Дуальные симметрии и универсальность критического поведения неупорядоченного изинговского ферромагнетика

© Б.Н. Шалаев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: shalaev@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 24 марта 2009 г.)

Рассматривается критическое поведение d-мерного изинговского случайного ферромагнетика, который в критической области описывается моделью Гинзбурга–Ландау со случайной температурой. Методом ренормализационной группы вычислены критические температурные зависимости термодинамических величин, уравнение состояния и спиновая корреляционная функция в точке Кюри. Самыми глубокими вопросами теории примесных ферромагнетиков являются проблема универсальности и роль сингулярностей Гриффица.

1. Введение

Критические явления в теории неупорядоченных спиновых систем интенсивно изучаются около 40 лет [1–5]. Чистые кристаллы являются скорее исключением из правила, поскольку примеси обычно всегда присутствуют в системе. В настоящее время хорошо известно, что даже небольшое количество дефектов может радикально изменить критическое поведение модели. Несмотря на большие усилия теоретиков, эта проблема остается очень сложным и малопонятным явлением. Хорошо развитый теоретико-полевой метод ренормгруппы (РГ), основанный на обычной модели ϕ^4 и методе $(4-\varepsilon)$-разложения [1], впервые применялся для изучения неупорядоченных систем в работах Харриса и Любенского [6,7], а также Хмельницкого [8]. В начале 80-х годов прошлого века братья Доценко [2,4] стимулировали значительный прогресс в изучении двумерной модели Изинга со случайными связями. Они установили эквивалентность данной модели и фермионной модели Гросса–Неве в репличном пределе $n = 0$ и для небольшой концентрации дефектов получили формулу для теплоемкости $C \sim \ln\ln\tau$, где $\tau = \frac{T-T_c}{T_c}$ — приведенное отклонение от критической температуры. Однако их результаты относительно асимптотики спиновой корреляционной функции на больших расстояниях, термодинамических величин в критической области и уравнения состояния в точке Кюри были подвергнуты сомнению в работах автора [9], Шанкара [10] и Людвига [11]. Используя метод РГ и технику бозонизации, эти авторы показали, что спиновая корреляционная функция в точке перехода ведет себя так же, как и в чистой системе (см. также [12]), а критическое поведение термодинамических величин описывается онсагеровскими критическими индексами, модифицированными медленно меняющимися логарифмическими множителями.

2. Спиновая корреляционная функция. Дуальность

Гамильтониан модели Изинга (МИ) со случайными связями на квадратной решетке с периодическими граничными условиями имеет вид

$$H = -\sum_{i=1,\,j=1}^{N}\left[J_1(i,j)s_{ij}s_{ij+1} + J_2(i,j)s_{ij}s_{i+1j}\right], \qquad (1)$$

где i, j обозначают индексы на квадратной решетке, $s_{ij} = \pm 1$ — спиновые переменные, $J_1(i,j)$ и $J_2(i,j)$ являются горизонтальными и вертикальными случайными связями, функция распределения которых имеет вид

$$P(x) = (1-p)\delta(x-J) + p\delta(x-J'). \qquad (2)$$

Здесь p — концентрация примесных связей, причем J и J' являются положительными; это гамильтониан случайного ферромагнетика. Заметим, что антиферромагнитные связи, создающие фрастрации и разорванные связи, приводящие к двусмысленности в определении матрицы перехода, исключены из настоящего рассмотрения. Статистическая сумма системы имеет вид

$$Z = \sum \exp\left(-\frac{H}{T}\right), \qquad (3)$$

где гамильтониан H определен в (1), а сумма пробегает по всем 2^{N^2} возможным спиновым конфигурациям. Статистическая сумма является следом произведения матриц перехода $\hat{T}_i$ [13,14]. Ключевым фактом для нашего рассмотрения является то, что матрица перехода модели Изинга со случайными связями является самодуальной при $p = 0.5$ [15]! Как обычно, используется метод реплик, где n — число одинаковых реплик первоначальной модели. Каждая реплика имеет индекс α, $\alpha = 1, \ldots, n$, для вычисления средней свободной энергии применяется элементарное тождество

$$\bar{F} = -T\overline{\ln Z} = -T \lim_{n\to 0} \frac{1}{n}\overline{(Z^n - 1)}. \tag{4}$$

