УДК 539.144.43

СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НАМАГНИЧЕННОСТИ В ЯДЕРНЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ С ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Н.П.Гиоргадзе, Р.Р.Хомерики

Институт физики АН Грузии, Тбилиси
(Поступила в Редакцию 31 мая 1994 г.)

Рассмотрены одномерные слобонелинейные длинноволновые возмущения намагниченности в ядерной спиновой системе с диполь-дипольным взаимодействием, помещенной в сильное (по сравнению с локальным) магнитное поле и охлажденной до сверхнизких температур. Вычислен нелинейный член нелинейного уравнения Шредингера, описывающего в соответствии с результатами общей теории временную эволюцию этих возмущений. Установлено, что линеаризованные ядерные спиновые волны, присущие вышеупомянутой спин-системе, модуляционно неустойчивы в области длинных волн. Получены выражения для параметров динамического солитона ядерной намагниченности (сдвигов частоты и групповой скорости и ширины), существование которого в рассматриваемых условиях допускается нелинейным уравнением Шредингера. Из этих выражений следует, что групповая скорость и дисперсионная часть частоты солитона несколько меньше групповой скорости и дисперсионной части соответствующей спиновой волны, а ширина солитона пропорциональна длине волны и не зависит от направления его распространения.

1. В [1] предложено спин-волновое описание ядерной спиновой системы (ЯСС) с диполь-дипольным взаимодействием, помещенной в сильное (по сравнению с локальным) магнитное поле и охлажденной до сверхнизких температур. Показано, что ширина спектра спиновых волн по порядку величины совпадает с локальной частотой $\omega_d \cong 3\gamma^2\hbar/(2a^3)$ (γ — гиромагнитное отношение ядер, a — параметр решетки), а время жизни магнона определяется выражением $\tau \cong [\omega_d(1-p)]^{-1}$ ($p = \mathrm{th}[\hbar\omega_I/(2kT)]$ — поляризация ядер, $\omega_I = \gamma H_0$ — зеемановская частота, T — спиновая температура, $I = 1/2$). Существование спиновых волн подразумевает выполнение условия $\omega_d\tau \gg 1$, сводящегося к неравенству $1-p \ll 1$. Отсюда следует, что (в зависимости от величины внешнего поля) спиновые волны в рассматриваемой системе могут возникать в широком диапазоне температур, как в упорядоченной ферромагнитно, так и в парамагнитной фазе (заметим, что температура фазового перехода из парамагнитного в магнитоупорядоченное состояние составляет порядка 10^{-6} K).

В вышеупомянутой работе, посвященной главным образом вопросам насыщения ЯМР при сверхнизких температурах, исследование спиновых волн ограничено линейным приближением. В настоящей работе будут рассмотрены слабонелинейные длинноволновые возмущения намагниченности в ЯСС с диполь-дипольным взаимодействием, помещенной в сильное магнитное поле и охлажденной до сверхнизких температур. Будет показано, что во всяком случае длинноволновая часть спектра спиновых волн модуляционно неустойчива и что в этой области могут (в принципе) возникать солитоны ядерной намагниченности.

2. Гамильтониан ЯСС с диполь-дипольным взаимодействием, помещенной в постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, ориентированное вдоль оси z, имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_z + \mathcal{H}_d^{(s)}, \qquad (1)$$

где

$$\mathcal{H}_z = -\hbar\omega_I \sum_i I_i^z$$

— зеемановская энергия спин-системы,

$$\mathcal{H}_d^{(s)} = \sum_{i\neq j} A_{ij}\left(2I_i^z I_j^z - I_i^x I_j^x - I_i^y I_j^y\right)$$

— секулярная часть гамильтониана диполь-дипольного взаимодействия,

$$A_{ij} = \frac{(\hbar\gamma)^2}{4r_{ij}^3}(1 - 3\cos^2\theta_{ij}),$$

$r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i-го узла решетки, θ_{ij} — угол между осью z и $\mathbf{r}_{ij}$.

