УДК 539.2

ВЛИЯНИЕ РЕШЕТОЧНЫХ ЭФФЕКТОВ НА КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СВЕРХПРОВОДНИКОВ II РОДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С.А.Ктиторов, Б.Н.Шалаев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург
Поступило в Редакцию 13 мая 1994 г.

Критическое поведение сверхрпроводников (СП) II рода вблизи верхнего критического поля $H_{c2}(T)$ изучается методом $(1/N)$-разложения, где N-число компонент комплексного параметра порядка. В рамках стандартной теории Гинзбурга–Ландау показано, что критические флуктуации разрушают смешанное состояние системы при $d < 4$ (d — размерность пространства). Дальний порядок ниже линии $H_{c2}(T)$ восстанавливается благодаря дискретной кристаллической трансляционной симметрии. Критические индексы на этой линии совпадают с критическими индексами Бозе-жидкости.

В настоящее время не существует последовательной теории, описывающей критическое поведение сверхпроводников (СП) II рода вблизи верхнего критического поля $H_{c2}(T)$, несмотря на интенсивные исследования в этом направлении на протяжении ряда лет [1–4]. Многочисленные попытки построить такую теорию встретились с серьезными трудностями, которые, в частности, состоят в следующем. В канонической теории Гинзбурга–Ландау (ГЛ), описывающей СП во внешнем магнитном поле, имеет место размерная редукция, т.е. эффективное уменьшение пространственной размерности на 2: $d \Rightarrow d-2$ (см. далее) [5]. Благодаря размерной редукции флуктуации параметра порядка являются одномерными ($1D$) и в отличие от случая $H = 0$ играют важную роль в окрестности $H_{c2}(T)$. Следует ожидать, что в такой системе фазовый переход вообще невозможен, так как образование дальнего порядка в вырожденных $1D$-системах запрещено теоремой Мермина–Вагнера [6].

С теоретико-полевой точки зрения СП во внешнем магнитном поле описывается неперенормированной скалярной моделью типа Φ^4 с бесконечным числом инвариантных зарядов, верхняя критическая размерность которой равна [5]. Неперенормируемость и размерная редукция в модели ГЛ в магнитном поле являются следствиями бесконечно кратного вырождения уровней Ландау заряженной частицы в однородном магнитном поле. Исследование флуктуационных эффектов в нормальной фазе на основе бесконечной системы однопетельных уравнений ренормгруппы (РГ) в $(6-\varepsilon)$-мерном пространстве, полученной в [5], представляет значительные трудности. К сожалению, эти уравнения практически бесполезны для получения достоверной информации о существовании и характере фазового перехода в $3D$-модели.

В работах Мура [7,8] было показано, что флуктуации фазы сверхпроводящего параметра порядка разрушают абрикосовую фазу при $d < 4$. Таким образом, налицо глубокое противоречие между теорией и экспериментом. По нашему мнению, выход из создавшейся ситуации следует искать в модификации канонической теории ГЛ.

Настоящая работа посвящена исследованию критической термодинамики решеточной модели СП в окрестности линии фазовых переходов $H_{c2}(T)$. Решеточные модели представляют самостоятельный интерес, так как любая решеточная теория имеет более богатое физическое содержание, чем ее непрерывный предел. Естественно ожидать, что в континуальном пределе решеточное действие перейдет во флуктуационный гамильтониан теории ГЛ. Далее будет показано, что это не так. Больше того, в критической области это две разные теории с различной симметрией и числом компонент параметра порядка.

Оказывается, что эффекты кристаллической магнитной трансляционной симметрии: харперовское уширение и расщепление уровней Ландау — восстанавливают сверхпроводящий фазовый переход в вихревую фазу. На первый взгляд, вблизи точки фазового перехода II рода, когда радиус корреляций критических флуктуаций r_c стремится к бесконечности, по мере того как $T \Rightarrow T_c$, система «забывает» о дискретности кристаллической решетки. Именно поэтому в критической области непрерывная модель, описываемая гамильтонианом ГЛ, и ее решеточная версия эквивалентны.