Отметим, что вблизи точки Кюри T_c радиус корреляции ξ приближается к бесконечности и поэтому можно упростить исходный гамильтониан, произведя предельный переход $a_x \to 0$. В результате простых, но громоздких вычислений получаем $0(n)$-симметричный лагранжиан модели Гросса–Неве (ГН) [2]

$$L = \int d^2x \left[i\bar{\psi}_a \hat{\partial}\psi_a + m_0\bar{\psi}_a\psi_a + u_0(\bar{\psi}_a\psi_a)^2 \right], \tag{5}$$

где $\gamma_\mu = \sigma_\mu$, $\hat{\partial} = \gamma_\mu\partial_\mu$, $\mu = 1, 2$, $\bar{\psi} = \psi^T\gamma_0$ и

$$m_0 \sim \tau = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad u_0 \sim p. \tag{6}$$

Здесь m_0, u_0 являются затравочными массой и константой связи соответственно. Заметим, что, если $p \ll 1$, $u_0 \sim p$. При концентрации дефектов $p = 0.5$ и $T = T_c$ имеем $u_0 \sim (J - J')^2$. Однопетлевые вычисления в модели ГН, которая является инфракрасно-свободной, правильно описывают критическое поведение рассматриваемой системы, и уравнения РГ имеют вид

$$\frac{du}{dt} = \beta(u) = -\frac{(n-2)u^2}{\pi},$$

$$\frac{d\ln F}{dt} = -\gamma_{\bar{\psi}\psi}(u) = \frac{(1-n)u}{\pi}, \tag{7}$$

$$u(t=0) = u_0, \quad F(t=0) = 1, \tag{8}$$

где u — безразмерная константа связи,

$$\gamma_{\bar{\psi}\psi}(u)$$

— аномальная размерность составного оператора $\bar{\psi}_a\psi_a$, который является оператором плотности энергии $\varepsilon(x)$. Здесь $t = \ln\frac{\Lambda}{m}$, $\Lambda = \frac{1}{a}$ есть ультрафиолетовое обрезание, a и m являются постоянной решетки и перенормированной массой. Здесь F — функция Грина со вставкой нулевого внешнего импульса

$$F = \frac{dm}{d\tau} = \int d^2x d^2y \langle \bar{\psi}(x)\psi(y)\bar{\psi}(0)\psi(0)\rangle. \tag{9}$$

Решения этих уравнений позволяют найти температурные зависимости корреляционного радиуса ξ и теплоемкости C в асимптотической области $t \to \infty$, $n = 0$ [2]

$$u = \frac{\pi}{2t}, \quad F \sim t^{-\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

$$\xi = m^{-1} \sim \tau^{-1}\left[\ln\frac{1}{\tau}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

$$C \sim \int dt\, F(t)^2 \sim \ln\ln\frac{1}{\tau}. \tag{12}$$

Таким образом, критическое поведение примесной МИ описывается изинговской фиксированной точкой, что подтверждается большим количеством численных расчетов [16].

МИ обладает дуальными свойствами в размерностях $d = 2, 3, 4$ [17]. Двумерная система является самодуальной, т.е. исходная модель может быть переписана на дуальной решетке, но с другой температурой T^*

$$\mathrm{th}\left(\frac{J}{T^*}\right) = \exp\left(-\frac{2J}{T}\right). \tag{13}$$

Замечательно, что в специальном случае половинной концентрации примесных связей $p = 0.5$ дуальность накладывает сильные ограничения, в частности, на величину температуры Кюри T_c случайного ферромагнетика, которая является единственной [15]! Дуальность отражает глубокие свойства симметрии МИ [17] (см. также [3]). Температура Кюри находится из уравнения дуальности (13).

