \simeq 0.6$.

Полученный выше результат для случая $n = 3$ справедлив только в однопетлевом приближении. Оно является довольно грубым уже при исследовании критических свойств чистой модели, например завышенное значение индекса γ. Однако низшее приближение по ренормгруппе дает принципиальную возможность существования фазового перехода как первого, так и второго рода [1]. Оставаясь в том же приближении, учет примесей приводит к уходу устойчивой ФТ в нефизическую область параметрического пространства, и как следствие — фазовый переход первого рода. Что произойдет с ФТ A^r_- в двухпетлевом приближении, сказать трудно. По-видимому, этот вопрос связан с вопросом об устойчивости ФТ A_- чистой модели. Если возможность непрерывного фазового перехода в чистой модели сохранится в следующих приближениях по ренормгруппе, то ФТ A^r_- должна вернуться в физическую область параметрического пространства. Действительно, маловероятно, чтобы примеси превращали непрерывный переход в скачкообразный.

Для исследования критических свойств при $n > 3$ необходимо решать уже восемь уравнений типа (5). Эта задача резко усложняется по сравнению с трехкомпонентной системой. Поэтому рассмотрим только примеси типа «случайная температура», т.е. только $\Delta_{rr} \neq 0$, и получим неустойчивую ФТ при $n = 4$ и устойчивые при $n \geqslant 5$ с $B^2, U > 0$ и $C, \Delta < 0$. Устойчивых ФТ в физической области с $B^2, \Delta_{rr} \geqslant 0$ нет.

Если положить $B = 0$ в гамильтониане (1) и рассмотреть предел $n \to \infty$, (при этом условие $\mathrm{Sp}Q = 0$ становится несущественным), то возникают устойчивая нефизическая ФТ с $U = 1/12$, $C = 1/4n$, $\Delta_{rr} = -1/48$ и устойчивая ФТ $U = 1/6$, $C = 1/2n$, $\Delta_{rr} = 0$. Последняя описывает критические свойства сферической модели с кубической анизотропией. Для нее, вычисляя γ при $n \to \infty$

$$1 - \gamma^{-1} = \frac{n}{3}C + U,$$

имеем $\gamma = 3/2$. В трехпетлевом приближении устойчивая ФТ равна $nC \simeq 0.480$, $U \simeq 0.176$, $\Delta_{rr} = 0$, а $\gamma \simeq 1.43$. В нулевом порядке по $1/n$ уравнение ренормгруппы для вершины U и критический индекс η зависят только от U. Поэтому значение η сферической модели с кубической анизотропией равно η модели Изинга. Аналогичные результаты были получены в работе [5], где использовалась теория возмущения по вершине C. Заметим, что если принять только $C \neq 0$ в гамильтониане (1) (сферическая модель), то получим хорошо известный результат в трехмерном пространстве $\gamma = 2$. Рассмотренный здесь предельный случай больших n согласуется с утверждением, что при $n \to \infty$ и $d > 2$ взаимодействие флуктуаций C исчезает, при этом nC остается конечным и эффективным может быть разложение по $1/n$.

Отдельного рассмотрения заслуживает случай $n = 2$, который соответствует модели Изинга. При этом тройная вершина B не влияет на поведение физических величин и соответствующий ей заряд g_3 выпадает из уравнений (5). Это сразу следует из симметрии модели Поттса при $n = 2$, кроме того, как и при $n = 3$, в (1) существует лишь один инвариант четвертого порядка. Поэтому общее число переменных уменьшается до трех, а именно: C и два кумулянта Δ_{rr} и Δ_{rC}. Если $\Delta_{rC} = 0$, то уравнения (5) вырождены в однопетлевом приближении и не имеют нетривиальных решений. В двухпетлевом приближении вырождения нет, однако отсутствует ФТ, описывающая фазовый переход в чистой модели Изинга. Как чистая, так и примесная ФТ появляются только в трехпетлевом приближении [6,7]. Полагая $\Delta_{rC} \neq 0$, можно получить нетривиальную устойчивую примесную ФТ уже в однопетлевом приближении: $C = 0.390$, $\Delta_{rr} = 0.051$, $\Delta_{rC} = -0.002$. Используя (6), легко получить индекс восприимчивости γ. Остальные критические индексы, согласно соотношениям теории подобия, выражаются через γ и η, причем последний равен нулю в однопетлевом приближении. В трехмерной перенормированной теории возмущений для нахождения численного значения γ можно использовать два способа: 1) подставить в (6) координаты ФТ и обратить полученное число, 2) вначале обратить (6) и представить γ по степеням C и A_{rr} и уже в это выражение подставить координаты ФТ. В результате для γ и критического индекса теплоемкости α находим следующие значения, вычисленные двумя способами соответственно: $\gamma = 1.4$, $\alpha = -0.1$ и $\gamma = 1.29$, $\alpha = 0.07$. Учет высших порядков теории возмущения (для этого необходимо рассмотреть трехпетлевое приближение) немного увеличит индекс γ, но может существенно изменить значения индекса α. Уже в однопетлевом приближении два способа вычисления γ приводят к разным знакам у α. Таким образом, полученные результаты не позволяют надежно установить величину примесного индекса α. Можно предположить, что это не удастся сделать и при учете трехпетлевых диаграмм, как это было показано в [6] с примесями типа «случайная температура». Учет кумулянта Δ_{rC} не меняет основанное на рассуждениях Харриса [8] утверждение о том, что критический индекс теплоемкости примесной системы Изинга должен быть отрицательным [6,7].

Работа одного из авторов (Б.М.Х.) была частично поддержана грантом Sloan Foundation, присужденным Американским физическим обществом.

Список литературы

[1] Корженевский А.Л. // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 4 (10). С. 1974.
[2] Корженевский А.Л. // ФТТ. 1978. Т. 20. № 2. С. 359.
[3] Хасанов Б.М., Белов С.И. // ФТТ. 1994. Т. 36. № 4. С. 1073.
[4] Priest R.G., Lubensky T.C. // Phys. Rev. B. 1976. V. 13. P. 4159.
[5] Aharony A. // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1494.
[6] Соколов А.И., Шалаев Б.Н. // ФТТ. 1981. Т. 23.№ 7. С. 2058.
[7] Mayer I.O., Sokolov A.I., Shalaev B.N. // Ferroelectrics. 1989. V. 95. P. 93; Mayer I.O. // J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 2815.
[8] Harris A.B. // J. Phys. C. 1974. V. 7. P. 1671.

Казанский государственный университет

Поступило в Редакцию
23 марта 1994 г.
В окончательной редакции
25 мая 1994 г.