Однако в случае СП в магнитном поле эта привычная аргументация не работает. Дело в том, что кристаллическая решетка нарушает непрерывную магнитную трансляционную симметрию, понижая ее до бесконечной дискретной группы, и подавляет размерную редукцию. Аккуратный анализ решеточных моделей, выполненный в [9], показывает, что в континуальном пределе решеточная модель СП в однородном магнитном поле не переходит в теорию ГЛ с однокомпонентным параметром порядка. Напротив, ее непрерывным пределом служит более сложная модель с многокомпонентным параметром порядка, число компонент которого определяется величиной магнитного потока через плакет (см. далее). При $d > 2$ в этой модели происходит сверхпроводящий фазовый переход образованием абрикосовской решетки, соизмеримой с кристаллической. Итак, кристаллические эффекты, понижая симметрию исходной системы и повышая ее эффективную пространственную размерность, приводят к возникновению дальнего порядка ниже линии $H_{c2}(T)$.

В работе рассматриваются как непрерывная, так и решеточная модели с N-компонентным комплексным параметром порядка в однородном магнитном поле. В рамках $(1/N)$-разложения установлено отсутствие непрерывного фазового перехода в стандартной теории ГЛ, что полностью согласуется с результатами Мура для $N = 1$ [7,8]. Заметим, что метод $(1/N)$-разложения представляет собой средство борьбы с неперенормируемостью и в этом качестве он часто используется в квантовой теории поля (см., например, [10]). Показано, что в решеточной модели существует линия фазовых переходов II рода $H_{c2}(T)$ с универсальными критическими индексами. Последние совпадают с критическими индексами Бозе-жидкости и не зависят от величины магнитного потока, определяющего число компонент параметра порядка.

Статья построена следующим образом. В разделе 1 критическое поведение модели ГЛ изучается методом $(1/N)$-разложения. Раздел 2 посвящен исследованию континуального предела и критических свойств решеточных моделей СП. Основные результаты этой статьи кратко обсуждаются в разделе 3.

1. Теория Гинзбурга–Ландау в рамках $(1/N)$-разложения

Флуктуационный гамильтониан ГЛ имеет вид

$$H = \int d^d x \left\{ \frac{\hbar^2}{4m} \left| \left(i\partial_\mu + \frac{2\pi}{\Phi_0} A_\mu \right) \Phi_a \right|^2 + \frac{1}{2} \varkappa_0^2 \Phi_a \Phi_a^* /2 + \frac{u_0}{8} I_{abcd} \Phi_a \Phi_b \Phi_c^* \Phi_d^* \right\}, \quad (1)$$

где

$$\varkappa_0^2 - \varkappa_{oc}^2 \sim \tau = \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (2)$$

Здесь $\Phi = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_N\}$ — N-компонентный комплексный параметр порядка; $u_0 > 0$; A_μ — векторный потенциал, взятый для удобства в симметричной калибровке

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}], \quad (3)$$

где $\mathbf{B}$ — однородное магнитное поле, направленное вдоль оси z; $\Phi_0 = hc/2e$ — квант магнитного потока; $I_{abcd} = \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}$; $a, b, c, d = 1, \ldots, N$; по дважды встречающимся цветовым индексам производится суммирование.

В нормальной фазе уравнение Дайсона для двухточечной функции Грина в пределе больших N может быть записано в виде [11]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{1}{2} N u_0 \int d^d R G_0(\mathbf{r}, R) G(R, R) G(R, \mathbf{r}'). \quad (4)$$

Тензорная структура функции Грина тривиальна $G_0^{ab}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\delta^{ab}$, поэтому в уравнении (4) цветовые индексы опущены. Затравочный калибровочно-неинвариантный коррелятор $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является функцией Грина оператора Шредингера

$$\left[\frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu)^2 + \varkappa_0^2 \right] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5)$$

Точное решение уравнения (5) может быть найдено аналитически причем в произвольной калибровке [12]

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \exp\left\{ -\frac{ie}{\hbar c} \int_r^{r'} dx_\mu A_\mu \right\} \int_0^\infty d\beta m\omega (4\pi\hbar \operatorname{sh} \frac{\omega\beta}{2})^{-1} (2\pi\hbar \frac{\beta}{m})^{(2-d)/2} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\varkappa_0^2 \beta - \frac{m}{2\hbar\beta}(z - z')^2 - \frac{m\omega}{4\hbar} \operatorname{ch} \frac{\omega\beta}{2} \left[(y - y')^2 + (x - x')^2 \right] \right\}, \quad (6)$$

где $\omega = eB/mc$ — циклотронная частота; z и z' обозначают $d - 2$ продольные координаты. Интеграл в экспоненте в (6) берется вдоль прямой линии, соединяющей точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$.