3. Критические восприимчивость и намагниченность

Для вычисления температурных зависимостей восприимчивости, спиновой корреляционной функции (КФ) и уравнения состояния в точке перехода T_c в 2D МИ наиболее эффективным методом является бозонизация.

Лагранжиан случайной МИ имеет вид

$$L = \int d^2x \left\{ i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi + \left[m_0 + \tau(x)\right]\bar{\psi}\psi \right\}, \tag{14}$$

где ψ — майорановский спинор, а $\tau(x)$ — случайное гауссово поле

$$P[\tau(x)] \sim \exp\left\{-\frac{1}{2u_0}\int d^2x[\tau(x)]^2\right\},$$

$$\langle \tau(x)\tau(y)\rangle = u_0\delta(x-y). \tag{15}$$

Фактически действие (14) описывает свободные фермионы, движущиеся в случайном поле $\tau(x)$, которое соответствует локальным флуктуациям критической температуры T_c случайного ферромагнетика. После применения метода реплик и интегрирования по „всем возможным“ конфигурациям поля $\tau(x)$ мы получаем модель ГН (5). Технически удобнее вычислять квадрат спиновой КФ, используя дираковские спинорные поля [18]

$$G(x-y) = \langle \sigma(x)\sigma(y)\rangle. \tag{16}$$

В итоге имеем континуальный интеграл по бозонному полю ϕ квантовой модели синус-гордон [19]

$$G(x-y)^2 = Z^{-1}\frac{1}{2\pi^2a^2}\int D\phi \sin\left(\sqrt{4\pi}\phi(x)\right)$$

$$\times \sin\left(\sqrt{4\pi}\phi(y)\right)\exp\{-S\}, \tag{17}$$

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x\left\{(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{2m_0}{\pi a}\cos(\sqrt{4\pi}\phi)\right\}, \tag{18}$$

$$Z = \int D\phi \exp\{-S\}. \qquad (19)$$

В точке перехода $m_0 = 0$ континуальный интеграл становится гауссовым, и безмассовая КФ легко вычисляется с помощью абелевой аномалии

$$G(x-y) \sim |x-y|^{-\frac{1}{4}} \qquad (20)$$

(см. [19,20]). Температурные зависимости однородной восприимчивости и намагниченности имеют вид

$$\chi \sim \xi^{2-\eta} \sim \tau^{-\frac{7}{4}} \left[\ln \frac{1}{\tau}\right]^{\frac{7}{8}}, \qquad (21)$$

$$M \sim \xi^{\frac{\eta}{2}} \sim (-\tau)^{\frac{1}{8}} \left[\ln \frac{1}{-\tau}\right]^{\frac{1}{16}}. \qquad (22)$$

Уравнение состояния в точке перехода имеет такой же вид, как и у Онсагера,

$$H \sim M^{\frac{4+\eta}{\eta}} \sim M^{15}. \qquad (23)$$

Как было отмечено выше, все критические индексы примесной МИ совпадают с онсагеровскими с логарифмическими множителями (см. также [21,22]).

4. Критические индексы d-мерной системы

Гамильтониан Гинзбурга–Ландау для d-мерной модели Изинга имеет обычный вид

$$H = \int d^d x \left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 + \frac{1}{8} u_0 (\phi^2)^2\right\}, \qquad (24)$$

где ϕ — $n \to 0$-компонентный параметр порядка, $m_0^2 \sim \tau$, $0 < u_0$.

Методом РГ [1] были получены асимптотические пятипетлевые разложения для критических индексов, вычислены критические индексы [23]. Однако оказалось, что они в отличие от чистых кристаллов не являются знакопеременными и, по-видимому, несуммированы по Борелю.