Как и в работе [1], ограничимся случаем простой кубической решетки и взаимодействием между ближайшими (шестью) соседями. Далее рассмотрим лишь длинноволновые слабонелинейные возмущения, характерные пространственные масштабы которых значительно превосходят параметр решетки. В этих условиях допустимо классическое (континуальное) описание рассматриваемой спин-системы, переход к которому полностью аналогичен подробно изложенному в монографии [2]. Заменяя спиновой оператор $\mathbf{S}_i$ классическим вектором $\mathbf{S}(\mathbf{r}_i)$, используя разложение

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}_j) \simeq \mathbf{S}(\mathbf{r}_i) - r_{ij}^\alpha \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial r_i^\alpha} + \frac{1}{2} r_{ij}^\alpha r_{ij}^\beta \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial r_i^\alpha \partial r_i^\beta} + \ldots,$$

проводя суммирование по ближайшим соседям, переходя от суммирования по узлам решетки к интегрированию по объему образца V согласно правилу $\sum\limits_i \to \int dV/a^3$ и, наконец, вводя ядерную намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \hbar\gamma\mathbf{S}(\mathbf{r})/a^3$, для классической плотности энергии ядерной спин-системы будем иметь

$$W = -H_0 M_z - \frac{1}{2}a^2\left[(\nabla_\alpha M_z)^2 - 3(\nabla_z M_z)^2\right] +$$
$$+\frac{1}{4}a^2\left[(\nabla_\alpha M_x)^2 - 3(\nabla_z M_x)^2\right] + \frac{1}{4}a^2\left[(\nabla_\alpha M_y)^2 - 3(\nabla_z M_y)^2\right]. \qquad (2)$$

Мы можем теперь исходить из макроскопического уравнения движения для ядерной намагниченности, имеющего вид [3]

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma[\mathbf{M}, \mathbf{H}^{(\mathrm{ef})}], \tag{3}$$

где

$$H_\alpha^{(\mathrm{ef})} = -\frac{\partial W}{\partial M_\alpha} + \frac{\partial}{\partial r_\beta}\left[\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial M_\alpha}{\partial r_\beta}}\right]$$

— эффективное магнитное поле. Статическое решение этого уравнения дается выражением $\mathbf{M}_0 = M_0\mathbf{e}_z$, где M_0 — величина намагниченности, остающаяся в процессе движения постоянной, а $\mathbf{e}_\alpha$ — орт оси α. Динамическая же часть намагниченности, $\delta\mathbf{M}$, описывается вытекающим из (3) уравнением

$$\frac{\partial\delta\mathbf{M}}{\partial t} + \omega_I[\mathbf{e}_z, \delta\mathbf{M}] - \frac{1}{2}\gamma M_0 a^2\Delta'(\delta M_x\mathbf{e}_y - \delta M_y\mathbf{e}_x) = \delta\boldsymbol{\varphi}, \tag{4}$$

где

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = [\delta\mathbf{M}, \delta\mathbf{H}^{(\mathrm{ef})}], \tag{5}$$

$$\delta H_x^{(\mathrm{ef})} = \frac{1}{2}a^2\Delta'\delta M_x, \quad \delta H_y^{(\mathrm{ef})} = \frac{1}{2}a^2\Delta'\delta M_y, \quad \delta H_z^{(\mathrm{ef})} = -a^2\Delta'\delta M_z, \tag{6}$$

$\Delta' = \Delta - 3(\partial^2/\partial z^2)$, Δ — оператор Лапласа.

Нетрудно видеть, что линеаризованная система уравнений (4) допускает существование ядерных спиновых волн, дисперсия которых дается выражением[1]

$$\omega_n(k) = \omega_I + \frac{1}{2}\gamma M_0(ak)^2(1 - 3\cos^2\theta_k), \tag{7}$$

где θ_k — угол между осью z и вектором $\mathbf{k}$. Естественно, оно совпадает с длинноволновым пределом спектра ядерных спиновых волн, вычисленным в [1].

Из выражения (7) следует, что при распространении плоской волны под углом $\theta_c = \pm\arccos(1/\sqrt{3})$ дисперсионная часть частоты обращается в нуль. Согласно выражению (2), это является следствием обращения в нуль плотности энергии диполь-дипольного взаимодействия (вычисленной в старшем по нелинейности приближении) в возмущении намагниченности, представляющем собой распространяющуюся под углом θ_c плоскую волну. Это означает, что для исследования волн намагниченности, распространяющихся под углом θ_c, в разложении $\mathbf{S}(\mathbf{r}_i)$ и далее W следует учесть последующие члены. В настоящей работе мы не будем касаться этого вопроса, в связи с чем всюду в дальнейшем будем исключать из рассмотрения возмущения, распространяющиеся под близкими к θ_c углами.