Рассмотрим решение уравнения (4) в окрестности линии фазовых переходов. В пространственно однородной системе $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ зависит от разности координат $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, а при совпадающих аргументах $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ не зависит от $\mathbf{r}$, поэтому нелинейное уравнение Дайсона (4) превращается в линейное интегральное уравнение, легко решаемое преобразованием Фурье. Из физических соображений ясно, что нормальная фаза СП в однородном магнитном поле является трансляционно-инвариантной, поэтому, казалось бы, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ должна зависеть только от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. То, что это не так, видно из представления (6), в котором линейный интеграл от A_μ не является функцией от разности координат. Разрешение этого маленького парадокса состоит в том, что коррелятор $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ не является калибровочно-инвариантной, т.е. наблюдаемой величиной.

Из локальной калибровочной инвариантности теории (1) следует, что при трансляциях $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r}+\mathbf{a}$ нормальная функция Грина в калибровке (3) преобразуется по закону [13]

$$G(\mathbf{r}+\mathbf{a}, \mathbf{r}'+\mathbf{a}) = \exp\left\{\frac{ie}{2\hbar c}[\mathbf{B}, \mathbf{a}](\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right\} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \tag{7}$$

Это видно также из уравнения (6). Величина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ является калибровочно-инвариантной и, согласно (7), равна постоянной.

Таким образом, мы можем рассматривать (4) как линейное интегральное уравнение. Несмотря на это, его решение сопряжено с большими трудностями ввиду неприменимости преобразования Фурье по поперечным координатам x и y. Обойти это препятствие можно следующим образом.

Заметим, что нас интересует не столько точное решение уравнения (4), сколько асимптотически точное выражение для коррелятора вблизи $H_{c2}(T)$. При малых τ доминирующий вклад в коррелятор вносит, как известно, наинизший уровень Ландау. В этом приближении невозмущенная функция Грина равна

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \exp\left\{-\frac{ie}{\hbar c}\int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} dx_\mu A_\mu - \frac{m\omega}{4\hbar}\left[(y-y')^2 + (x-x')^2\right]\right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty d\beta \frac{m\omega}{h}\left(2\pi\hbar\frac{\beta}{m}\right)^{(2-d)/2} \exp\left\{-\left(\varkappa_0^2 + \frac{\omega}{2}\right)\beta - \frac{m}{2\hbar\beta}(z-z')^2\right\}. \tag{8}$$

Переход от выражения (6) к (8) был произведен с помощью следующих замен в (6): $\operatorname{cth}\omega\beta/2 \Rightarrow 1$; $\operatorname{sh}\omega\beta/2 \Rightarrow (1/2)\exp\omega\beta/2$.

Точное решение (4) с затравочной функцией (8) удобно искать в смешанном координатно-импульсном представлении, выполнив преобразование Фурье по продольным переменным $z - z'$

$$G(x, x', y, y'; k) = C\exp\Big\{-\frac{ie}{\hbar c}\int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} dx_\mu A_\mu -$$

$$- \frac{m\omega}{4\hbar}\left[(y-y')^2 + (x-x')^2\right]\Big\}\frac{1}{k^2+M^2}, \tag{9}$$

где C — несущественная постоянная; $r_c^{-1} = M$ — обратный корреляционный радиус критических флуктуаций. Замечательно, что при подстановке (9) в (4) и интегрировании по промежуточной переменной, экспонента, стоящая в (9), воспроизводится! Это обстоятельство имеет место в любой калибровке благодаря наличию экспоненциального множителя с векторным потенциалом. Действительно, свертка двух одинаковых гауссовских экспонент также является гауссовской экспонентой, но не совпадающей с исходными.

Подставив (9) в (4), мы немедленно приходим к алгебраическому уравнению для «физической массы» M, хорошо известному из теории критических явлений [11]

$$M^2 = \varkappa_0^2 + \frac{1}{2} N u_0 \int \frac{d^{d-2}k}{(2\pi)^{d-2}} \frac{1}{k^2 + M^2}. \tag{10}$$

Уравнение (10) показывает, что в теории (1) имеет место размерная редукция, запрещающая спонтанное нарушение $U(1)$ — симметрии при $d < 4$. Таким образом, линии фазовых переходов $H_{c2}(T)$ при $d = 3$ просто не существует. Размерная редукция является точной в рамках $(1/N)$-разложения. Уравнение (10) находится в согласии с результатами Мура [7,8] для $N = 1$ и утверждением Раджери и Таулесса [2] о том, что модель (1) при $d = 3$, $N = 1$ по своим свойствам идентична $1D$-модели ГЛ в нулевом магнитном поле.