В трехмерной МИ с замороженным беспорядком имеющиеся теоретические результаты и численные расчеты методом Монте-Карло (МС) показывают, что изинговская фиксированная точка является устойчивой [5,23], а значения критических индексов близки к современным оценками [5]. Интересно, что эту точку зрения поддерживают и другие МС-результаты, полученные исследователями из Франции, Англии и Германии [24] и группой итальянских физиков [25]. Фазовый переход принадлежит классу универсальности трехмерной МИ со случайными связями со следующими критическими индексами:

$$\nu = 0.682(3); \quad \eta = 0.036(1), \qquad (25)$$

что находится в согласии с известными оценками [5].

5. Сингулярности Гриффица

Несмотря на значительные успехи в исследовании критических явлений в примесных системах, многие эксперты относятся к ним довольно скептически. Основная причина заключается в том, что они получены в рамках обычной теории возмущений, которая не может принять во внимание непертурбативные эффекты, в частности сингулярности Гриффица [26].

Сама проблема сингулярностей Гриффица фактически возникла из теоремы Ли и Янга, посвященной теории фазовых переходов [27]. Они показали, что в случае МИ все нули большой функции распределения Z как функции активности $z = \exp\left(i\,\frac{\mu}{T}\right)$ в термодинамическом пределе расположены в комплексной плоскости на окружности единичного радиуса. Статистическая сумма $Z(h)$ как функция внешнего магнитного поля имеет непрерывное распределение нулей на мнимой оси комплексного параметра $h = x + iy$. В парамагнитной фазе это распределение начинается на некотором расстоянии δy от мнимой оси, поэтому свободная энергия является аналитической функцией вещественного магнитного поля h. Когда температура приближается сверху к точке перехода $T \to T_c + 0$, указанное расстояние δy сжимается до нуля, поэтому распределение нулей касается реальной оси в точке Кюри. Таким образом, свободная энергия перестает быть аналитической функцией h.

Основная идея Гриффица состоит в том, что в случайном ферромагнетике выше точки ферромагнитного перехода всегда имеется конечная вероятность найти произвольно большой ферромагнитный кластер. Благодаря этому намагниченность оказывается неаналитической функцией внешнего магнитного поля, что является строгой математической теоремой. Данное состояние случайного ферромагнетика не является чисто парамагнитным и называется фазой Гриффица. Сингулярные (экспоненциально малые) поправки действительно обнаружены в некоторых случайных системах в высокотемпературной фазе между полностью разупорядоченным парамагнетиком и магнитоупорядоченным состоянием [28,29]. В частности, это проявляется в существенных отклонениях от обычных скейлинговых соотношений [29]. В стандартном теоретико-полевом подходе фаза Гриффица, по-видимому, исключена из области, где имеет место реальный фазовый переход [30–31].

6. Заключение

Ключевой вопрос теории неупорядоченных систем состоит в том, является ли критическое поведение примесных ферромагнетиков универсальным.

В настоящее время полный ответ на него отсутствует. Известно только, что критическое поведение многих изинговских ферромагнетиков с замороженным беспорядком описывается изинговской фиксированной точкой, причем, согласно РГ и численным расчетам, это верно для двух и, что более удивительно, даже для трех измерений. В случае $d = 2$ универсальность критического поведения, по-видимому, обеспечивает дуальная симметрия Крамерса–Ваннье при $p = 0.5$.

Автор признателен сотрудникам физического факультета Университета г. Авейро, где была выполнена значительная часть работы, за приглашение, гостеприимство и поддержку, очень благодарен А.И. Соколову (ЛЭТИ), W. Janke (Leipzig), G. Jug (Como), F. Mendes (Aveiro), коллегам из ФТИ С.А. Ктиторову, А.В. Гольцеву, С.Н. Дороговцеву и А.Н. Самухину за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