---

[1] Напомним, что $(ak)^2 \ll 1$, вследствие чего дисперсионная часть частоты всегда мала по сравнению с однородной частью.

3. Из выражения (7) для спектра спиновых волн следует, что слабонелинейные возмущения намагниченности в рассматриваемой спиновой системе должны описываться нелинейным уравнением Шредингера [4]. Принимая это обстоятельство во внимание, слабонелинейное одномерное (вдоль направления $\mathbf{k}$) модулированное решение уравнения (4) будем искать в виде [4]

$$\delta\mathbf{M}(\mathbf{r},t)\sum_{\alpha=1}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}\sum_{l=-\infty}^{\infty}U_l^{(\alpha)}(\rho,\tau)e^{il(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{8}$$

где плавная координата ρ, отмеряемая по оси, направленной вдоль $\mathbf{k}$, и медленное время τ даются выражениями

$$\rho=\varepsilon(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}-V_g t), \quad \tau=\varepsilon^2 t,$$

ε — малый параметр, связанный с малостью амплитуды возмущения, V_g — произвольная константа, $\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{k}/k$, при этом имеет место соотношение $(\mathbf{U}_l^{(\alpha)})^*=\mathbf{U}_{-l}^{(\alpha)}$.

Подставляя (8) в (4), собирая члены одного порядка по ε и приравнивая (при заданном порядке по ε) к нулю коэффициенты при различных фазовых множителях, получим цепочку уравнений, позволяющую определить распространяющееся в направлении $\mathbf{k}$ слабонелинейное модулированное возмущение,[2] в линейном пределе переходящее в плоскую волну с волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой ω.

В первом по ε приближении в предположении, что единственно отличной от нуля амплитудой является амплитуда с $l=1$ (и сопряженная ей), приходим к результатам линейной теории, сводящимся к закону дисперсии (7) и соотношениям между амплитудами линейного приближения[3]

$$U_{z1}^{(1)}\equiv 0, \quad U_{y1}^{(1)}\equiv -iU_{x1}^{(1)}, \quad U_{x1}^{(1)} \text{ — произвольно}, \tag{9}$$

Далее из уравнений второго по ε приближения достаточно выписать одно, отвечающее случаю $l=1$, имеющее вид

$$-i\omega U_1^{(2)}+\omega_I\left[e_z U_1^{(2)}\right]+\frac{1}{2}\gamma M_0(ak)^2(1-3\cos^2\theta_k)\left(U_{x1}^{(2)}e_y-U_{y1}^{(2)}e_x\right)=$$

$$=V_g\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial\rho}+i\gamma M_0(ak)^2(1-3\cos^2\theta_k)\left(\frac{\partial U_{x1}^{(1)}}{\partial\rho}e_y-\frac{\partial U_{y1}^{(1)}}{\partial\rho}e_x\right). \tag{10}$$

Оно представляет собой систему алгебраических линейных неоднородных уравнений для амплитуд $U_1^{(2)}$. Поскольку детерминант системы равен нулю необходимым условием существования решения является

$$\left(V_g-\gamma M_0(ak)^2(1-3\cos^2\theta_k)\right)\frac{\partial U_{x1}^{(1)}}{\partial\rho}=0. \tag{11}$$

---

[2] Детали вычислений могут быть найдены в цитированной работе [4], а также в работах [5,6].

[3] Здесь учтено, что, согласно соотношению (7), $\omega\equiv\omega_n(k)$.