2. Критическое поведение решеточных моделей

Как уже отмечалось выше, одним из возможных способов повышения эффективной пространственной размерности системы является учет решеточных эффектов. Имеется два полностью эквивалентных подхода (в критической области) к изучению этих эффектов. Первый из них заключается в исследовании решеточной модели с самого начала. Рассмотрим однородно фрустированную $O(2N)$-симметричную нелинейную сигма-модель на решетке с гамильтонианом вида [9]

$$H = -\sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} n_i^a n_j^{a*} \exp\left(i \frac{2\pi}{\varphi_0} \int_i^j dx_\mu A_\mu \right), \tag{11}$$

где $n^a = \{n^1, \ldots, n^N\}$ — единичный комплексный вектор; $n^a n^{a*} = 1$; $J_{ij} = J$ для ближайших соседей и нулю во всех остальных случаях; $\varphi/\varphi_0 = f$, где φ — поток через плакет; f — фрустрация; $f = p/q$, p и q — взаимно простые числа.

Процедура вывода эффективного действия ГЛ для модели (11), т.е. ее непрерывного предела, детально описана в [9] (для случая $N = 1$) и здесь не рассматривается. В [9] показано, что на самом деле решеточной теории (11) соответствует бесконечный набор гамильтонианов ГЛ с различной внутренней симметрией и числом компонент параметра порядка, отвечающих различным рациональным значениям фрустрации f.

Вторая схема получения эффективного гамильтониана ГЛ хотя и выглядит несколько искусственной, но является на наш взгляд, более удобной и приводит к тем же результатам, что и первая. Исходным пунктом здесь служит модифицированное действие ГЛ, отличающееся от (1) квадратичными слагаемыми [14]

$$H = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \left| \varepsilon(-i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu)\Phi_a \right|^2 + \frac{1}{2}\varkappa_0^2 \Phi_a \Phi_a^* + \frac{u_0}{8} I_{abcd} \Phi_a \Phi_b \Phi_c^* \Phi_d^* \right\}, \quad (12)$$

где $\varepsilon(k)$ — зонный спектр, в отсутствие решеточных эффектов он переходит в стандартное выражение $\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Во избежание недоразумений подчеркнем, что $\varepsilon(\mathbf{k})$ не имеет ничего общего с зонным спектром электронов проводимости (дырок). Внешнее магнитное поле равно

$$\mathbf{B} = \Phi_0 \frac{a_z}{v} f \quad (13)$$

Здесь v — объем элементарной ячейки, a_z — постоянная решетки в направлении оси z.

В пределе больших N корреляционная функция $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ по-прежнему удовлетворяет уравнению (4), в котором затравочная функция Грина $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ является решением уравнения Харпера [15]

$$\left[\varepsilon(-i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) + \varkappa_0^2\right] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (14)$$

Для дальнейшего полезно ввести собственные функции и собственные значения оператора Харпера

$$\left[\varepsilon(-i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu) + \varkappa_0^2\right] \Psi_{n\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{x}) = E_{n\mathbf{k}} \Psi_{n\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{x}), \quad (15)$$

где $\mathbf{k}$ — квазиимпульс, определенный в магнитной зоне Бриллюэна; n — номер магнитной зоны; $\alpha = 1, \ldots, s$. Для четных $qs = q$ $(q/2)$, для нечетных — $s = q$. Хотя явные выражения для харперовских собственных функций и собственных значений неизвестны, их общие свойства изучены достаточно хорошо.

Энергетический спектр оператора Харпера вырожден по квантовому числу α, нумерующему собственные функции $\Psi_{n\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{x})$, которые образуют ортонормированный базис s-мерного неприводимого проективного представления группы магнитных трансляций.