[1] J. Zinn-Justin. Quantum field theory and critical phenomena. Clarendon Press, Oxford (1999). 1008 p.
[2] Vl.S. Dotsenko, Vik.S. Dotsenko. Adv. Phys. **32**, 129 (1983).
[3] B.N. Shalaev. Phys. Rep. **237**, 129 (1994).
[4] Вик.С. Доценко. УФН **165**, 481 (1995).
[5] Р. Фольк, Ю. Головач, Т. Яворский. УФН **173**, 175 (2003).
[6] A.B. Harris. J. Phys. C **7**, 1671 (1974).
[7] A.B. Harris, T.C. Lubensky. Phys. Rev. Lett. **33**, 1540 (1974).
[8] Д.Е. Хмельницкий. ЖЭТФ **68**, 1960 (1975).
[9] Б.Н. Шалаев. ФТТ **26**, 1811 (1984).
[10] R. Shankar. Phys. Rev. Lett. **58**, 2466 (1987).
[11] A.W.W. Ludwig. Phys. Rev. Lett. **61**, 2388 (1988).
[12] G. Jug. Phys. Rev. B **27**, 609 (1983).
[13] R.J. Baxter. Exactly solved models in statistical mechanics. Academic Press, London (1982). 486 p.
[14] J.B. Kogut. Rev. Mod. Phys. **51**, 659 (1979).
[15] R. Fisch. J. Stat. Phys. **18**, 111 (1978).
[16] J.-S. Wang, W. Selke, Vl.S. Dotsenko, V.B. Andreichenko. Nucl. Phys. B **344**, 531 (1990); J.-S. Wang, W. Selke, Vl.S. Dotsenko, V.B. Andreichenko. Physica A **164**, 221 (1990); J.-S. Wang, W. Selke, Vl.S. Dotsenko, V.B. Andreichenko. Europhys. Lett. **11**, 301 (1990); L.N. Schur, A.L. Talapov. Europhys. Lett. **27**, 193 (1994); S. Wiseman, E. Domany. Phys. Rev. E **51**, 3074 (1995).
[17] G. t'Hooft. On pecularities and pit falls in path integrals; hep-th/0208054.
[18] J.-B. Zuber, C. Itzykson. Phys. Rev. D **15**, 2875 (1977).
[19] C. Itzykson, J.-M. Drouffe. Statistical field theory. Cambridge University Press, Cambridge (1989). V. 2. 442 p.
[20] Б.Н. Шалаев. ФТТ **31**, 51 (1989).
[21] R. Kenna, D.A. Johnston, W. Janke. Phys. Rev. Lett. **96**, 115 701 (2006).
[22] R. Kenna, D.A. Johnston, W. Janke. Phys. Rev. Lett. **97**, 155 702 (2006); Erratum: ibid. **97**, 169 901 (E) (2006).
[23] B.N. Shalaev, S.A. Antonenko, A.I. Sokolov. Phys. Lett. A **230**, **1**–**2**, 105 (1997).
[24] P.-E. Berche, C. Chatelain, B. Berche, W. Janke. Eur. Phys. J. B **38**, 463 (2004).
[25] M. Hasenbusch, F.P. Toldin, A. Pelissetto, E. Vicari. The 3D $\pm J$ Ising model at the ferromagnetic transition line; Cond-mat/0407.0427.
[26] R.B. Griffiths. Phys. Rev. Lett. **23**, 17 (1969).
[27] B.M. McCoy. The connection between statistical mechanics and quantum field theory; hep-th/9403084.
[28] T.D. Lee, C.N. Yang. Phys. Rev. **87**, 410 (1952).
[29] Vik.S. Dotsenko. Cond-mat/0505233.
[30] V.S. Dotsenko. J. Phys. A **32**, 2949 (1999); J. Stat. Phys. **122**, 197 (2006).
[31] P.Y. Chan, N. Goldenfeld, M. Salamon. Phys. Rev. Lett. **97**, 137 201 (2006).
[32] J. Deisenhofer, D. Baraak, H.-A. Krug von Nidda, J. Hemberger, R.M. Eremina, V.A. Ivanshin, A.M. Balbashov, G. Jug, A. Loidl, T. Kimura, Y. Tokura. Phys. Rev. Lett. **95**, 257 202 (2005).