Отсюда следует, что модулированное решение (для которого $\partial U_{x1}^{(1)}/\partial\rho$) может существовать лишь при условии

$$V_g = \gamma M_0 (ak)^2 (1 - 3\cos^2\theta_k) \equiv \varkappa \frac{\partial\omega}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial\omega}{\partial k}. \qquad (12)$$

Таким образом, в качестве произвольной константы V_g следует брать проекцию групповой скорости линеаризованной спиновой волны на направление $\mathbf{k}$. При этом решение системы уравнений (10) имеет вид

$$U_{z1}^{(2)} \equiv 0, \quad U_{y1}^{(2)} \equiv -iU_{x1}^{(2)}, \quad U_{x1}^{(2)} \text{ – произвольно.} \qquad (13)$$

Остается еще вычислить возникающие во втором приближении гармоники. В этих целях удобнее, однако, использовать условие сохранения величины намагниченности, $|\mathbf{M}|^2 = M_0^2$, из которого следует

$$\delta M_z = -\frac{1}{2M_0}\left(\delta M_x^2 + \delta M_y^2 + \delta M_z^2\right).$$

Отсюда для единственно отличной от нуля гармоники с $l = 0$ находим

$$U_{z0}^{(2)} = -2\left|U_{x1}^{(1)}\right|^2 / M_0. \qquad (14)$$

Перейдем теперь к третьему по ε приближению. Здесь также достаточно рассмотреть лишь уравнение для гармоники $l = 1$, имеющее вид

$$-i\omega \mathbf{U}_1^{(3)} + \omega_I \left[\mathbf{e}_z, \mathbf{U}_1^{(3)}\right] + \frac{1}{2}\gamma M_0 (ak)^2 (1 - \cos^2\theta_k)\left(U_{x1}^{(3)}\mathbf{e}_y - U_{y1}^{(3)}\mathbf{e}_x\right) =$$
$$= \left(V_g \frac{\partial \mathbf{U}_1^{(2)}}{\partial\rho} + i\gamma M_0 (a^2 k)(1 - 3\cos^2\theta_k)\frac{\partial U_{x1}^{(1)}}{\partial\rho}(\mathbf{e}_y + i\mathbf{e}_x)\right) +$$
$$+ \left(-\frac{\partial \mathbf{U}_1^{(1)}}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\gamma M_0 a^2 (1 - 3\cos^2\theta_k)\frac{\partial^2 U_{x1}^{(1)}}{\partial\rho^2}(\mathbf{e}_y + i\mathbf{e}_x)\right) + \mathbf{P}_1^{(3)}, \qquad (15)$$

где

$$P_{x1}^{(3)} = -\gamma (ak)^2 (1 - \cos^2\theta_k)\frac{\left|U_{x1}^{(1)}\right|^2}{M_0} U_{x1}^{(1)},$$

$$P_{y1}^{(3)} = i\gamma (ak)^2 (1 - \cos^2\theta_k)\frac{\left|U_{x1}^{(1)}\right|^2}{M_0} U_{x1}^{(1)}, \quad P_{z1}^{(3)} = 0.$$

Отсюда следует, что $U_{z1}^{(3)} = 0$, а алгебраическая система линейных неоднородных уравнений для амплитуд $U_{x1}^{(3)}$ и $U_{y1}^{(3)}$ оказывается разрешимой лишь при выполнении соответствующего необходимого условия, сводящегося к нелинейному уравнению Шредингера для амплитуды $U_{x1}^{(1)}$

$$2i\frac{\partial U_{x1}^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\frac{\partial^2 U_{x1}^{(1)}}{\partial \rho^2} + \Delta \left| U_{x1}^{(1)} \right|^2 U_{x1}^{(1)} = 0, \tag{16}$$

где

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} = \left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\right)\left(\varkappa \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}\right) = \gamma M_0 a^2 (1 - 3\cos^2\theta_k) \tag{17}$$

и

$$\Delta = 2\gamma (ak)^2 (1 - 3\cos^2\theta_k)/M_0. \tag{18}$$

Из вида выражений (17) и (18) следует, что, согласно условию модуляционной неустойчивости Лайтхилла [7], сводящемуся к неравенству $\Delta(\partial^2\omega/\partial k^2) > 0$, нелинейная плоская волна модуляционно неустойчива относительно длинноволновых возмущений во всем рассматриваемом интервале волновых чисел $(ak)^2 \ll 1$. Вместе с тем в этой же области волновых чисел возможно существование динамических солитонов ядерной намагниченности, задаваемых хорошо известным выражением [4]

$$U_{x1}^{(1)}(\rho, \tau) = a(\rho) e^{-i\delta\omega_n(k)t}, \tag{19}$$

где

$$a(\rho) = a_m \,\mathrm{sech}[(\rho - \rho_0)/\Lambda] \tag{20}$$

— модулированная амплитуда солитона,

$$\delta\omega_n(k) = -\frac{1}{2}\gamma M_0 (ak)^2 (1 - 3\cos^2\theta_k)(a_m/M_0)^2 \tag{21}$$