Вблизи дна зоны для спектра $E_{n\mathbf{k}}$ справедливо приближение эффективной массы

$$E_{n\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m_1}(k_x^2 + k_y^2) + \frac{\hbar^2}{2m_2} k_z^2 + \varkappa_0^2, \quad (16)$$

где $m_{1,2}$ — эффективные массы в плоскости $x - y$ и вдоль оси z соответственно. Уравнение Дайсона (4) удобно решать с помощью спектральных разложений для функций Грина

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n,\mathbf{k},\alpha} {E_{n\mathbf{k}}^{(0)}}^{-1} \Psi_{n\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{r}) \Psi_{n\mathbf{k}\alpha}^*(\mathbf{r}'), \quad (17)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n,\mathbf{k},\alpha} E_{n\mathbf{k}}^{-1} \Psi_{n\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{r}) \Psi_{n\mathbf{k}\alpha}^*(\mathbf{r}'). \quad (18)$$

Перенормированный спектр $E_{n\mathbf{k}}$ получается из затравочного $E^{(0)}_{n\mathbf{k}}$ заменой $\varkappa_0^2 \Rightarrow M^2$. Из фундаментального соотношения (7) следует, что при совпадающих аргументах функции (17) и (18) не зависят от $\mathbf{r}$. Интегрируя (18) по объему при $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ и используя условие ортогональности собственных функций $\Psi_{n\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{x})$, находим

$$VG(r, r') = \sum_{n,\mathbf{k},\alpha} E^{-1}_{n\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} = 0), \tag{19}$$

где V — объем системы.

Поскольку $\delta(\mathbf{k} = 0) \sim V$, с точностью до несущественного множителя имеем

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = s \sum_{n,\mathbf{k}} E^{-1}_{n\mathbf{k}}. \tag{20}$$

Множитель s появляется в силу вырождения спектра и суммирования по α. Подставляя (16)–(18) и (20) в (4), находим

$$E^{-1}_{n\mathbf{k}} = E^{(0)^{-1}}_{n\mathbf{k}} + \frac{1}{2} u_0 N s \sum_{n,\mathbf{k}} E^{-1}_{n\mathbf{k}}. \tag{21}$$

В приближении эффективной масы для $E_{n\mathbf{k}}$ и $E^{(0)}_{n\mathbf{k}}$ уравнение (21) переходит в (10), но на этот раз без размерной редукции. Следовательно, в $3D$-модели происходит сверхпроводящий фазовый переход II рода с универсальными критическими индексами. Последние не зависят от f (!) и в пределе $N \Rightarrow \infty$ равны критическим индексам сферической модели.

Наконец, рассмотрим вывод эффективного функционала ГЛ в этой схеме. Раскладывая параметр порядка $\varphi_a(\mathbf{x})$ по собственным функциям (15)

$$\varphi_a(\mathbf{x}) = \sum_{n,\mathbf{k},\alpha} u^a_\alpha(\mathbf{k}; n) \Psi_{n\mathbf{k}\alpha}(\mathbf{x}) \tag{22}$$

и подставляя (22) в (12), получаем [14]

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\alpha,a} E_{n\mathbf{k}} |u^a_\alpha(\mathbf{k})|^2 +$$

$$+ \frac{u_0}{8} \sum_{\substack{\{\mathbf{k}_i\} \\ a,b,c,d \\ \alpha,\beta,\mu,\nu}} I_{abcd}\, g_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) u^a_\alpha(\mathbf{k}_1) u^b_\beta(\mathbf{k}_2) u^{c*}_\mu(\mathbf{k}_3) u^{d*}_\nu(\mathbf{k}_4). \tag{23}$$

В (23) отброшены вклады всех зон Ландау кроме низшей с $n = 0$; $\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, \ldots, s$; коэффициенты $g_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ определяются соотношением

$$g_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \int d^3x \Psi^*_{\mathbf{k}_1\alpha}(\mathbf{x}) \Psi^*_{\mathbf{k}_2\beta}(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{k}_3\mu}(\mathbf{x}) \Psi_{\mathbf{k}_4\nu}(\mathbf{x}). \tag{24}$$

В окрестности T_c зависимостью тензора $g_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ от волновых векторов можно пренебречь за исключением δ-функционного множителя

$$g_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = g_{\alpha\beta\mu\nu}\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4). \tag{25}$$

Подставляя (16) и (25) в (23), получаем локальный флуктуационный гамильтониан ГЛ [14]

$$H = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} |\partial_\mu u^a_\alpha|^2 + \frac{1}{2} \varkappa_0^2 |u^a_\alpha|^2 + \frac{u_0}{8} g_{\alpha\beta\mu\nu} I_{abcd} u^a_\alpha u^b_\beta u^{c*}_\mu u^{d*}_\nu \right\}, \tag{26}$$

где

$$u^a_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} u^a_{\mathbf{k}\alpha} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}). \tag{27}$$

При $N = 1$ гамильтониан (26) описывает фазовый переход сверхпроводник–изолятор в джозефсоновских сетях во внешнем магнитном поле при $T = 0$ [16]. В случае $N = 2, 3$ (26) представляет собой функционал ГЛ для анизотропных СП с d-спариванием носителей заряда, которое имеет место в соединениях с тяжелыми фермионами [17,18].

В отдельных частных случаях, соответствующих различным рациональным f, критическое уравнение (27) может быть исследовано с помощью стандартного ренормгруппового подхода. В общем случае выполнить такой анализ весьма затруднительно по следующим причинам: 1) неизвестен общий вид тензора 4-го ранга $g_{\alpha\beta\mu\nu}$, являющегося сильно разрывной функцией f; 2) в настоящее время надежные методы вычисления ренормгрупповых функций в трехмерном пространстве, основанные на теории возмущений с последующим пересуммированием отрезков асимптотических рядов методом Паде–Бореля, хорошо развиты лишь для моделей с небольшим числом (1,2,3) констант связи [19,20].

Детальное исследование критических свойств модели (26) в сверхсильных магнитных полях с $q = 1, 2, 3, 4$, выполненное в [14], показало, что вблизи T_c модель (26) эквивалентна СП в нулевом магнитном поле (или $3D$ Бозе-жидкости).

По мере роста знаменателя q растет число независимых инвариантных зарядов, поэтому исследование системы (26) наталкивается на огромные трудности технического характера. Для иррациональных значений f $q = \infty$, т.е. решеточная теория становится неперенормируемой, так же как и континульная модель (1).

Заманчиво предположить, что бозевская фиксированная точка (нетривиальная фиксированная точка $3D$ $O(2)$-инвариантной вещественной скалярной теории φ^4) отвечает за критическое поведение рассматриваемой системы на всей линии фазовых переходов $H_{c2}(T)$. К сожалению, на сегодняшний день доказательство этого утверждения отсутствует. В пользу гипотезы свидетельствуют результаты $(1/N)$-разложения, справедливые для любых рациональных f, а также результаты, полученные в [14] для $q = 1, 2, 3, 4$. Кроме того, поскольку критический индекс теплоемкости $3D$-модели $\alpha = -0.007$ [21], бозевская фиксированная точка устойчива относительно малых возмущений локальными операторами вида $|u_\alpha|^2 |u_\beta|^2$ ($d = 3$, $N = 1$) в силу известного критерия Харриса [22]. В частности, «замороженные» немагнитные примеси типа «случайная температура» не влияют на свойства СП.

Коротко обсудим свойства системы ниже линии $H_{c2}(T)$. В упорядоченной фазе термодинамические средние компонент параметра порядка $\langle u_\alpha^a(x)\rangle$ принимают постоянные значения, так как эффективная континуальная теория трансляционно-инвариантна. Согласно уравнениям (23) и (27), пространственно однородному упорядочению в модели (26) соответствует неоднородное периодическое упорядочение в исходной системе (12), представляющее собой регулярную вихревую сверхрешетку, соизмеримую с кристаллической решеткой и пиннингованную на ней. Таким образом, модифицированная теория ГЛ (12) дает согласованное описание фазового перехода в смешенное состояние.

3. Обсуждение результатов

В рамках $(1/N)$-разложения было показано, что флуктуации параметра порядка действительно разрушают фазовую когерентность ниже T_c при $d < 4$, что не противоречит известным результатам. Дискретная кристаллическая трансляционная симметрия восстанавливает перенормируемость теории и непрерывный фазовый переход, в результате которого ниже линии $H_{c2}(T)$ образуется абрикосовская вихревая решетка, соизмеримая для рациональных f с кристаллической решеткой. Метод $(1/N)$-разложения позволяет до конца исследовать как стандартную теорию ГЛ, так и решеточную модель для произвольных рациональных значений фрустации f. Термодинамические свойства системы в окрестности $H_{c2}(T)$ являются универсальными и такими же, как у СП в нулевом магнитном поле.