— нелинейный сдвиг частоты,

$$\Lambda = (M_0/a_m)\lambda\!\!\!^- \tag{22}$$

— масштаб модуляции, по порядку величины совпадающий с шириной солитона, $\lambda\!\!\!^- = k^{-1}$, а a_m — максимальное значение амплитуды, достигаемое в некоторой точке ρ_0. Как обычно, принято $\varepsilon = 1$, а роль малого параметра отнесена к отношению a_m/M_0. Нелинейный сдвиг частоты обусловливает со своей стороны сдвиг групповой скорости

$$\delta V_g = \partial\delta\omega_n/\partial k = -(a_m/M_0)^2 V_g. \tag{23}$$

Вследствие наложенных на a_m и k ограничений $|\delta\omega_n/\omega_n| \ll 1$ и $|\delta V_g/V_g| \ll 1$, а также имеет место иерархия пространственных масштабов $\Lambda \gg \lambda\!\!\!^- \gg a$. Это находится в соответствии с требованиями принятого рассмотрения. Из (21) и (23) следует, что нелинейные сдвиги частоты и групповой скорости приводят к некоторому уменьшению дисперсионной части частоты и групповой скорости линейного приближения. Ширина же солитона пропорциональна длине волны возмущения и не зависит от направления ее распространения. Поэтому возникновение импульсов с указанными свойствами ширины в процессе радиочастотного возбуждения спиновых волн свидетельствовало бы в пользу существования в рассматриваемых ЯСС солитонов ядерной намагниченности.

В заключение приведем некоторые численные оценки. Исследование слабонелинейных модулированных возмущений ядерной намагниченности в ферромагнитно-упорядоченной фазе требует реализации в лабораторной системе координат температур $\sim 10^{-6}$ K. В настоящее время (насколько нам известно) такие ядерные спиновые температуры достигнуты лишь во вращающейся системе координат [8]. Поэтому мы ограничимся рассмотрением волновых процессов в парамагнитной фазе. В доступных для эксперимента условиях ($H_0 \simeq 5 \cdot 10^4$ Oe и $T \simeq 3.5 \cdot 10^{-3}$ K) поляризация протонов составляет 90% (см. [9]), что удовлетворяет условию существования спиновых волн. Полагая $a \simeq 5 \cdot 10^{-8}$ cm, $a_m/M_0 \simeq 0.1$ и $a/\lambda \simeq 0.1$, находим $V_g \simeq 1.8 \cdot 10^{-5}$ cm/s и $\Lambda \simeq 5 \cdot 10^{-6}$ cm. При этом длительность солитона [10], определяемая как $\tau_3 = \Lambda/V_g$, составляет $2.8 \cdot 10^{-1}$ s. Заметим, что малая групповая скорость спиновых волн в рассматриваемых спиновых системах делает целесообразным использование возможно более тонких образцов.

Проведение исследований, описанных в настоящей публикации, стало возможным во многом благодаря гранту № MXK000, полученному от Международного научного фонда.

Список литературы

[1] Фельдман Э.Б., Хитрин А.К. ЖЭТФ. **98**, *3(9)*, 967 (1990).
[2] Вонсовский С.В. Магнетизм. М. (1971), С. 462.
[3] Ахиезер А.И., Барьяхтар В.П., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М. (1967), С. 368.
[4] Taniuti T. Progr. Theor. Phys. Suppl., *55*, 1 (1974).
[5] Buishvili L.L., Volzhan E.B., Giorgadze N.P., Pataraya A.D. Phys. Stat. Sol. (b) **75**, *1*, k69 (1976).
[6] Буишвили Л.Л., Гиоргадзе Н.П., Мчедлишвили Н.Г. ФТТ **33**, *8*, 2326 (1991).
[7] Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М. (1973), С. 175.
[8] Абрагам А., Гольдман М. Ядерный магнетизм: порядок и беспорядок. М. (1984), Т. 2, С. 360.
[9] Там же. С. 214.
[10] Полуектов И.А., Попов Ю.М., Ройтберг В.С. УФН **114**, 1, 97 (1974).