Обсудим вопрос о применимости полученных результатов при $N = 1$. Хорошо известно, что приближение больших N не всегда справедливо. В частности, это относится к $2D$ $SU(N)$-инвариантной модели Тирринга [23] и $2D$ $O(N)$-симметричной сигма-модели для $N = 2$, описывающей переход Костерлитца–Таулесса. В случае же СП в магнитном поле полученные с его помощью результаты согласуются с результатами ренормгруппового анализа для $N = 1$ и малых q. Весьма существенно, что в пределе больших N отсутствует непертурбативная седловая точка, имеющаяся, согласно [24,25], в непрерывной модели ГЛ с $N = 1$. Она отвечает за фазовый переход без ODLRO при температуре, превышающей температуру сверхпроводящего фазового перехода [24,25]. Ясно, что в рамках $(1/N)$-разложения нельзя сделать никакого вывода о существовании нетривиальной седловой точки при $N = 1$. Таким образом, этот вопрос остается открытый.

В заключение укажем, что в низшем приближении по параметру $1/N$ флуктуации внутреннего магнитного поля в СП [26,27] не восстанавливают ODLRO в непрерывной модели и не меняют критическое поведение решеточной теории, что согласуется с результатами численных расчетов методом Монте–Карло [28].

Авторы глубоко признательны А.И. Соколову за многочисленные обсуждения и ценные замечания. Нам приятно также поблагодарить С.Н. Дороговцева за полезные дискуссии.

Работа одного из авторов (Б.Н.Ш.) была частично поддержана грантом фонда Сороса, присужденным Американским физическим обществом.

Список литературы

[1] Rasolt M., Tesanovich Z. // Rev. Mod. Phys. 1992. V. 64. P. 709.
[2] Ruggeri G.J., Thouless D.J. // J. Phys. F. 1976. V. 6. P. 1063.
[3] Ikeda R., Ohmi T., Tsuneto T. // J.Phys. Soc. Jap. 1990. V. 59. P. 1397.
[4] Микитик Г.П. // ЖЭТФ. 1992. Т. 101. С. 1042.
[5] Brezin E., Nelson D.R., Thiaville A. // Phys. Rev. B. 1985. V. 31. P. 7124.
[6] Mermin N., Wagner H. // Phys. Rev. Lett. 1966. V. 17. P. 113.
[7] Moore M.A. // Phys. Rev. B. 1989. V. 39. P. 136.
[8] Moore M.A. // Phys. Rev. B. 1992. V. 45. P. 7336.
[9] Choi M.Y., Doniach S. // Phys. Rev. B. 1985. V. 31. P. 4516.
[10] Zinn-Justin J. // Nucl. Phys. B. 1991. V. 367. P. 105.
[11] Zinn-Justin J. Quantum field theory and critical phenomena. Oxford: Clarendon Press, 1989. 960 p.
[12] Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 382 с.
[13] Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976. 256 с.
[14] Ktitorov S.A., Petrov Yu.V., Shalaev B.N., Sherstinov V.S. // Int. J. Mod. Phys. B. 1992. V. 6. P. 1209.
[15] Harper P.G. // Proc. Phys. Soc. Lond. A. 1955. V. 68. P. 874.
[16] Granato E., Kosterlitz J.M. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 1267.
[17] Воловик Г.Е., Горьков Л.П. // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. С. 1412.
[18] Kumar P., Wolfle P. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 1954.
[19] Антоненко С.А., Соколов А.И., Шалаев Б.Н. // ФТТ. 1991. Т. 33. С. 1447.
[20] Mayer I.O. // J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 2815.
[21] Le Giullou J.C., Zinn–Justin J. // Phys. Rev. B. 1980. V. 21. P. 20.
[22] Harris A.B. // J. Phys. C. 1974. V. 7. P. 1671.
[23] Dashen R., Frishman Y. // Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 2781.
[24] Tesanovic Z., Xing L. // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 2729.
[25] Tesanovic Z. // Phys. Rev. B. 1991. V. 44. P. 12635.
[26] Halperin B.I., Luvensky T.C., Ma S.-K. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32 P. 292.
[27] Kolnberger S., Folk R. // Phys. Rev. B. 1990. V. 41. P. 4083.
[28] Dasgupta C., Halperin B.I. // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 32. P. 292.